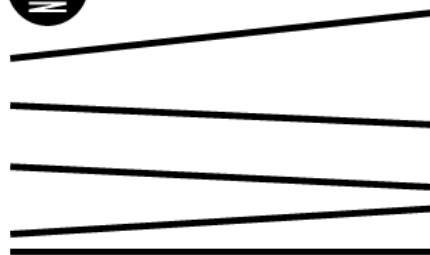


Digitaliseret af | Digitised by



**DET KGL.
BIBLIOTEK**

Royal Danish Library

Forfatter(e) | Author(s):

Titel | Title:

Udgivet år og sted | Publication time and place:

Fysiske størrelse | Physical extent:

Nielsen, R.

Philosophie og Mathematik : en propædeutisk
Afhandling.

Kjøbenhavn : Gyldendal, 1857

84 s.

DK

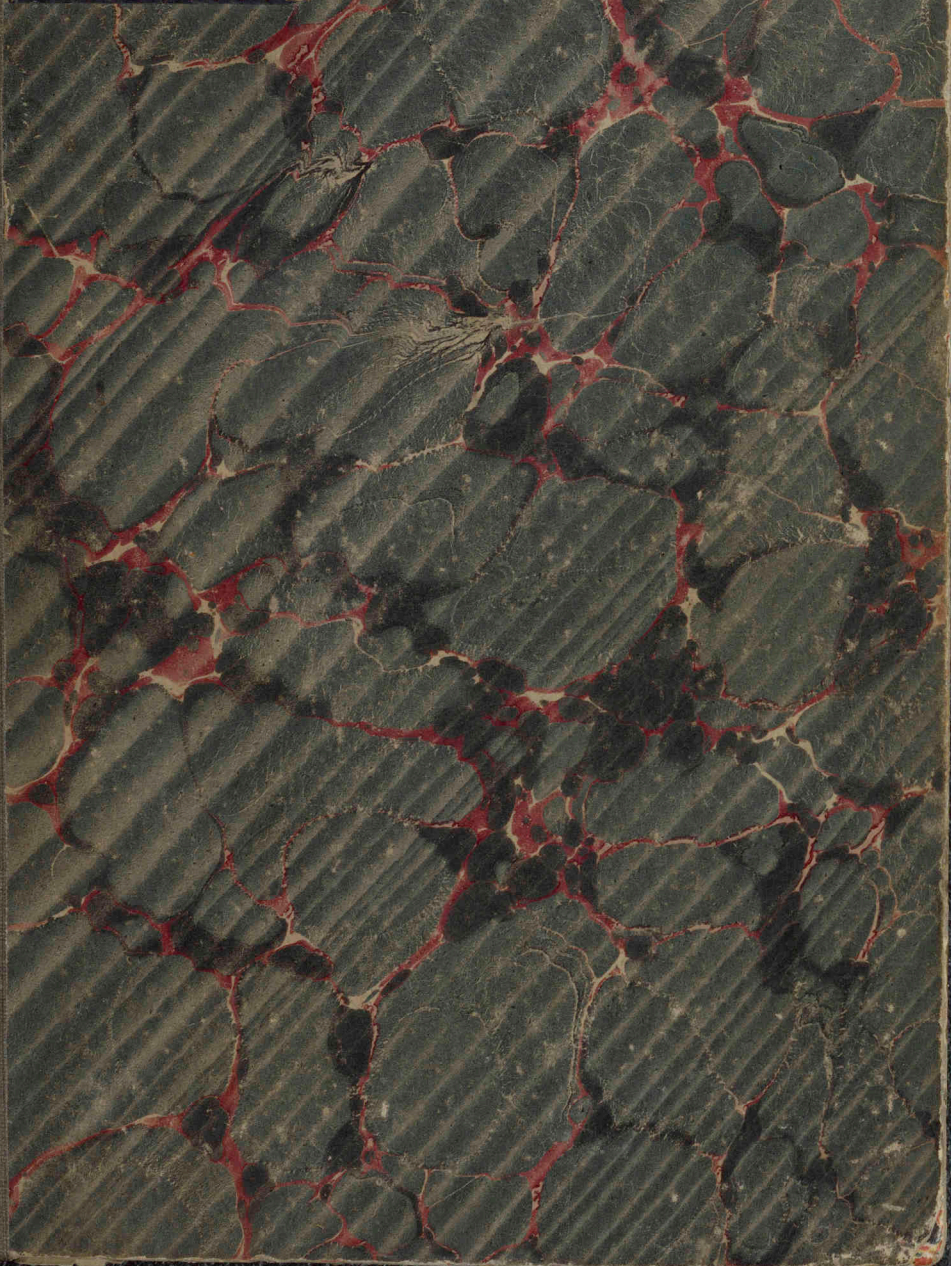
Materialet er fri af ophavsret. Du kan kopiere, ændre, distribuere eller fremføre værket, også til kommercielle formål, uden at bede om tilladelse. Husk altid at kreditere ophavsmanden.

UK

The work is free of copyright. You can copy, change, distribute or present the work, even for commercial purposes, without asking for permission. Always remember to credit the author.

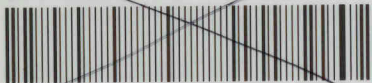



R. Nielsen
Philosophie
og Mathematik
1857



14. - 23.

DET KONGELIGE BIBLIOTEK
DA 1.-2.S 14 8°



11 14 08 00492 9

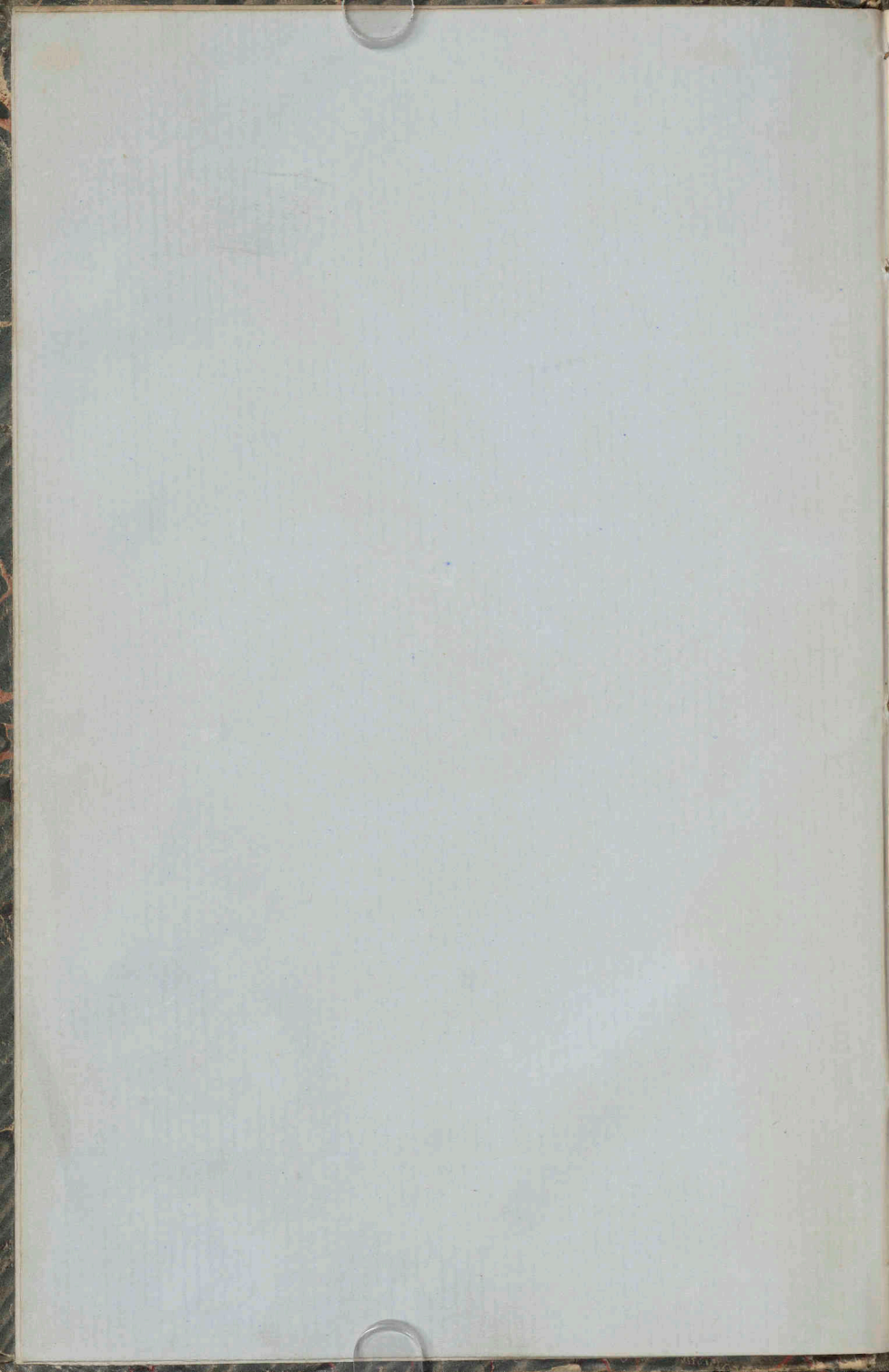
Det Kgl. Bibliotek



130025701901







Philosophie og Mathematik.

En propædæntisk Afhandling

af

R. Nielsen,

Professor i Philosophien.



Kjøbenhavn.

Forlagt af den Gyldendalske Boghandling (F. Høgel).

Thieles Bogtrykkeri.

1857.

Philosophie og Mathematik.

En propædæutisk Indledning

A. N. S. S.

1848



Propædæutisk

Indledning til den filosofiske og matematiske Lære

af A. N. S. S.

1848

Nærværende Afhandlings Forfatter, som hverken er eller vil være Mathematiker, har i Philosophien, den almindelige Videnskabslære, fundet Opfordring til at lære ogsaa Mathematikens Sprog, og med Hensyn paa de ledende Grundbegreber, saavidt muligt, sætte sig ind i dens Tankegang.

Rettelſe.

©. 25, Linie 9: Tilnærmelſe til et Uopnaaeligt; læs: Tilnærmelſe til et Opnaaeligt.

I.

Mathematiske Functioner.

Ordet „Function“ forekommer i meget omfattende Betydning. Hvor der kan være Tale om Virken, Viden, Handlen, betegner Function en særegen lovbestemt Virksomhed. Det hedder om en Embedsmand*), at han er i Function; man taler om Diets Function, om en Nerves Function o. s. v.

Paa de rene Størrelses Omraade kan der, hvad disse angaaer, dog ligesaa lidt være Tale om egentlig Handlen, som om egentlig Viden: et a kan ikke handle, et b ikke lide, et x ikke fungere i Lighed enten med en Embedsmand eller en Nerve.

Da nu alligevel Benævnelsen: „Function“ ikke alene er bibeholdt, men endog som Begreb fastholdt i Mathematiken, maa man i den mathematiske Anvendelse kunne paavise noget til Grundbetydningen Svarende.

Vistnok kunne de rene Størrelser ikke udøve reel Virksomhed, men ved at anbringes i forskjellig Sammenhæng kunne de dog væsentlig forandre de indbyrdes Forhold. En Størrelse kan, saa at sige, ansættes til forskjellige Bestillinger, kan som Addend ($a + x$), som Factor (ax), som Potensexponent (a^x , x^a), som Logarithme o. s. v. erholde en

*) Med kategorisk Eftertryk betoner Kammerherre Norden i „Gamle Rinder“ sin „Functionstid“.

meget forskjellig Indflydelse, og forsaavidt optræde i forskjellige Functioner.

Her er imidlertid en anden Side af Begrebet, som især maa fremhæves i Størrelseslæren. Man taler ikke blot om at fungere, at være i Function; man taler ogsaa om det, som tilveiebringes ved den fungerende Virksomhed. Udenfor Mathematiken tænker man ved Function især paa Virksomheden, i Mathematiken især paa Resultatet; udenfor Mathematiken gjælder det at være i Function ved Noget, indenfor Mathematiken at være en Function af Noget. Det løvbundne Forhold imellem et Afhængigt og et Uafhængigt viser sig imidlertid paa begge Sider.

„Afhænger en Størrelse: y , ifølge en vis Lov af andre Størrelser: $x, z, t, u \dots$, saa at enhver Værdi af y bestemmes ved de Værdier, som vilkaarligen tillægges $x, z, t, u \dots$, siges y at være en Function af disse Størrelser, alle betragtede som variable, y afhængig, de andre uafhængige. Dette betegnes almindeligen: $y = f(x, z, t, u \dots)$ “ *).

Ifølge denne mathematiske Begrebsbestemmelse ville altsaa Forandringer udgaae fra de Uafhængige, og udøve deres lovlige Indflydelse paa den Afhængige. For at minde om Ligheden imellem ikke-mathematisk og mathematisk Functioner, kunde man da gjerne betragte de Uafhængige: $x, z, t, u \dots$ som de Fungerende, de Handlende, der forarsage Forandringerne i det lidende y . Men da Opfatningen er bilædlig, indsees tillige, hvorfor $x, z, t, u \dots$ ikke siges at være i Function med Hensyn til y , medens derimod y udtrykkelig siges at være en Function af $x, z, t, u \dots$.

I Functionen ere altsaa Størrelserne foranderlige; men Størrelser kunne jo ogsaa være uforanderlige. At enhver Størrelse maa være sig selv lig, og at enhver Størrelse kan ved Forsøgelse eller Formindskelse i hvert Øieblik blive

*) C. Ramus. Algebra og Functionslære. Kjøbenhavn 1840, S. 14.

fig selv ulig, er en Modsigelse, der løses i Functionsbegrebet. I og for sig er ingen Størrelse enten uforanderlig eller foranderlig, thi ingen Størrelse er Noget alene i og for sig. Om den særegne Størrelse derimod i sit Forhold til andre Størrelser skal spille den Uforanderliges eller Foranderliges, og, i Foranderligheden, da igjen den Afhængiges eller den Uafhængiges Rolle, bestemmes ved Functionen, og bestemmer igjen Functionen.

Er Begrebet: Function, nu for det Første bestemt ved Begrebet Afhængighed, saa kommer det igjen an paa at bestemme Afhængighedsmaaden, det vil sige: at paavise Loven.

I den mathematiske Fremstilling af de forskjellige Functioner viser sig en Skala af Tilfælde, Regel og Lov, som maa blive Gjenstand for Philosophiens Opmærksomhed.

$$\text{At } 2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 2 \cdot 7 = 14,$$

$$\text{at } (3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144,$$

$$\text{at } 2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3+4} = 2^7,$$

kan erfares ved Forsøg, og sees ved Sammenligning. Man kan paa denne Maade prøve adskillige Tilfælde, og deraf abstrahere en Regel. Men, saa vigtig Reglen end kan være til praktisk Brug, er den dog ikke som Loven et nødvendigt Udtryk af Sagens Væsen.

For at faae en Regel saa omfattende, som muligt, maa man prøve saamange Tilfælde, som muligt; men om man end prøvede Tilfælde i Tusindviis uden at støde paa en eneste Undtagelse, vilde dog Reglen derved ikke kunne hæves til Lov.

Reglen udtrykker kun, at et Forhold er, ikke at det nødvendigviis maa være; men Loven gjælder som Lov i Kraft af Begrebet. At det, naar Loven skal erkjendes, ikke kommer an paa Tilfældenes Antal, men paa Sagens Væsen, og altsaa paa Indsigten, kan sees af følgende Exempel.

$$\text{At } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \text{ vil give en uendelig}$$

Række, bevises ikke ved at fortsætte Divisionen i det Uendelige,

men ved at forstaae, hvad Divisionen paa given Forudsætning nødvendighvis fører med sig.

Hvor let en Række Tilsfælde, der gaae ind under en Regel, kan bebrage, naar man derfra vil slutte til en Lov, er bekendt. Man søger, til Exempel, en Lov for Primtallene, og finder: $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$, lutter Primtal. Men dersom man nu af disse tre Tilsfælde vilde udbrage den Slutning, at $2^{2^m-1} - 1$ nødvendighvis maatte være et Primtal, vilde man svarlig forregne sig, da allerede det fjerde Tilsfælde: $2^9 - 1 = 511 = 7 \cdot 73$, ikke giver noget Primtal.

At i det anførte Exempel Undtagelsen fra Reglen allerede indtræffer med det fjerde Tilsfælde, er i den hele Betragtning selv som et Tilsfælde. Var Undtagelsen indtraadt med det 99de Tilsfælde, vi havde endnu ligesaa lidt høvt nogen Lov, men derimod været mere udsatte for at bebrages af Tilsfældenes Mængde*).

At Mathematiken istedetfor bestemte Talværdier anvender almindelige Betegnelser, istedetfor

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & a(x + y) = ax + ay; \text{ istedetfor} \\ (3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 & (xy)^a = x^a y^a; \text{ istedetfor} \\ 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} & a^x a^y = a^{x+y} \end{array}$$

er, hvad Lovrækjendelsen angaaer, et vigtigt Skridt. Forstanden, som fra Begyndelsen af var hildet i Betragtningen af de bestemte Værdier, de ulige Tilsfælde, de enkelte Regler, hæver sig ved de almene Betegnelser til Indsigt i Forholdenes Væsen, og derved til Indsigt i Loven.

Hvor iunderlig Loven hænger sammen med Begrebet, kan sees ved et Blik paa den logarithmiske Function.

$a^z = x$, $z = \log x$; $a^t = y$, $t = \log y$, kan ikke godtgjøres ved noget Beviis. Her kan ikke være Tale enten om Tilsfælde eller om Regel eller om Lov; her handles om

*) Fermat antog, at $2^{(2^n)} + 1$ var et Primtal; men Euler viste, at $2^{3^2} + 1$ er deselig ved 641.

en Begrebsbestemmelse for Logarithmen, en Angivelse af dens Kategorie. Men er Logarithmens Kategorie først fastsat, da gjælder som Lov i Kraft af Begrebet: $a^z a^t = a^{z+t} = xy$, og $z + t = \log(xy) = \log x + \log y$.

Forsaaavdt Functionsbegrebet overalt viser hen til bestemte Afhængighedsforhold, anvises vi ved Functionerne til at udføre intellectuelle, lovbestemte Handlinger. Hvor inderlig disse Handlinger smelte sammen med Begrebet, kan sees af de saakaldte Fundamentalligninger.

Som den første af alle Functioner kan $a + x$ vel ikke selv defineres ved nogen Fundamentalligning; men de fire enkelte Functioner: ax , x^a , a^x og $\log x$ kunne derimod betragtes som aldeles bestemte i deres Natur*) ved følgende fire Ligninger.

$$f_1(x + y) = f_1(x) + f_1(y); f_1(x) = ax, \text{ thi } a(x + y) = ax + ay.$$

$$f_2(xy) = f_2(x) f_2(y); f_2(x) = x^a, \text{ thi } (xy)^a = x^a y^a.$$

$$f_3(x + y) = f_3(x) f_3(y); f_3(x) = a^x, \text{ thi } a^{x+y} = a^x a^y.$$

$$f_4(xy) = f_4(x) + f_4(y); f_4(x) = a \log x, \text{ thi } a \log(xy) = a \log x + a \log y.$$

See vi nu i disse Fundamentalligninger en Paaviisning af Love, en Fremstilling af Begreber, vil Forskjellen imellem Mathematiken og Philosophien være iøinesaldende. Det Giendommelige giver sig tilkjende i Sproget.

Til en philosophisk Fremstilling af Begrebet bruges Ordet, og Ordet lyder forskjelligt i de forskjellige Folkesprog; men Mathematiken nøies ikke med Ordet; uafhængig af Folkesprogenes Forskjellighed har den exacte Videnskab sit eget Sprog: $f(x + y) = f(x) f(y)$ er hverken dansk eller fransk, men mathematisk.

*) Vjfr. Ramus: Algebra og Functionslære S. 14—18.

At den Betegnelse, Mathematiken anvender, nu ogsaa virkelig er et Sprog i strengere Forstand, end f. Ex. Nodesproget i Musiken, sees deraf, at det ikke indskrænkes til at angive forskjellige Regningsoperationer, men udtrykker Modsetninger, uddrager Slutninger, og paaviser Forskjellen imellem det Mulige og det Umulige.

I de omvendte Functioner have vi Udtryk baade for Modsetning og Slutning. Er Functionen φ omvendt af ψ , d. e. $\varphi(\psi(x)) = x$, saa er ogsaa $\psi(\varphi(x)) = x$, d. e. Functionen ψ omvendt af φ , er $\varphi(x) = x + a$, saa er $\psi(x) = a - x$; er $\varphi(x) = ax$, saa er $\psi(x) = \frac{x}{a}$; er $\varphi(x) = x^n$, saa er $\psi(x) = \sqrt[n]{x}$; er $\varphi(x) = a^x$, saa er $\psi(x) = \log x$; er $\varphi(x) = \cos x$, saa er $\psi(x) = \arccos(x)$.

Den sidste Betegnelse, der angiver en Relation mellem den trigonometriske Linie, $\cos x$, og den til samme svarende Bue, $\arccos(x)$, udtrykker Modsetningen saaledes, at φ og ψ ikke betyde to, hinanden ophævende, Handlinger, thi x modsættes x derved, at det i $\varphi(x)$ er en Bue, i $\psi(x)$ en ret Linie.

At Mathematiken i sit Sprog baade kan udtrykke det blot Mulige og det i sig Umulige, fremlyser af den Maade, hvorpaa Forholdet mellem de rationale og de irrationale, de reelle og de imaginære Størrelser angives: $a = \frac{b}{c}$ er for Tanken en Virkelighed, $b = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ en Mulighed, og $\sqrt{-1}$, $\sqrt[2m]{-a}$ en Umulighed.

Medens altsaa Philosophien med de øvrige Videnskaber*) er henvist til et grammatisk Folkesprog, betjener Mathematiken sig væsentlig af et pasigraphisk Tegnsprog: denne Sprogforskjellighed maa vel have sin dybere Grund.

*) Ufuldstændige Tegnsystemer, som f. Ex. det kemiske, kunne ikke stilles paa lige Trin med det mathematiske.

Foraaaviddt et Sprog udtrykker Tanter og Begreber, udtrykker det, hvorledes det Almene og det Individuelle stilles i Abstractioner og forenes i Domme, sondres i Domme og forbindes i Slutninger.

I det grammatiske Sprog har det Almene eenfiddig Overvægt over det Individuelle; i det mathematiske Sprog bestemmes det Almene saa punktlig, at det kan gaae sammen med det Enkelte, og træffe det Individuelle. I det grammatiske Sprog antager Begrebet en logisk Form; i det pasigraphiske Tegnsprog en mathematisk Form.

Logiken siger: „A er A“, „enhver Ting er, hvad den er“, og viser derved, at den i det Enkelte kun seer paa det Almene.

Mathematiken sætter $A = A$, og viser derved, at den i det Almene udtrykskelig seer paa det Enkelte.

I den logiske Sætning „A er A“, er A som et Billede, der forestiller „enhver Ting“, men i sig er uden Betydning. I Betegnelsen af det Enkelte haves ikke dette Enkelte, men kun det Almene: Ordet og Tingen, Betegnelsen og det Betegnede falde ud fra hinanden.

I den mathematiske Sætning: $A = A$ forestiller A vel ogsaa en hvilkensohmhelst Størrelse, men, idet A er Exempel paa en hvilkensohmhelst Størrelse, B, C, D . . ., forestiller det som Størrelse tillige sig selv; $A = A$, thi $2 = 2$, $3 = 3$: det Almene sættes punktuel, Tegnet og det Betegnede ere congruente.

Logiken forvandler Ligningen: $A = A$, til en grammatiske Sætning; Mathematiken forvandler Sætningen: A er A, til en Ligning. Allerede heri sees en Væsensforskjel mellem den exakte og den dialektiske Videnskab.

I Sætningen som Ligning, er der ingen Forskjel mellem Subjekt og Prædikat. Dette gjælder ikke blot om de saakaldte identiske Ligninger, som: $A = A$, men om en hvilkensohmhelst Ligning. Hvad der staaer paa den ene Side af Lighedstegnet forestiller nemlig Subjektet, og det, der

staaer paa den anden Side, Prædikatet; men det er jo for enhver Ligning aldeles ligegyldigt, fra hvilken Side den læses. Er $f(x + y) = f(x) + f(y)$, saa er naturligviis ogsaa $f(x) + f(y) = f(x + y)$. I det mathematiske Sprog er Prædikatet congruent med Subjektet, thi Mathematiken er en exact Videnskab.

Omformes Ligningen derimod i det grammatiske Sprog til logisk Sætning, saa fremkommer en væsentlig Forskjel imellem Subjekt og Prædikat; hvorfor disse to Bestanddele jo heller ikke kunne forenes ved det rene Lighedstegn, men maae forbindes ved Copula. I det nu Forskjellen imellem Subjektet og Prædikatet i den logiske Dom bringes til Bevidsthed, viser sig den meget omhandlede Modsigelse, at det Enkelte siges at være det Almene*). I det logiske Sprog er Prædikats Væren Et med Subjektet en Modsigelse, og Philosophien en dialektisk Videnskab.

Det mathematiske Tegnsprog og det grammatiske Sætningsprog ere i deres Udspring begge naturlige for den sunde Mennekesforstand, og indgaae desaaarsag i forskjellig Forbindelse.

Mathematiske Forholdsbestemmelser høre i den Grad hjemme i Tilværelsen, at det daglige Liv forbruger et ingeniørlunde ubetydeligt Quantum bevidst og ubevidst Mathematik til praktisk Behov. Udtryk som: „tung, tungere, hurtigt, hurtigere, varmt, varmere“, falde endnu udenfor det Mathematiske; men, naar der udtrykkelig spørges: „hvor tungt?“

*) Allerede Megarikeren Stilpon angreb de logiske Domme. Han paastod, man kunde ikke sige Andet end identiske eller rettere: tautologiske Sætninger, f. Ex. „Menneske er Menneske“, „Hest er Hest“; men ikke: „Hesten løber“, thi „Hest“ og „at løbe“ ere ikke identiske; det sidste Prædikat tillægger man jo ogsaa Hunde og Løver. Sejr. Paul Möllers Forelæsninger over den ældre Philosophies Historie.

„hvor meget tungere“? o. s. v., kan Svaret neppe savne et mathematisk Element.

Den mathematiske Tænknings eiendommelige Forhold til det Almeenlogiske viser sig maaskee meest paafaldende, naar Mathematiken selv tager Ordet, for at stille et Problem. Exempel. „En Vandbeholdning kan fyldes ved eensformig Tilstrømning af forskjellige Rør i Antal n , og de Tider, i hvilke den fyldes af hvert Rør særskilt, ere givne: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$. I hvilken Tid (x) bliver den fyldt, naar Tilstrømningen skeer ved dem alle samtidigene*)? ”

Den, der ikke har lært Mathematik, vil forstaae, hvad det er, her siges, og dog ikke forstaae det. I sine logiske Grundtræk er Sagen ikke alene almeenforstaaelig, men kan endog blive saa klar, at Opgaven er løst i samme Dieblik, den er fremstillet.

Har man nemlig fire Rør af den Bestaaenhed, at en eensformig Tilstrømning gennem ethvert af dem særskilt kan fylde en vis Vandbeholdning i en Time, saa fatter sund Menneskeforstand naturligviis uvilkaarlig, at den samme Vandbeholdning maa ved eensformig Tilstrømning gennem alle fire Rør paa een Gang fyldes i en fire Gange saa kort Tid, altsaa i Løbet af et Kvarteer. Det Mathematiske gaaer her op i det Almeenlogiske.

Men, hvor forskjelligt dette Mathematiske dog alligevel er fra det Almeenlogiske, er ogsaa indlysende af det anførte Exempel. Man behøver blot at gjøre Relationen imellem de Tider, hvori Vandbeholdningen fyldes gennem hvert Rør særskilt, en Smule indviklet; og strax er Opgaven saa eiendommelig, at den stiveste Logiker, den skarpsindigste Dialektiker, som ikke kan Mathematik, forgjæves bryder sit Hoved med at løse den.

Den, der forstaaer det mathematiske Sprog, finder Opgaven let, ja for ethvert Tilfælde væsentlig lige let; thi

*) C. Ramus. Elementær Algebra S. 179.

Ligningen $\frac{x}{a_1} + \frac{x}{a_2} + \frac{x}{a_3} + \dots + \frac{x}{a_n} = 1$, som giver $x =$

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \text{ passer for alle mulige Tilfælde.}$$

Denne det Almene's Opgaaen i de enkelte Tilfælde er afgjørende for den mathematisk Erkjendelse.

I det logiske Sprog er Formlen Slutning, i det mathematisk er Slutningen Formel. I den formelle Slutning bliver Begrebets Gyldighed vel indseet, men altid saaledes, at det Enkelte og Særskilte henvinde i det Almene. I Formlen er det Almene punktualiseret, og derved stiftet til exact Bestemmelse af det Særskilte og det Enkelte.

Alf den bekjendte Syllogisme:

„Alle Mennesker ere dødelige,

Cajus er et Menneske.

Altsaa: Cajus er dødelig.“

faaer man, skjøndt Cajus udtrykkelig nævnes, dog alligevel ingen særlig Oplysning om Cajus som Cajus. I Undersætningen: „Cajus er et Menneske“ har det Almene allerede i den Grad opslugt det Enkelte, at man aldeles Intet vin- der ved i Syllogismen at indsatte enten Brutus eller Pom- pejus eller Cnejus istedetfor Cajus.

$$\text{Alf Formlen } x = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

faaer man derimod, ved at indsatte for $a_1, a_2, a_3 \dots$ en Mængde vilkaarlige Værdier, de allerforskjelligste Tilfælde ud. Og dog er Formlen almeengyldig, uforanderlig; kun de enkelte Tilfælde ere foranderlige. Ved Formlen er der altsaa tilveiebragt en egen Overenskomst mellem det Almene og det Enkelte, det Uforanderlige og det Foranderlige.

Med det logiske Formelvæsen er det paa Videnskabernes nuværende Trin kun maadelig bevendt; med de mathematisk Formler har Sagen en anden Sammenhæng.

Imod det logiske Formelvæsen gives et videnskabeligt Middel: en sund og skarp Dialektik; imod det mathematiske Formelvæsen behøves intet Middel, thi Indsigt i de virkelige Love er betinget af Indsigt i de mathematiske Formler *).

Det Videnskabelige i disse Formlers Udvikling kan allerede sees af den Maade, hvorpaa Functionsbegrebet artikuleres i de særskilte Grundfunctioner.

Enkeltfunctionerne $a \log x$, x^a , x^a , ax , $a + x$ lade sig nemlig aflede saaledes, at den efterfølgende med indre Nødvendighed udspringer af den Foregaaende. Hvormegen Forskjel her end kan være imellem disse Functioner i deres selvstændige Optræden, finder man paa Udviklingens Traad dog let de Knuder, hvor den ene ligger indesluttet i den anden.

Her er saaledes et Vendepunkt, hvor Multiplicationsbegrebet dæmrer under Additionens Slør. Tager man $a + a + a$, en Sum af tre ligestore Addender, kommer man jo næsten uforvarende til at opfatte Størrelsen som et 3 Gange gjentaget a . Men dermed er Overgangen ikke gjort. Bevidstheden kan ofte komme et nyt Begreb meget nær, kan skimte det som i en Dæmring, og dog kan Begrebet atter svinde, og blive borte.

*) Ved sine Formler egner Mathematiken sig just til at udtrykke de virkelige Love. Dersom det ved Bestemmelsen af disse Love blot kom an paa, at nævne det Almene, kunde de bestemmes uden Matematikens Hjælp; men da det tillige kommer an paa Phænomenerne og de enkelte Tilfælde, efterdi Lovene ere Phænomenernes Love, maa det Mathematiske med, at Udtrykket kan blive exact. Den, der f. Ex. kun fatter Loven for den jævntvoksende Hastighed, forsaavidt den logisk udtrykkes i Ord, fatter vel i en vis Forstand det Væsentlige, men, da han mangler Punktualiteten i de særegne Tilfælde, ikke det Virkelige. — Det gjør en stor Forskjel, om Loven for haarde Legemers Sammenstød fremsættes i logisk Form eller i mathematisk Formel. Den logiske Fremstilling i Ord er med al sin Nøiagtighed altid sværende; kun en Formel som: $\frac{MH + mh}{M + m}$ er indrettet paa at forklare det Enkelte.

Skal et nyt Begreb opgaae for Erkjendelsen, er det ikke nok, at Undersøgelsen fører hen til det Vendepunkt, hvor det har sit Udspring (thi saa vare vel Nutidens store Opdagelser alt stete for Aarhundreder siden); for at et nyt Begreb kan blive til i Erkjendelsen, kræves, at Tanken ret faaer Die paa det, optager det i en Kategori, indfører det blandt de øvrige Begreber, følger dets Gang, og prøver dets Consequenser.

Som det i Mathematiken gaaer med Overgangen fra Addition til Multiplication, saaledes ogsaa med Overgangen fra Multiplicationen til den exponentielle Function, og fra denne til Logarithmen*).

I Rigningen: $a + a + a + \dots a = na$ bliver den samme Størrelse paa den ene Side opfattet som Sum, paa den anden Side som Product. Ogsaa her sees det udtrykkelig, at den mathematiske Betegnelse er et Sprog.

Som umiddelbart Beregningsudtryk angiver Rigningen kun, at der paa hver Side af Lighedstegnet findes ligestore Størrelser; men med Hensyn til Begrebet er Rigningen en Dom.

Seet fra den logiske Side, viser denne Dom igjen Modsigelsen, den Modsigelse, at Multiplication altsaa baade er det Samme og dog ikke det Samme, som Addition. Denne Modsigelse, samt den diversus respectus, hvormed den formelle Logik vil undgaae Modsigelsen, og just derved kommer i Modsigelse med sig selv, og falder ind under Dialektiken, vedkommer slet ikke Mathematiken.

Som mathematisk Dom vil Rigningen ikke logisk ud-
sige, hvad Multiplicationen enten er eller ikke er, men derimod i den exacte Form paavise, hvorledes Multiplicationens intellectuelle Handling hænger sammen med Additionens.

*) De trigonometriske Functioners indre Sammenhæng med den exponentielle og med Logarithmen kan først senere paapeges.

Grad Dialektiken er i Philosophien, er den intellectuelle Handling med sine praktiske Overgange i Mathematiken. Alt Sagen forholder sig saaledes, kunne vi oplyse ved et Tilbageblik.

Den mathematiste Function forudsætter det Foranderlige i sine Afhængige som i sine Uafhængige; kun ved at fatte Forandringerens uendelige Mulighed fatter man Functionen. Men Functionen forudsætter i alle disse Forandringer tillige et Uforanderligt; den udtrykker jo Loven, og Loven er det Uforanderlige.

Seet fra den endelige Side kunde det vel synes, som om det i Formlen Uforanderlige var et dødt Schema, ligegyldigt mod de foranderlige Tilfælde, at det f. Ex. med

$$\text{Hensyn til Formlen: } x = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

kunde være ganske ligegyldigt, hvilke Værdier man indsatte. Dette er nu vistnok i endelig Forstand saaledes. Men jo mere endeligt Synspunktet bliver, desto mere træder ogsaa Functionsbegrebet i Baggrunden; jo mere derimod Functionsbegrebet fremherfer, desto inderligere sees Eenheden af det Foranderlige og det Uforanderlige: Functionen viser just hen paa det, som Dialektiken fordrer.

I ovenstaaende Opgave bleve Tiderne $a_1, a_2 \dots a_n$ givne, hver for sig, og selvfølgelig uafhængige af hinanden. Men man kunde jo antage a_1 givne saaledes, at $a_2, a_3 \dots$ gjordes afhængige deraf, og det efter en saadan Lov, at de dannede enten f. Ex. en aritmetisk eller en geometrisk Række: $a_1 = a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d \dots$ eller $a_1 = a_1, a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, \dots$ altsaa i første Tilfælde $a_p = a_1 + (p-1)d = \varphi_1(p)$; i andet Tilfælde $a_p = a_1 q^{p-1} = \varphi_2(p)$; vi sif da

$$x = \frac{1}{\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \dots + \frac{1}{\varphi(p)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n)}} = F(\varphi(p)) = f(p).$$

Da der i Udtrykket for x findes i Nævneren en Sum af Formen $\frac{1}{\varphi(p)}$, der jo er en Function af $\varphi(p)$, og hele Summen selvfølgelig en Function af $\varphi(p)$, saa er ogsaa 1, divideret med Summen, en Function af $\varphi(p)$. Det Uforanderlige og det Foranderlige ville paa denne Maade gjenneemtænke hinanden.

De mathematiske Functioner ere ikke døde Formler, men dristige, rørlige, praktiske Begreber, der føre et intellektuelt Liv i Videnskabens Operationer. Til slige praktiske Overgange behøves ingen dialektisk Spore.

Som Exempel paa, hvorledes de mathematiske Hændelsesbegreber kunne samvirke endog indenfor elementære Grændser, ville vi til Slutning minde om de symmetriske Functioner.

Iggjennem $(x - a_1)(x - a_2) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1a_2 = x^2 + A_1x + A_2$; $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x - a_1a_2a_3 = x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$, vil man forstaae det almindelige Udtryk:

$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \dots A_{n-1}x + A_n = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) = 0$. Her er det Uforanderlige overalt med i det Foranderlige; thi Udviklingsloven viser os Begrebbestemmelsen af Coefficienter og Rødder:

$A_1 = -(a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n) = f(a_1 a_2 \dots a_n) =$ Summen af alle a med modsat Tegn; her virker første Grundfunction.

$A_3 = -(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \dots a_1a_2a_n + a_2a_3a_4 + \dots a_{n-2}a_{n-1}a_n) = f(a_1 a_2 a \dots a_n) =$ Summen af Producterne af 3 og 3 a med modsat Tegn; her samvirke første og anden Grundfunction.

$A_n = (-1)^n (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = f(a_1, a_2, \dots a_n) =$
 Produktet af alle a med modsat Tegn, naar n er ulige.
 Det er altsaa den anden Grundfunction her optræder.

Betænker man derhos, at Rækken gaaer frem efter Potenser af x , hvorved den exponentielle Functions Regel med den logaritmiske tillige bliver mulig; saa faaer man et Totalitetsindtryk af Functionernes intellektuelle Samvirken.

Logikens Formalbegreber ere som tomme Kar, der enten maae forblive i deres Tomhed, eller fyldes med Stof og Indhold udenfra; Mathematikens Functionsbegreber ere som driftige Organer, der assimilere sig et væsentligt Indhold.

Uagtet de mathematiske Operationer i deres særegne Fremgang tilhøre Fagvidensskaben uden at vedkomme Philosophien; egner deres Charakter sig dog for en filosofisk Betragtning til at belyse Tankevirksomheden fra en egen Side, og synliggjøre Problemer, hvis Behandling, for ikke at sige Løsning, er og maa være Philosophiens Formaal.

II.

Uendelighedsproblemet.

Kan Functionsbegrebet tjene til at bestemme Eenheden af det Uforanderlige med det Foranderlige, saa maa det ogsaa kunne tjene til at opklare Forholdet mellem det Endelige og det Uendelige. Hvorledes forholder det Endelige sig til det Uendelige?

Uendelighedsproblemet er Mathematikens og Philosophiens store Fælledsproblem. Men, før man ret kan tænke paa Løsningen af et Problem, maa man allerførst see at lade Problemet blive til. Nærværende Problem er nu af

den Bessaffenhed, at det kun da kan staae klart for Bevidstheden, naar Mathematiken vil hjælpe Philosophien med at stille det frem.

Med Interesse for Problemet følge vi da den af Mathematiken betegnede Wei.

1) Rækker og trigonometriske Functioner.

Den sædvanlige Forestilling, at det Uendelige falder udenfor det Endelige, og kun kan naaes ved en Tilnærmelse, synes strax at finde sin Stadfæstelse i den elementære Mathematiks Rækkeudviklinger.

Rækkebegrebet er en videre Udvikling af Functionsbegrebet, thi hvert Led i Rækken er en Function af sin Plads, Udtrykket for det almindelige Led: $u_n = f(n)$ viser, at u_n er afhængig af n . Eftersom nu $n = 0$, eller $= 1$, $= 2$, $= 3 \dots$ eller $n = -1$, $= -2$, $= -3 \dots$ vil $u_n = u_0$, $= u_1$, $= u_2$, $= u_3 \dots$ eller $u_n = u_{-1}$, u_{-2} , $u_{-3}, \dots$ forandre sin Værdi.

Da nu n , ved at formindskes eller formeres med en Enhed, kan forandres i det Uendelige, maa det Samme gjælde om u_n . Rækken: $\dots u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$ forestiller da en progressus og regressus in infinitum, hvis særskilte Led ere endelige, men deres Tal uendeligt.

Til de tre Slags sammenhængende Proportioner, den arithmetiske, den harmoniske og den geometriske, svarer, som bekendt, en typisk Forskjel mellem følgende Rækker:

α) Den arithmetiske Række (Æquidifferensrækken), der forudsætter $u_n = f(n) = a + nx$:

$$\dots a - 3x, a - 2x, a, a + x, a + 2x, a + 3x \dots$$

β) Den harmoniske Række, ifølge hvilken $u_n = f(n) =$

$$\frac{1}{a + nx}$$

$$\cdots \frac{1}{a-3x}, \frac{1}{a-2x}, \frac{1}{a-x}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a+x}, \frac{1}{a+2x}, \frac{1}{a+3x} \cdots$$

γ) Den geometriske Række (Æquivotientrækken), som bestemmes ved $u_n = f(n) = ax^n$:

$$\cdots \frac{a}{x^3}, \frac{a}{x^2}, \frac{a}{x}, a, ax, ax^2, ax^3 \cdots$$

I disse Rækker stræber det Endelige ad forskellige Veie henimod det Uendelige, men Uendeligheden viser sig dels som en brat Tilintetgjørelse af det Endelige, dels som det Uopnaaelige.

I den arithmetiske Række gaaer Tilnærmelsen paa høire Side af a frem mod ∞ , medens der paa venstre Side kan, idet nx bliver $= a$, indtræde et Tilfælde, da et enkelt Led forsvinder.

I den harmoniske Række gaaer Udviklingen til Høire, fra $\frac{1}{a}$, stadig fremad mod 0; medens derimod til Venstre det Tilfælde kan indtræde, da ∞ pludselig opsluger et enkelt Led.

I den geometriske Række skrider Udviklingen til begge Sider ligelig fremad, til Høire (med $x > 1$) mod ∞ , til Venstre mod 0.

Saaledes opfattede, ere da ∞ og 0 absolute Negationer, rene Størrelsesgrændser, men ikke selv Størrelser. Den formelle Logik holder da ogsaa fast paa den Grundfætning, at det Endelige ikke er uendeligt, og det Uendelige ikke endeligt. Men saa uimodsigelige disse af Contradictionsprincipet garanterede negative Domme end synes at være, saa fattige, indholdslose, ere de tilsvarende positive: „det Endelige er det Endelige, det Uendelige det Uendelige“, thi deres saakaldte Identitet er en reen Tautologi.

Som dialektisk Videnskab har Philosophien ikke kunnet blive staaende ved slike Tautologier. At det Uendelige ikke

er endeligt, vil jo med andre Ord sige, at det er en Grændse for det Endelige, altsaa det Ikke=Endelige. Det Endelige, der er det Ikke=Uendelige, er da med det Samme en Grændse for det Uendelige. Men naar det Endelige og det Uendelige paa denne Maade ere hinandens Grændser, maa Grændsebestemmelsen blive dialektisk.

Har nemlig det Uendelige sin Grændse i det Endelige, saa har det jo en Endelighedsgrændse, en endelig Grændse, og er selv endeligt. Naar det Endelige omvendt først sin Grændse i det Uendelige, da har det jo ingen endelig Grændse og er folgelig uendeligt.

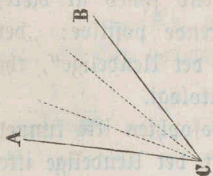
Under en saadan Spænding imellem formel Logik og Dialektik er det af Vigtighed at undersøge, paa hvilken Side Mathematiken vil stille sig.

Det kunde ved første Biekt synes, som vilde Mathematiken ubetinget hævde Grundsætningen: enhver Ting er, hvad den er, $a = a$, $0 = 0$, $\infty = \infty$, og dermed afgjøre Sagen. Men dersom nu Dialektiken tilføiede: enhver Ting er uophørlig i Begreb med at være, hvad den ikke er, selv 0 kan efter sit Begreb være som ∞ og ∞ omvendt som 0; mon da Mathematiken, naar den ret faaer sig betænkt, vilde modsigte dette?

For at fatte Mathematikens egentlige Mening, maae vi befinde os paa den i forrige Afsnit fremhævede Forskjel imellem Ligningen og den logiske Dom. Hvad den logiske Dom er for Dialektiken, er Ligningen for Operationen.

Hvad den mathematiske Dom angaaer, maae vi ikke formeget lytte til de ordlydende Udtryk i Talesproget, men fremfor Alt see paa den factiske Begrebsudvikling i Tegnsproget.

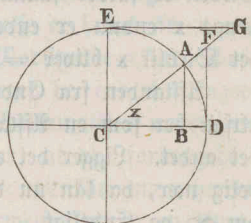
Begynde vi med en ideel Fac-
ticitet, og spørge f. Ex., hvormange
Vinkler den endelige Vinkel ACB
vel kan siges at indeslutte; da svarer
Mathematiken med rene Ord: „uen-
delig mange, uendelig smaa“. Det



Uendelige bliver altsaa baade som det uendelig Store og det uendelig Lille omsluttet af endelige Grændser. Men, dersom det Uendelige virkelig omsluttet af endelige Grændser, maa det jo dog, det siger den sunde Forstand, paa en eller anden Maade selv være endeligt.

Hvordan hænger dette nu egentlig sammen? Som veilevende Exempler kunne vi engang betragte de trigonometriske Functioner.

$$AB = f_1(x) = \sin x; BC = f_2(x) = \cos x; DF = f_3(x) = \operatorname{tg} x, EG = f_4(x) = \cot x \text{ o. s. v.}$$

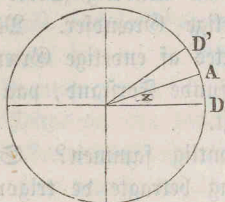


Idet x , vor uafhængige Variable, vøjer i første Kvadrant, vøjer, som bekendt, $\sin$, tg , $\sec$ med det Samme, hvorimod $\cos$, $\cot$, $\operatorname{cosec} \dots$ aftage. Forandringerne i x gaar i første Kvadrant fra 0° til 90° ; det er nødvendigt, at betragte disse Forandringer nærmere.

Er $x = 0$, saa er $\sin x = 0$, men $\cos x = 1$; $\operatorname{tg} x = 0$, men $\cot x = \infty$, $\sec x = 1$, men $\operatorname{cosec} x = \infty$; er $x = 90^\circ$, da $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $\operatorname{tg} = \infty$, $\cot x = 0$, o. s. v.

Det Endelige og det Uendelige bestemmes her ved hinanden saaledes, at Overgangen fra Endeligt til Endeligt falder sammen med Overgangen fra Endeligt til Uendeligt, hvorved da ogsaa en Overgang fra Endeligt til 0 falder sammen med en Overgang fra Endeligt til ∞ .

Hvad betyder Udtrykket: $\angle x = 0$? I endelig Forstand kunde det betyde, at her slet intet x var; men i Kraft af Functionsbegrebet betyder $\angle x = 0$ et Ikke-Værende som dog er et Værende. At en Vinkel $= 0$ ingen Vinkel er, forstaaer sig af sig selv; at $\angle x = 0$ dog alligevel betragtes som værende, sees deraf, at Cosinus jo kun kan være en Vinkels Cosinus, og at $\cos 0$ ligesaadist er en reel Størrelse, som $\cos 1^\circ$.



Antages A at være i en Grads Afstand fra D og D', saa følger heraf, at Veien fra 1° til 0° ikke er længere end Veien fra 1° til 2° . A kan komme D saa nær, man vil, saalænge A ikke falder sammen med D, er $\angle x$ en endelig Størrelse; men i det Tilfælde A falder sammen med D bliver $\angle x = 0$. Saa længe x endnu er endelig, er $\cot x$ ogsaa endelig; men i det Tilfælde x bliver $= 0$, bliver $\cot x = \infty$.

Afstanden fra Endeligt til 0 og fra Endeligt til ∞ er altsaa her som en Afstand fra det ene Endeligheds punkt til det andet. Ligger det ene Endeligheds punkt det andet uendelig nær, da kan nu det Samme siges om 0 og Endeligt, om ∞ og Endeligt.

Vilde man, for at belyse Forholdet mellem Rækkerne og de trigonometriske Linier, hente en Analogi fra Æstetikken, maatte man vel sige: de trigonometriske Functioner ere classiske, de uendelige Rækker romantiske.

At have det Uendelige omfluttet af det Endelige er jo classisk, at opfatte det Uendelige som et for det Endelige Hiinsidigt, Uopnaaeligt, romantisk. Hvilken af disse Synsmaader giver nu Mathematiken Medhold?

Foraaavidt Mathematiken er en exact Videnskab, skulde man vel mene, den holdt paa det Classiske; men see vi paa dens Brug af Kategorier som: „Tilnærmelse, uendelig Tilnærmelse“, skulde man næsten troe, den sværmede for det Romantiske.

Det er med denne Anthydning naturligvis ikke Meningen, at ville indblande det Æsthetiske i det Mathematisk, eller opklare videnskabelige Begreber ved uvidenskabelige Analogier. Den flygtige Hentydning til det Æsthetiske skulde blot tjene til at udhæve Forskjellen imellem den dobbelte

Maaade, hvorpaa det Endeliges Forhold til det Uendelige bliver opfattet.

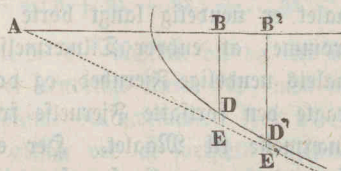
Hvad ligger der da i Begrebet: Tilnærmelse, uendelig Tilnærmelse?

Ved „uendelig Tilnærmelse“ kan man da for det Første ikke tænke paa Tilnærmelse til et Opnaaeligt; thi det Opnaaelige udtrykker just, at Tilnærmelsen maa ende med Maalets Opnaaelse, og altsaa i sit Væsen være endelig.

Tilnærmelse til et Uopnaaeligt indeholder ingen Modsigelse; et Uopnaaeligt uden Tilnærmelse er heller ikke nogen Modsigelse. Der er saaledes intet Modsigende i den Sætning, at parallelle Linier, hvor meget de end forlænges, aldrig ville sfjære hinanden. Naar Mathematiken undertiden bruger det Udtryk om parallelle Linier, at de, forlængede i det Uendelige, ville sfjære hinanden: da kan man herved ikke egentlig tænke paa nogen Tilnærmelse; det er en Umulighed, her fremstilles under Mulighedens Form.

En uendelig Tilnærmelse, Tilnærmelse til et Uopnaaeligt, synes derimod at frembyde den haardeste af alle Modsigelser. Ved Tilnærmelse maa man jo dog i en eller anden Forstand komme Maalet nærmere; men at komme Maalet nærmere maa dog vel være det Samme som at komme Opnaaelsen nærmere; men fra Opnaaelsen af det Uopnaaelige er man jo altid lige langt borte.

Ikke desto mindre hævder Mathematiken Begrebet af en uendelig Tilnærmelse, og nedslaaer enhver Modsigelse ved nimodsigelige Veriser. Saaledes i Væren om Asymptoterne.



$$AB = x; BD = y; BE = y_1.$$

For Hyperblen har man f. Ex. Ligningen:

$$f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}; \text{ for Hyperblens Asymptote:}$$

$$f'(x) = y_1 = \frac{b}{a}x. \text{ Altsaa er } y_1 - y = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\ = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Betragtningen af denne Formel viser, 1) at her er en virkelig Tilnærmelse, thi jo større x bliver, desto mindre bliver naturligtvis Brøken $\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$; 2) at Tilnærmelsens Maal er absolut uopnaaeligt, thi Brøken er først 0, naar x er blevet $= \infty$.

Hvilken Gyldighed tør vi da tillægge Begrebet Tilnærmelse?

2) Rækker med stigende Potenser.

Skulle Begreberne: „Uopnaaeligt“ og „Tilnærmelse“ bringes i logisk Forbindelse, da kunde man, ifølge „diversus respectus“ maaskee begynde med at tænke sig Sagen saaledes: Kategorien: „Tilnærmelse“ maa altid sees fra to Synspunkter: 1) det Punkt, hvorfra man gaaer ud, Begyndelsespunktet, og 2) det Punkt, der skal naaes, Maalet, Endepunktet.

Gives der overhovedet nogen Bevægelse fra et bestemt Udgangspunkt henimod et Maal, saa kan man, dersom Maalet er uendelig langt borte, jo i en Forstand gjerne indrømme, at enhver Tilnærmelse er som et Intet imod Maalets uendelige Fjernhed, og dog, naar man seer tilbage, betragte den fortsatte Fjernelse fra Udgangspunktet som en Tilnærmelse til Maalet. Her er altsaa i en Henseende, forsaavidt man nemlig seer fremad, ingen Tilnærmelse, men dog i en anden Henseende, naar man vel at mærke seer tilbage, en virkelig Tilnærmelse.

Dialektiken kunde nu vistnok i denne Sammenhæng meget let confundere „diversus respectus“, og afløse den

formelle Logik den Tilstaaelse, at den, ifølge egen Forflaring, altsaa dog kun seer Tilnærmelsen som — Bortfjernelse, kun seer fremad, forsaavidt den seer tilbage, og at just dette er en Modsigelse; men vi have stillet os for Mathematikens Forum, og tør ikke foregribe dens Kjendelse.

Forandringernes udtømmelige Mulighed, der ligger skjult i Functionsbegrebet, som i sin Grund, træder ved den intellectuelle Handling ud af denne Grund, og bliver saa, under givne Betingelser, udviklet i de uendelige Rækker.

Skal en Function af x indenfor Endelighedens Grændser udvikles i Række efter Potenser, falder det naturligt, at begynde med den høieste Potens; $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \dots A_{n-1} x + A_n = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) = 0$, en Række med faldende Potenser, er da et Paradigme.

Men, naar Opgaven er, at vise, hvorledes det Endelige i uendelig Tilnærmelse stræber mod det Uendelige, maa Paradigmet ændres, og Functionen udvikles efter stigende Potenser:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots A_n x^n \dots$$

Hvorledes nu en saadan Række kan fremstille den uendelige Tilnærmelse saavel til ∞ , som i sine enkelte Led, til 0, er allerede klart af den geometriske Progression.

$$\text{I Rækken: } a \frac{1}{1-x} = a + ax + ax^2 + \dots ax^{n-1} \dots$$

bliver $x^\infty = \infty$, dersom $x > 1$. Rækken vil da ikke blot kunne fortsættes igjennem et uendeligt Antal Led, men med hvert følgende Led stedse komme ∞ nærmere. For $x < 1$ er $x^\infty = 0$. Rækken vil altsaa ved at fortsættes gennem utallige Led ikke alene give en større og større Sum, men hvert følgende Led blive mindre og mindre, og altsaa nærme sig 0.

Mathematiken kan ikke, som den formelle Logik, slaae sig til Ro ved en Forflaring af „uendelig Tilnærmelse“ i

Ord; den bruger sit Tegnsprog, og articulerer Begrebet, idet den for enhver uendelig Række udfinder Relationen imellem de enkelte Led.

For at dette kan skee, maa Functionsbegrebet antage en bestemt Charakter: $f(x)$ f. Ex. $= a^x$. Man har da Rækken $a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots A_m x^m \dots$

For det mulige Tilfælde: $a^x = a^0$, er det let at bestemme Rækken $a^0 = A_0$; det Øvrige bortfalder. Men $a^0 = A_0 = 1$. Da nu $f(x) = a^x$ skal, ifølge Functionsbegrebet, gjælde for alle mulige Værdier af x , har man i denne Function første Coefficient $A_0 = 1$ een Gang for alle bestemt.

Cartesius's Methode*) og Newtons Binomialformel**) give derhos Mathematikeren Midler til, hvad de øvrige Led angaaer, at bringe det Foranderlige til at gaae op i det Uforanderlige, og, saa at sige, fange de uendelige Muligheder i Relationernes Net.

*) C. Ramus. Algb. T. S. 82. — De ubestemte Coefficienters Methode.

Er $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots$, saa maa A_0 være $= B_0$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$ o. f. v. Veriis. For $x = 0$ bliver $A_0 = B_0$ alene tilbage; ved at fradrage $A_0 = B_0$, faaer man $A_1 x + A_2 x^2 = B_1 x + B_2 x^2 \dots$, ved at dividere med x , $A_1 + A_2 x \dots = B_1 + B_2 x$, og, ved at sætte $x = 0$, $A_1 = B_1$ o. f. fr.

**) Binomialformlen. Fra den elementære Algebra kjender man: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$... o. f. v. Ram. Elmt. Algb. S. 35. I den høiere Mathematik (Ramus Algb. Funct. S. 85) fremstilles $(p + x)^n = p^n + \frac{n}{1} p^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} p^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{n-3} x^3 \dots$, en Række efter faldende Potenser af p og stigende Potenser af x , hvis Coefficienter dannes, som Analogien viser, paa en til Potens-
exponenterne svarende Maade.

Saaledes bliver da for det Første hver Coefficient kjendelig paa den tilsvarende Potens. Have, for at holde os til det givne Exempel, Potensfactorerne $x^m z^n$ i den ene Række Coefficienterne $A_m A_n$, i den anden $A_{m+n} \frac{(m+n)}{1} \frac{(m+n-1)}{2} \dots \frac{(m+1)}{n} *$), da har Mathematikeren sin Ligning: $A_{m+n} \frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \dots n} = A_m A_n **$), og er forvisset om, at den ikke skuffer. Har altsaa Mathematikeren nu i det Hele sikket sig Relationen imellem Potenserne og deres Coefficienter, saa benytter han

*) Man udvikler nemlig 1) to Rækker efter samme Lov: $a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m \dots$ og $a^z = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n$ og faaer 2), ved at multiplicere disse to Ligninger, to forskjellige, men overensstemmende Udviklinger: $a^x a^z = 1 + \dots + A_m A_n x^m z^n \dots$ og $a^{x+z} = 1 + A_1 (x+z) + A_2 (x+z)^2 + \dots + A_{m+n} (x+z)^{m+n} \dots$ Af det anførte Led $A_{m+n} (x+z)^{m+n}$ udvikles igjen 3) den uendelige Række: $A_{m+n} [x^{m+n} + \frac{m+n}{1} x^{m+n-1} z + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \cdot 2} x^{m+n-2} z^2 + \dots + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^m z^n \dots]$ 4) Det særskilte Led $A_{m+n} \frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \dots n} = A_m A_n$.

**) Bigtigheden af de ubestemte Coefficienters Methode vil man strax blandt Andet skjønne deraf, at den samme Størrelse jo kan, uden at forandre sin Værdi fremstille sig, ikke blot under mange, men uendelig mange Former. Ogsaa imellem de rene Størrelser foregaae, vel ikke intellectuelle Intriguer og Mystificationer, men dog saamange Omklædninger, Forklædninger og Maskeringer, at Den, der ikke gennemskuer Forvandlingerne, let bliver skuffet. Hvor let kan f. Ex. en Begynder ikke blændes af de mange Led i Formlen: $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+2)(n-n+1)(n-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+2)(n-n+1)}$ saa at han ikke strax seer det maskerede Nul.

igjen denne Relation til dermed at udfinde Relationen imellem Coefficienterne indbyrdes.

I den anførte Række bliver saaledes den hele Brimmet af mulige Coefficienter bragt i en bestemt Relation til en

eneste, nemlig A_1 , ved Formlen: $A_m = \frac{A_1^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$ *),

den sidste, eneste ubekjendte, A_1 , endvidere bragt i bestemt Relation til a ved Formlen: $a^{\frac{1}{A_1}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} +$

$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$, denne, beviistlig convergerende, Sum udregnet,

og det fundne Tal $e = 2,718281828459 \dots$ antaget som Grundtal i det naturlige, neperste, Logarithmesystem.

Ved Relationen imellem den exponentielle og den logarithmiske Function bliver Coefficienten A_1 omfider bestemt i

*) Sættes: $A_m A_n = A_{m+n} \frac{(m+n-1) \dots (m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$, og $n = 1$, faaes: $A_m A_1 = A_{m+1} \frac{m+1}{1}$, d. e. $A_m + 1 = \frac{A_m A_1}{m+1}$. Sætter

man dernæst $m = 1$, erhoides $A_1 + 1 = \frac{A_1 A_1}{1+1} = A_2 = \frac{A_1^2}{1 \cdot 2}$;

sættes $m = 2$, da faaer man $A_2 + 1 = \frac{A_2 A_1}{2+1} = A_3 = \frac{A_2 A_1}{3}$

$= \frac{\frac{A_1^2 A_1}{1 \cdot 2}}{3} = \frac{A_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots A_m = \frac{A_1^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$; heraf: $a^x = 1$

$= A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \dots = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A_1^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$+ \dots$ og heraf igjen, naar man sætter $x = \frac{1}{A_1}$; $a^{\frac{1}{A_1}} = 1 +$

$\frac{A_1}{1} \left(\frac{1}{A_1} \right) + \frac{A_1^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{A_1} \right)^2 + \frac{A_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{A_1} \right)^3 + \dots = 1 +$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = e$.

Formlen $A_1 = \frac{\log a}{\log e}$ *), en Relation, der naturligviis igjen fører ind i nye Relationer.

Iftedetfor en logist Betragtning af den uendelige Tilnærmelse i de uendelige Rækker udvikler Mathematiken altsaa Totaliteter af almeengyldige og dog eiendommelige, uendelige og dog bestemte Relationer.

Hvorledes bestemmes da Forholdet imellem Relationerne og det Uendelige?

3) Functionernes Systematik.

Uendelighedsproblemet er et omfattende Totalitetsproblem; skal et saadant Problem kunne løses, maa det under fortsat Udvikling selv medbringe Løsningens Betingelser; disse Betingelser maae nærmere undersøges.

At det Uendelige, for igjen at minde om det Dialektiske, har sin Grændse i det Endelige, vil da sige, at det har sin Bestemthed i det Endelige; at det Endelige med det Samme har sin Grændse i det Uendelige, maa altsaa betyde, at Endelighedsbestemmelserne ved deres Utallighed overskride enhver endelig Grændse.

I Talrelationen bliver Endeligt nu vistnok nærmest bestemt ved Endeligt; men med de uendelige Talrelationer gaaer Uendeligheden selv tilsidst op i det Endelige. Enheden af Relationerne og det Uendelige bliver paa dette Trin at opfatte i Begrebet: „indre Uendelighed“, men Begrebet: „indre Uendelighed“ falder igjen sammen med Functionsbegrebet; Uendelighedens Indhold kan altsaa først udfolde sig i de forskjelligartede Functioners systematiske Samvirken.

**) Er $a^{A_1} = e$, saa er $\frac{1}{A_1} \log a = \log e$, og $\log a = \log e A_1$;

altsaa: $A_1 = \frac{\log a}{\log e}$ (idet log betegner Logarithmen i et vilkaarligt System).

Til Belysning af Functionernes Systematik maa fremhæves a) at deres Udvikling kan føres tilbage til een Grundformel, b) at deres Vælsforhold og gjensidige Overgange vise hen til en fælleds Oprindelse, c) at den ene Function i fortløbende Række kan udvikles af den anden.

a) Functionernes Grundformel.

Vilde man forsøge paa at opregne de mulige Regne- maader, Regler og Formler, som forekomme i mathematisk Praxis; da vilde man snart faae et Indtryk af forvirrende, overvældende Mangfoldighed, af en grændseløs Endelighed, der ikke magter det Uendelige. Jo mere derimod det udvortes Mangfoldige tilbageføres til de første, almindelige Forudsætninger, desto mere hersker Begrebet, og desto overskueligere bliver det Hele.

Som Beviis paa Mathematikens systematiske Fremgangsmaade tjener da dette, at den ikke allene reducerer de utallige afledede Functioner til Grundfunctionernes Eenfoldhed, men endog henfører alle, elementære saavel som afledede, Functioners Udvikling til een Grundformel. Paa den Betingelse, at man istedetfor x sætter, naar det fordrer, t. Ex. $x + h$, er nemlig:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

en omfattende Grundformel.

Under den omfattende Grundformel er de enkelte Functioners Individualitet ligesom tilsløret; men det er kun det Endelige, som her opløses, for at begrundes i det Uendelige. Med Udviklingen kommer det Eiendommelige atter frem, og det Ueensartede viser sig. Paa forskjellige Betingelser bliver nemlig den fælleds Mulighed til et Forskjelligt, og hver udtrædende Function stiller nu sine Betingelser.

For $f(x) = a + x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ maa A_0 blive $= a$, $A_1 = 1$, $A_2, A_3 \dots = 0$.

For $f(x) = ax = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ maa A_0 blive $= 0$, $A_1 = a$, $A_2, A_3 \dots = 0$.

Før $f(x) = x^a = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \dots$ faaer ligeledes kun et enkelt Led Betydning, dersom x er eenleddet; er x toleddet, t. Ex. $= y + z$, gjengiver Rækken Binomialformlen.

Før $f(x) = a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \dots$ er det bestemte Udtryk allerede givet (S. 28).

Før $f(x) = \log x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \dots$ kan en Rækkeudvikling*) ikke finde Sted, dersom x er eenleddet. Da $\log 0 = \pm \infty$, saa vilde, naar x var 0, første Led A_0 allerede være $= \infty$, og tilintetgjøre Rækkens Betydning. Sætter man derimod $1+x$ istedetfor x , faaer man:

$$\log(1+x) = \log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)^{**}).$$

Tilføies her de trigonometriske Functioner, $\cos x$ og $\sin x$, og erindres, at $\cos(-x) = \cos x$, og $\sin(-x) = -\sin x$, ($\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 0$), saa vil det Eendommelige strax vise sig, at $\cos x$ kun kan indeholde lige, og $\sin x$ kun ulige Potenser af x . Man faaer da:***).

$$\cos x = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 \dots$$

$$\sin x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 \dots$$

*) Tages de brudne Exponenter med i Betragtning, indtræde igjen forskjellige Udbringer i a^x og $\log x$.

**) Svfr. Ramus. Algebr. og Funct. S. 87-88; nærmere Oplysning under b.

***) Anf. Sfr. S. 88-90.

$$1) \cos x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 \dots (\cos 0 = 1, \text{ altsaa: } A_0 = 1)$$

$$\cos(-x) = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + A_4 x^4 \dots \text{ ser, Minus, i lige, Plus).}$$

Men $\cos(-x) = \cos x$; skulde de 2 Rækker være lige, $+A_1 = -A_1$, $+A_3 = -A_3 \dots$ saa maae Coefficienterne med ulige Indices alle være 0.

Anvender man ved Fremstillingen af Rækken for $\sin x$ B istedet for A, altsaa $\sin x = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \dots$, faaer man, da $\sin 0 = 0$, og B_0 følgelig $= 0$, $\sin x = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 \dots$ (α), og $\sin(-x) = -B_1 x + B_2 x^2 - B_3 x^3 + B_4 x^4 \dots$ (β); men $\sin(-x) = -\sin x$ (Ramus. Trigonometri

Den Eiendommelighed, hvormed disse Functioner udtræde af Grundformlen, giver sig naturligtvis ogsaa tilkjende i Udviklingens Resultat:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} \dots$$

Naar een Grundlov saaledes sonder sig i forskjellige Udviklingslove, af hvilke enhver igjen kan betragtes som særskilt Grundlov, for nye Udviklingslove, enhver af disse igjen

§. 8.), og ifølge $(\alpha) = -B_1 x - B_2 x^2 - B_3 x^3 \dots$. For at Rækken (α) for $-\sin x$ kan stemme med (β) for $\sin(-x)$, maae $B_2, B_4 \dots$ være 0.

2) Af anførte Rækker forskaffer man sig α en Udvikling for $\cos x$, $\cos z$, hvori der forekommer et Led: $A_m A_n x^m z^n$, β en Udvikling for $\sin x \sin z$, hvori forekommer et Led $B_p B_q x^p z^q$, og γ) fra Trigonometrien (Ramus. Trig. §. 9.) de to Ligninger: $\cos z = \frac{1}{2} (\cos(x+z) + \cos(x-z))$ og $\sin x \cdot \sin z = \frac{1}{2} (\cos(x-z) - \cos(x+z))$ og faaer da af Rækkerne for Cosinus:

$$A_m A_n = A_m + n \frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}, \text{ og af Rækkerne for } \sin, \text{ sammenholdte med Ligningerne for } \cos, B_p B_q = -A_p + q \frac{(p+q)(p+q-1)\dots(p+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q}.$$

3) De angivne Relationer lede til bestemte Udtryk for Coefficientterne, nemlig i Rækken for Cosinus: $A_m = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{1.2\dots m}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$;

i Rækken for Sinus: $B_p = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{1.2\dots p}$, $B_1 = +1$. I Cosinus-

$$\text{rækken haes da } A_2 = -\frac{1}{2}, A_4 = \frac{(-1)^{\frac{4}{2}}}{1.2.3.4} = \frac{+1}{1.2.3.4}, A_6 = \frac{(-1)^{\frac{6}{2}}}{1.2.3.4.5.6} = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6}; \text{ i Sinus-Rækken: } B_1 = 1, B_3 = \frac{(-1)^{\frac{3+1}{2}}}{1.2.3} = \frac{-1}{1.2.3}, B_5 = \frac{(-1)^{\frac{5+1}{2}}}{1.2.3.4.5} = \frac{+1}{1.2.3.4.5} \dots$$

for nye o. s. v., sees i Sammenhængen det Systematiske, og i den systematiske Sammenhæng den Maade, paa hvilken de endelige Relationer blive Bestemmelser for det Uendelige. Her viser sig Forskjellen imellem System og Schema. Et Schema giver kun endelige Rubrikker, men en systematisk Udvikling gaaer frem af Sagens indre Uendelighed.

b) Functionernes Berelsforhold.

I et Schema gjælde nominelle Definitioner, men motiverede Begrebsovergange i et System.

Som exact Videnskab giver Mathematiken ikke blot exacte Definitioner, men viser tillige, hvorledes Begreberne danne sig, og hvorledes de virke. Det er ikke Definitionen paa en Logarithme, der lærer os, hvad en Logarithme er; vi lære det foreløbig, idet vi see den Sammenhæng, hvori Begrebet fremkommer; vi lære det tilgavns, naar vi see den logarithmiske Function i dens mangfoldige Overgange, i Consequenserne af dens alsidige Udvikling.

I et Schema hersker mekanisk Inddeling, men i et System organisk Veddeling.

Som exact Videnskab hævder Mathematiken exacte Inddelinger; man tænke paa de elementære Functioners Inddeling i enkelte og sammensatte, algebraiske og transcendente, o. dsl. Men de saaledes inddelte Functioner holdes ikke fast indenfor asmaalte Rubrikkers endelige Grændser. Man seer af Operationerne, at Grænsen overskrides, og dog just hævdes, idet den overskrides.

Dette gjælder t. Ex. om Grænsen mellem transcendente og algebraiske Ligninger. $a^x = b^y$ er transcendent; men igjennem $x \log a = y \log b$ skeer jo en Overgang til $y = \frac{x \log a}{\log b}$, som er algebraisk.

Det Samme gjælder om Grænsen mellem den exponentielle Function og den logarithmiske. I Rækken for den

exponentielle Function blev (II, 2) Coefficienten: A_1 , bestemt ved et logarithmisk Udtryk, nemlig $A_1 = \frac{\log a}{\log e}$, man erholder altsaa:

$$a^x = 1 + \frac{\log a}{\log e} x + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

Da nu Logarithmen til Grundtallet altid er 1, vælges det System, hvis Grundtal er $e = 2, 718281828459 \dots$, og idet Logarithmen i dette System betegnes ved 1, bliver

$$a^x = 1 + (l.a) x + (l.a)^2 \frac{x^2}{1.2} + (l.a)^3 \frac{x^3}{1.2.3} \dots$$

Man gaaer altsaa ikke alene indensfor Logarithmekategoriens Grændse over fra det ene System i det andet; men man anvender Logarithmekategorien for at klare sig Potenskategori: der spørges om Værdien af en exponentiel Function, og svares med Værdien af en logarithmisk; der spørges om Værdien af den logarithmiske Function, og svares med Værdien af den exponentielle.*)

Det Samme gælder om Grændsen imellem den exponentielle Function og de trigonometriske.

Sætter man i Ligningen: $a^x = 1 + (l.a)x + (l.a)^2 \frac{x^2}{1.2} + (l.a)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$ e istedetfor a, og erindrer at $l.e = 1$, erholder man:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

*) Den under a) anførte Ligning: $\log(1+x) = \log e \left(x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots \right)$ er saaledes udviklet: 1) $(1+x)^y = 1 + \frac{y}{1}x + \frac{y(y-1)}{1.2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}x^3 \dots$ 2) $(1+x)^y = 1 + \frac{\log(1+x)}{\log e}y + \log \left(\frac{(1+x)}{\log e} \right)^2 \frac{y^2}{1.2} \dots$ ved at ordne disse Rækker efter stigende Potenser af y, og derpaa sammenligne dem.

Sætter man i denne Ligning $x\sqrt{-1}$ istedetfor x , erholder man: $e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} \dots = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots$, thi Potenserne af $\sqrt{-1}$ danne en Periode af 4 Led: $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$ og $+1$, som gjentage sig i det Uendelige.

Multiplificerer man nu Ligningen $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$ med $\sqrt{-1}$, erholder man $\sin x\sqrt{-1} = x\sqrt{-1} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} \dots$ hvilken Værdi netop svarer til 2det og 4de Led o. s. v. i Rækken for $e^{x\sqrt{-1}}$, medens Værdien for $\cos x$, nemlig: $1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ svarer til 1ste, 3die og 5te Led, o. s. v.

Altsaa er i $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$, og, naar man istedet for $x\sqrt{-1}$ sætter $-x\sqrt{-1}$, i $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$, den exponentielle Function udtrykt ved den trigonometriske; hvorefter da endvidere følger, at den trigonometriske tillige lader sig udtrykke ved den logaritmiske. Er nemlig $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$, saa er jo ogsaa $x\sqrt{-1} = 1.(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^*$.

*) „De trigonometriske Linier ere som Functioner af Cirkelsbuen reductible til den exponentielle Function, og Cirkelsbuen som Function af de trigonometriske Linier reductibel til Logarithmen.“ Ramus. Algbr. Functi. S. 15.

Det systematiske Samkvem imellem den exponentielle Function og de trigonometriske er altsaa bragt istand ved Anvendelse af en imaginær Størrelse, $\sqrt{-1}$; men en imaginær Størrelse hører jo, ifølge Definitionen, til det Umulige. Ved det i sig Umulige er da en virkelig Reduction bleven mulig: hvorledes er nu dette at forstaae?

Vilde Nogen svare: $\sqrt{-1}$ er baade umulig og dog mulig; da vilde den formelle Logik maaskee tyde Svaret saaledes: $\sqrt{-1}$ er i een Henseende umulig, forsaavidt her nemlig kræves et Tal, som ophøiet til 2den Potens skulde give -1 , i en anden Henseende derimod mulig, idet man, ved f. Ex. at opløste $\sqrt{-1}$ til 2den Potens, jo faaer en reel Størrelse, -1 , ud. Dette kunde saa være et Exempel paa den Sætning: *diversus respectus tollit omnem contradictionem*.

Men med al Respect for *diversus respectus* er en saadan Modsigelsens Løsning dog kun formel, og det blot Formelle det Overfladiske. Med dette Overfladiske kan Videnskaben ikke slaae sig til No: Mathematiken skrider til Operationer; Philosophien følger efter, og seer paa det Dialektiske.

Dersom man med den logiske Sætning: *possibile est, quod non implicat contradictionem*, kunde, hvad Begreberne angaaer, holde sig til nominelle Definitioner, vilde man snart blive færdig med Adskillelsen af det Mulige og det Umulige*); men en grundig Adskillelse er betinget ved Systematik.

Mathematiken lærer os, naar vi følge dens systematiske Udvikling, at Meget er muligt, som ved første Blik synes umuligt, og, omvendt, Meget i Grunden umuligt, som en Uindviet let antager for muligt.

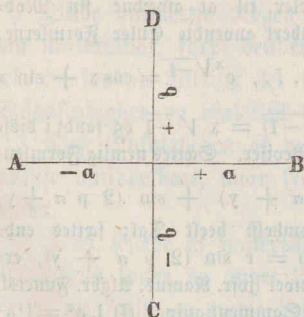
*) Paa denne Maade vilde en rund Tiirkant vel være umulig, men neppe et regulært Heptaeder.

Saa, saa dialektisk er Mulighedsgrændsen, endog paa det mathematisk Omraade, at den exacte Videnskab selv i mange Puncter endnu neppe formaaer at holde den fast. *)

*) For ikke at opholde os ved Spørgsmaal som: er det muligt, at finde en omfattende Lov for Bestemmelse af Primitallene? er det muligt, at finde en endelig Opløsning for den almindelige Ligning af nte Grad? er det absolut umuligt at bringe Cirkelns Quadratur under endeligt Udtryk, absolut umuligt, at π kan være periodisk? o. s. v. ville vi i denne Sammenhæng lidt nærmere udhæve Striden angaaende de imaginære Størrelser. Altsaa:

1) er $\sqrt{-1}$ en absolut Umulighed?

Da $(-a)$ frembringes af $(+a)$ ved at multiplicere denne Størrelse med (-1) ; saa kan man anstueliggjøre sig Betydningen af denne Multiplication ved Omdreining.



En Omdreining paa 90° betegnes da ved $+a\sqrt{-1}$; paa 180° ved $+a\sqrt{-1}\sqrt{-1} = a(-1) = -a$; paa 270° ved $a(-1)\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}$; paa 360° ved $-a\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -a(-1) = +a$. Men saa maa man rigtignot forbinde saa neensartede Begreber som Multiplication og Dreining. Har man, idet Coordinatssystemets Begyndelsespunkt er i Centrum, $\frac{x^2}{a^2} +$

$\frac{y^2}{b^2} = 1$ som Ligning for Ellipsen, saa kan man ved at sætte $b =$

$\sqrt{-1} b'$, og følgelig $b^2 = -b'^2$ erholde: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b'^2} =$

1, som er Hyperblens Ligning. Det umulige og desaaarsag imaginære $\sqrt{-1}$ bliver altsaa dog paa en Maade reelt, og desaaarsag muligt.

2) Ere Logarithmer af negative Størrelser mulige?

Ved flygtig Betragtning skulde det synes, som var her Intet iveien? Man har $\log(a^2) = 2 \log a$, og $\log(-a)^2 = \log(a^2)$; hvor nær ligger da ikke den Slutning, at $\log(-a)^2$ ogsaa maa være $= 2 \log(-a)$, og dog er Slutningen falsk. Man har,

At Grændserne hævdes, idet de overskrideres, viser for-
øvrigt, hvorledes Definitioner og Overgange, mekanisk Ind-
deling og uendelig Articulation betinge hinanden i et viden-
skabeligt System.

Forsaaaviddt de enkelte Functioner stilles som i Rubrikker
ved Siden af hinanden, og holdes imod hinanden, stilles
de realistisk: jo fastere den endelige Modsatning holdes, desto

naar a og b ere positive, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$; men da $\sqrt{-a}$ er
umulig, gjælder ovenstaaende Ligning iffe for negative Størrelser.
Man kan iffe sige $(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{-a} \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)^2} =$
 $\sqrt{a^2} = \pm a$, thi det er kun $\sqrt{-a}$, som ophøiet til 2den
Potens giver $-a$. I Striden mod Bernoulli indsaar Leibnitz
det Sande, men søvne Vidler til at afsæbne sin Mod-
stander; i Striden mod d'Alembert anvendte Euler Formlerne:

$$a^x = 1 + (1.a) \frac{x}{1} + (1.a)^2 \frac{x^2}{1.2} + \dots, e^x \sqrt{-1} = \cos x + \sin x$$

$\sqrt{-1}$, og $1(\cos x + \sin x \sqrt{-1}) = x \sqrt{-1}$ og fandt i disse
Formler Udgangspuncter for klare Beviser. Sættes nemlig Formlen:

$$e^{(2p\pi + y)\sqrt{-1}} = \cos(2p\pi + y) + \sin(2p\pi + y)$$

$\sqrt{-1}$, idet $p =$ et hvilket som helst heelt Tal; sættes end-
videre $a = r \cos(2p\pi + y)$, $b = r \sin(2p\pi + y)$, er-

holder man ad Reductionernes Omvei (jvfr. Ramus. Algbr. Functsl.
S. 92-94) følgende Formler til Sammenligning: (I) $1.a^2 = 1^1 a^2$

$+ 2p\pi \sqrt{-1}$; (II) $1.a^2 = 2 1^1 a + 2p\pi \sqrt{-1}$; (III)
 $2 1.a = 2 1^1 a + 4 p^1 \pi \sqrt{-1}$ (idet Ligningen $1.a = 1^1 a$
 $+ 2 p^1 \pi \sqrt{-1}$ multipliceres med 2); (IV) $2 1(-a) = 2 1^1(a)$
 $+ 2(2p^{11} + 1)\pi \sqrt{-1}$ (da man har $1(-a) = 1^1 a +$

$(2p^{11} + 1)\pi \sqrt{-1}$). Sammenlignes IV med III, saa bliver 2
 $1(-a) = 2 1(a)$, naar $4 p^1 = 2(2p^{11} + 1)$, eller, naar $2 p^1 =$
 $2 p^{11} + 1$; men dette er umuligt, da et lige Tal aldrig kan blive
liigt et ulige. Følge de øvrige Sammenligninger faaer man ud,
at de Ved, $1(-a)$ have fælleds med $1.a$ i den uendelige Række,
tilhøre ere imaginære. En reel Logarithme af $-a$ er altsaa dog
en Umulighed.

stærkere er Realismen. Den mathematisk Praktik betvinger imidlertid selv denne Realisme, idet den lader enhver af de adskilte Functioner optage de øvrige i sin Selvudvikling. Hver Function vender altsaa gennem de øvrige tilbage i sig selv, har altsaa de øvrige som Momenter i sin Begrebsbestemmelse og sit Indhold; dette er det Idealistiske. For Realisten ere Relationerne endelige, for Idealisten ere de uendelige: i en gennemført Systematik blive de endelige Relationer begrundede i det Uendelige.

c) Taylors Række.

Den systematiske Sammenhæng af endelige Led, der articulerer den indre Uendelighed, er i alle Puncter umiddelbar og dog uendelig formidlet.

Vilde imidlertid Nogen sige: „vor Erkjendelse er altsaa kun umiddelbar, fordi den er saa uendelig middelbar“, skulde vel en saadan Yttring let blive opfattet som Bevis paa Spidsfindighed og dialektisk Ordspil.

Dog Gyldigheden af den opstillede Sætning vil netop indlyse umiddelbart, naar Forstaaelsen først er bleven formidlet.

I en Kæde af materielle Led gjaelder det ganske vist, at, medens første og andet Led ere i umiddelbar Sammenhæng, ere første og tredje Led kun i en middelbar, første og fjerde i en endnu mere middelbar Forbindelse. Men med en saadan Udstykning af Umiddelbart og Middelbart er Begrebet: »indre Uendelighed« uforeneligt.

I den intellectuelle Sammenhæng taler man vel ogsaa om Overleds Forbindelse ved Mellemled; men, jo dybere Indsigten gaaer, desto mere opløses de endelige Mellemled som Begrebsbestemmelser i Overledenes inderlige Eenhed.

For ikke at blændes af Middelbarheden i de indtrædende Mellemled, maa man see paa Hsvirkningen, og klare sig Forskjellen imellem det Gjennemsigtige og det Uigjennemsigtige.

Hvad den sandfelige Lysvirkning angaaer, er det jo Mellemleddenes Dunkelhed, Midlernes Endelighed, som lader os føle det Middeibare.

Den, der vil kjende Skikkelser, der bevæge sig bag en Skillemuur, maa ad en Omvei skaffe sig Underretning, og mærker sig derved det Middeibare. Er det nu ikke en Muur, men en gjennemfsinnende Rude, der adskiller Betsueren fra Gjenstandene, begynder det Middeibare allerede at forsvinde: han seer jo umiddelbart Skyggerne bevæge sig, skjøndt Ruden fornemmes som fjernende Mellemled. Er Ruden af reent gjennemfsigtigt Glas, generer Mellemledet slet ikke; væbnes dertil endnu Diet med Riffertens Glar, saa have vi her et Exempel paa Mellemled, som istedetfor at fjerne de tilsvarende Yderled, Betsueren og Gjenstanden, tvertimod bringe dem hinanden nærmere, istedetfor at binde dem ved det Middeibare, endog lader dem mødes i forhøiet Umiddelbarhed.

Er den paagjældende Forudsætning indlysende, da er ogsaa dens nærmeste Consequens indlysende. Har man først indseet, hvad det vil sige: $A_m A_n = A_{m+n} \frac{(m+n)(m+n-1) \dots (m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$, da er det ogsaa umiddelbart indlysende, at $A_m A_1$ maa være, for $n = 1$, $= A_{m+1} \frac{m+1}{1}$; er Ligningen $A_m A_1 = A_{m+1} \frac{m+1}{1}$ umiddelbart indlysende, da er ogsaa Ligningen: $A_{m+1} = \frac{A_m A_1}{m+1}$ umiddelbart indlysende.

Men saaledes forholder det sig jo med alle Overgange i den høiere som i den lavere Mathematik. Hver Sætning maa i sin særegne Sammenhæng indlyse umiddelbart, og dog er i denne særegne Sammenhæng netop det Middeibare. Jo mere Sammenhængen klares, jo mere gjennemfsigtige Mellemleddene blive, desto mere vil derfor ogsaa det Middeibare opgaae i høiere Umiddelbarhed.

Det er for den mathematisk Dannede ligesaa let at gennemløbe Beviset for $A_m A_n = A_{m+n} \frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$

i ovenanførte Sammenhæng, som for Begynderen at forestaae den Slutning: $A > B$, $B > C$, altsaa $A > C$.

Betragte vi Rigningen:

$f(x+h) = A_0 + A_1(x+h) + A_2(x+h)^2 + A_3(x+h)^3 \dots$
som en uendelig Række af endelige Led, da lader det sig bevise, at der i en saadan Række er Mulighed til uendelig Formidling af Leddenes Sammenhæng. Methoden, Formidlingens Vej, er paa een Gang Omvei og Gjenvei.

Da $f(x+h)$ endnu ikke er nærmere bestemt, kan man for det Første stille den Betingelse, at de forøvrigt ubestemte Coefficienter, $A_0, A_1, A_2 \dots$ skulde være Functioner, nemlig forskjellige Functioner af x , ikke af h , og, for at minde om Betingelsens Opfyldelse, skrive Rækken saaledes:

$$f(x+h) = f(x) + f'_1(x)h + f''_2(x)h^2 + f'''_3(x)h^3 + \dots$$

$$f^{(m)}_m(x)h^m + \dots = X_0 + X_1h + X_2h^2 + X_3h^3 \dots + X_mh^m \dots$$

For at sikre os en alsidig systematisk Sammenhæng, stille vi for det Andet den Betingelse, at den uendelige Række udvikles saaledes, at dens Led igjen kunne udvikles i uendelige Rækker.

For at denne Betingelse kan opfyldes, anbringe vi for det Tredie endnu foruden h en Tilvæxt k , og forskaffe os derved en dobbelt Udvikling, idet k paa den ene Side lægges til h , paa den anden Side til x .

Endelig maa for det Fjerde den Betingelse endnu tilføjes, at Functionen vælges saaledes, at man udtrykkelig faaer: $f(x+h+k) = f(x+k+h)$.

Disse ere altsaa vore nærmeste Forudsætninger; vi skulde nu prøve disse Forudsætningers Consequenser.

I Rækken (I):

$$f(x+h+k) = X_0 + X_1(h+k) + X_2(h+k)^2 + \dots$$

$$X_{m+n}(h+k)^{m+n} \dots \text{ kan af det sidst anførte Led udvikles en}$$

Kjender man altsaa den Maade, hvorpaa X_1 fremkommer af X_0 , saa kjender man med det Samme den Maade, hvorpaa hvert efterfølgende Led fremkommer af sit foregaaende. Er Relationen mellem første og andet Led indlysende, bliver med det Samme Relationen mellem første og tredje, første og fjerde, første og tusinde Led indlysende. Gjenveien betinges deraf, at Middelbarheden hæves til høiere Umiddelbarhed — i Indsigtens Dybde.

Er nu Coefficienterne, paa de angivne Betingelser, bestemte som Functioner af x , kan Rækken:

$$f(x+h) = f(x) + f'_1(x)h + f''_2(x)h^2 + f'''_3(x)h^3 + \dots + f^{(m)}_m(x)h^m \dots \text{ skrives:}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \dots + f^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.3\dots m} \dots$$

Denne saakaldte Taylorske Række kan, naar man, efter at have frembragt $f'(x)$, $f''(x)$... af $f(x)$, sætter $x=0$, og $h=x$, igjen omformes til Maclaurins Række:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + \dots + f^{(m)}(0)\frac{x^m}{1.2.3\dots m} \dots$$

Fastholde vi altsaa Identiteten af Omvei og Gjenvei, da viser nu et Tilbageblik tillige, at Methodens uendelige Formidling paa een Gang skylbes den nødvendige Sæbebevægelse og den frie Tankebevægelse.

$$\text{Vi have Formlen: } a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} \dots$$

det er udtryffeligt vor Opgave, at finde A_1 ; men det bestemte Udtryk for A_1 følger ingenlunde af Formlen paa samme Maade, som af $A > B$, $B > C$ følger $A > C$.

Opgavens Løsning er nødvendigviis betinget af den givne Sammenhæng, men det er dog Tanken, der stiller sig Opgaven, og udfinder Veien.

At sætte $x = \frac{1}{A_1}$ seer ved første Blik ud som et findrigt Raafund, thi det er en Udvei, Friheden har fundet; men, nøiere overveiet, er Udveien forestreden. Frihedens Valg er grundet i Sagens Nødvendighed.

Vi have Formlerne: $a^x = 1 + (1.a)x + (1.a)^2 \frac{x^2}{1.2} + (1.a)^3 \frac{x^3}{1.2.3} \dots$ og $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \dots$ Opgaven er at finde en systematisk Sammenhæng mellem den exponentielle Function og de trigonometriske. Det nødvendige Mellemled ligger i Sagen; men der hører en Euler til for at opbæge Mellemledet.

Vi have i Formlen:

$f(x+h) = A_0 + A_1(x+h) + A_2(x+h)^2 + A_3(x+h)^3 \dots$ Mulighed til utallige Rækkeudviklinger. De Betingelser, der stilles, de Retninger, der følges, den hele Methode er her ligesaa lidt en umiddelbar Følge af Nødvendigheden som et tilfældigt Product af Vilkaarligheden.

Det er Sagen, der hder Betingelserne, men den frie Tænkning, der vælger Betingelserne; det er Sagen, der afgiver Forudsætningerne, men den frie Tænkning, der ordner Forudsætningerne; det er Sagen, der leverer Midlerne, men den frie Tænkning, der fastsætter Maalet. Maalet er i denne Sammenhæng en Analyse af det Uendelige.

III.

Det Uendeliges Analyse.

I Tilnærmelsen til et Uopnaaeligt fandt Uendelighedsproblemet først sit beskuelige Udtryk; de endelige Relationers

indre Uendelighed viste os dernæst Veien til Problemets Løsning.

At en saadan Løsning ikke alene vedkommer Mathe-
matiken, men i høieste Grad Philosophien, kan allerede sees
af den Modsigelse, hvori Knuden er knyttet. Modsigelsen
er, at det Uendelige er i uopnaaelig Fjernhed (Asymptoten),
fordi det allevegne er det Endelige saa uendelig nær (trigo-
nometriske Functioner).

Følge vi, som hidtil, det mathematiske Spor, bliver
den uophørlige Tilnærmelse nærmere at bestemme ved Func-
tionsgrændsen, Limiten*), den Grændse, hvortil en Func-
tion af x convergerer, idet x enten vokser eller aftager i det
Uendelige. Hvad det Uendeliges, saa at sige, Allestedsnær-
værelse i det Endelige angaaer, henvises vi dernæst til Dif-
ferentialet, den Uendelighedsforskjel, der opkommer imellem
 $f(x)$ og $f(x+h)$, idet h betragtes som uendelig lille Til-
væxt til x ; endelig til Integralet, det Udtryk, som viser,
hvorledes man igjennem det Uendeliges Omveje finder Gjen-
veien til det Endelige.

1) Functionsgrændsen.

I Bgningen: $\lim f(x) = f(\infty) = c$
er c den Værdi, den Grændse, hvortil $f(x)$ mere og mere
nærmer sig, idet x bliver større og større, en Grændse, som
dog først opnaaes, idet x bliver $= \infty$, altsaa ved uendelig
Tilnærmelse.

$$\text{Eksempel: } f(x) = \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}$$

Saa længe x kun er en endelig Størrelse, kan intet af
Ledene bortkastes; imidlertid kan man dog ved at dividere
med x^n omforme den hele Quotient uden at forandre dens
Værdi. Altsaa:

*) Ramus. Algbr. Funct. S. 78—79.

$$f(x) = \frac{\frac{a}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \dots + a_n}{\frac{b}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_2}{x^{n-2}} + \dots + b_n}$$

Omformningen viser, at de Led i Tæller og Nævner, som ere dividerede med x , faae mindre og mindre Værdi, jo mere x vøges. Sættes nu $x = \infty$, erholdes:

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \frac{\frac{a}{\infty^n} + \frac{a_1}{\infty^{n-1}} + \frac{a_2}{\infty^{n-2}} + \dots + a_n}{\frac{b}{\infty^n} + \frac{b_1}{\infty^{n-1}} + \frac{b_2}{\infty^{n-2}} + \dots + b_n} \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + \dots + a_n}{0 + 0 + 0 + \dots + b_n} = \frac{a_n}{b_n} = c \end{aligned}$$

3 Ligningen:

$\lim f(x) = f(0) = c^1$ betegner c^1 den Værdi, den Grændse, hvortil Functionen nærmer sig, idet x bliver mindre, men som kun naaes i uendelig Tilnærmelse, forsaavidt den først naaes, naar $x = 0$.

Exempel.

Alf $f(x) = \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}$ sees, at alle de med x multiplicerede Led maae faae en desto mindre Værdi, jo mindre x bliver. Bliver x tilsidst $= 0$, faaes:

$$f(0) = \frac{a + a_1 0 + a_2 0^2 + \dots + a_n 0^n}{b + b_1 0 + b_2 0^2 + \dots + b_n 0^n} = \frac{a}{b} = c'.$$

Men, kunde man indvende, det er jo saa langt fra, at man endnu seer nogen Forskjel imellem ∞^n og ∞^1 imellem 0^n og 0^1 at det endogsaa synes, som om 0 og ∞ , selv naar de indføres ad Tilnærmelsens Wei, dog alligevel vedblive at udslette al Forskjel imellem de endelige, bestemte Størrelser.

For at fatte den Relativitet, som Tilnærmelsen indfører i det Uendelige, maae vi betragte de uendelige Størrelser, 0 og ∞ , deels i Forhold til de endelige, deels i Forhold til hinanden indbyrdes.

$a > b$; men $a \cdot \infty = b \cdot \infty$, $a \cdot 0 = b \cdot 0$.

$$\text{Lim}(x) = \infty; \text{Lim} \left(\frac{1}{x} \right) = \text{Lim} \frac{1000}{x} = 0.$$

$$\text{lim}(x) = 0; \text{lim} \frac{1}{x} = \text{lim} \frac{1000}{x} = \infty.$$

Altsaa vil enhver endelig Størrelse i Sammenligning med det uendelig Store være forsvindende; og ligesaa vil det uendelig Lille være forsvindende i Sammenligning med enhver endelig Størrelse. Forsaavidt Endelighedsgrænsen er forsvunden, hævde 0 og ∞ endnu deres Rang med det Uendelige; men forsaavidt det Forsvundne viser tilbage til en Forsvinden, og denne Forsvinden til Tilnærmelsen, stige 0 og ∞ ned fra Uendelighedens absolute Høide, og indgaae i Beregning med endelige Størrelser.

Vi kunne tydeliggjøre Sagen saaledes. I Formlen $\frac{x}{x} = 1$ kan x gjerne forandre sig, blive større og større, mindre og mindre, uden at den paagjældende Quotient forandrer sig. $\text{Lim} \frac{x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ er altsaa ikke længere et ubestemt Udtryk, men ganske bestemt $= 1$; ligesaa bestemt er $\text{lim} \frac{x}{x} = \frac{0}{0} = 1$. Hvad der gjælder om Quotienten

$\frac{x}{x}$, gjælder ogsaa om $\frac{x^2}{x}$, $\frac{x^3}{x}$, $\frac{x^n}{x}$ o. s. v. Altsaa: da $\frac{x^2}{x} = x$, er $\text{Lim} \frac{x^2}{x} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$, og $\text{lim} \frac{x^2}{x} = \frac{0^2}{0} = 0$.

Da $\frac{x^n}{x} = x^{n-1}$, saa er $\text{Lim} \frac{x^n}{x} = \frac{\infty^n}{\infty} = \infty^{n-1}$, og $\text{lim} \frac{x^n}{x} = \frac{0^n}{0} = 0^{n-1}$.

For at see, hvorledes den Modsigelse, der ligger i Begrebet: uendelig Størrelse, opløses i den mathematiske Fremstilling, kunne vi for et Dieblik lade den uendelige Tilnærmelse standse for en endelig Grænsfe. Hvor denne

Grændse sættes, er i Begrebet ligegyldigt, da den kun sættes, for ydelstelig at overskrides.

Størrelsen 1000,000 forestiller for et Dieblif ∞ , Quo-
tienten $\frac{1}{1000,000}$ vil da nødvendigvis forestille 0.

I Overensstemmelse med ovenstaaende Formler ville
vi altfaa erholde:

$$\frac{1000,000}{1000,000} = \frac{\infty}{\infty} = 1; \frac{\frac{1}{1000,000}}{\frac{1}{1000,000}} = \frac{0}{0} = 1.$$

$$\frac{(1000,000)^2}{1000,000} = \frac{\infty^2}{\infty} = 1000,000 = \infty; \frac{\left(\frac{1}{1000,000}\right)^2}{\frac{1}{1000,000}} = \frac{0^2}{0} = \frac{1}{1000,000} = 0.$$

$$\frac{(1000,000)^3}{1000,000} = \frac{\infty^3}{\infty} = 1000,000^2 = \infty^2; \frac{\left(\frac{1}{1000,000}\right)^3}{\frac{1}{1000,000}} = \frac{0^3}{0} = \left(\frac{1}{1000,000}\right)^2 = 0^2$$

Den Indvending, at 1000,000 er uendelig langt fra ∞ , og $\frac{1}{1000,000}$ folgelig ligesaa langt fra 0, betyder Intet; da Endelighedsgrændsen kun er sat, for at overskrides, vil man ikke blot kunne lade 1000,000^{1000,000} istedetfor 1000,000 forestille ∞ , men, hvad her er det Afgjørende, tillige indsee, at Forholdsleddene kunne forandres i det Uendelige, uden at det bestemte Forhold derved i mindste Maade forandres.

Det er saa langt fra, at 0 og ∞ udslette al Størrelsesforskjel, at de omvendt give den endelige Forskjel en uendelig Betydning. Er her imellem x^2 og x en bestemt endelig Forskjel, fordi x er endelig, saa er her nu tillige imellem

∞^2 og ∞ en bestemt Uendelighedsforskjel, og ligesaa imellem 0^2 og 0 .

Istedetfor at sprænge det Endelige, og med det Absolutes tilintetgjørende Overmagt, saa at sige, knuse det Relative, ere 0 og ∞ snarere, for at bruge et billedligt Udtryk, som gode Guder nedstegne i Endeligheden, at forhøje det Relative og bevare det i alle Forandringer Uforanderlige.

Det Uendelige bliver endeligt, at det Endelige kan blive uendeligt. 0 og ∞ ere ikke længere absolute; her er ikke mere nogen absolut Forskjel imellem 0 , 1 , ∞ . I Sammenligning med 0 er $1 = \infty$, sammenlignet med ∞ er $1 = 0$. I Forhold til ∞^2 er $\infty = 0$; i Forhold til 0^2 er $0 = \infty$.

Den samme Lov, der opretholder et bestemt Forhold af endelige Led, vedbliver endnu, efter at Ledenes Endelighed er forsvunden, være sig i 0 eller i ∞ , at opretholde det samme Forhold; men naar det er beviist, at Forholdet for det Uendelige bliver det samme, som for det Endelige, kan det Uopnaaelige siges at være opnaaet.

Den Dialektik, at det Uendelige er som det Endelige, og det Uopnaaelige i hvert Nu opnaaeligt, fyldestgjør Maathematikken paa mangfoldige Maader ved sine Operationer med de uendelige Rækker af Formlen: $f(x+h)$.

Har man, for at vælge et bestemt Exempel, en Function af een Variabel $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, som for en speciel Værdie, $x = a$, antager Formen $\frac{0}{0}$, idet $\varphi(a) = 0$ og $\psi(a) = 0$; da kan den sande Værdi af et saadant Udtryk bestemmes ved at søge Udviklingerne af $\varphi(a+h)$ og $\psi(a+h)$ efter stigende Potenser af h ,

$$\varphi(a+h) = A_1 h^{\alpha_1} + A_2 h^{\alpha_2} + A_3 h^{\alpha_3} + \dots$$

$$\psi(a+h) = B_1 h^{\beta_1} + B_2 h^{\beta_2} + B_3 h^{\beta_3} + \dots$$

hvor α og β ere positive, efterdi $h = 0$ skal reducere begge Udviklingerne til 0 . Man har da:

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = h^{\alpha_1-\beta_1} \frac{A_1 + A_2 h^{\alpha_2-\alpha_1} + A_3 h^{\alpha_3-\alpha_1} + \dots}{B_1 + B_2 h^{\beta_2-\beta_1} + B_3 h^{\beta_3-\beta_1} + \dots}$$

Ved at sætte $h=0$, faaer man:

$$f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = 0^{\alpha_1-\beta_1} \frac{A_1}{B_1} (*)$$

Tre Tilfælde ere nu mulige: I) $\alpha_1 > \beta_1$; $\alpha_1 - \beta_1 = +n^1$.
 II) $\alpha_1 < \beta_1$; $\alpha_1 - \beta_1 = -n^1$. III) $\alpha_1 = \beta_1$; $\alpha_1 - \beta_1 = 0$.

$$\text{Altsaa: I) } f(a) = 0^{n^1} \cdot \frac{A_1}{B_1} = \frac{0^{n^1} A_1}{B_1} = \frac{0}{B_1} = 0.$$

$$\text{II) } f(a) = 0^{-n^1} \cdot \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{0^{n^1}} \cdot \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_1}{0} = \infty.$$

$$\text{III) } f(a) = 0^0 \cdot \frac{A_1}{B_1} = 1 \cdot \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_1}{B_1}$$

Uf Størrelsen h sees her, hvad det vil sige, at det Endelige kan være som 0, og 0 som et Endeligt.

Ved uendelig Tilnærmelse sættes $h^{\alpha_1-\beta_1} = 0^{\alpha_1-\beta_1}$, thi dersom 0 var en absolut Negation, vilde Udtrykket: $0^{\alpha_1-\beta_1}$, jo være aldeles meningsløst. Foraaavdt her kun er en Tilnærmelse til 0, ikke det absolute 0, er det Uendelige endnu, som før, det ved Tilnærmelsen Uopnaaelige.

Men den uendelige Tilnærmelse kan dog heller ikke forstaaes saaledes, at h beholder en endelig, om end kun høist ubetydelig Værdi, og derfor med en vis Omtrentlighed og ligesom paa Slump sættes $= 0$. Her er i Ligningen: $h^{\alpha_1-\beta_1} = 0^{\alpha_1-\beta_1}$ ikke fjerneste Anstrøg af det blot Omtrentlige, ikke mindste Spor af det Usiagtige. Ligningen $h^{\alpha_1-\beta_1} = 0^{\alpha_1-\beta_1}$ er i Begrebet exact, som Ligningen: $A = A$.

Men er Ligningen exact, saa er det Uendelige jo i Functionsgrænsen gaaet sammen med det Endelige, og det Uopnaaelige altsaa dog opnaaet.

2) Differentiallet.

Foraaavdt her er Tale om Tilnærmelse, ligger det Uendelige bestandig udenfor det Endelige, og er desaaarsag

*) Ramus. Differential- og Integralregning 1814. S. 12—13.

det Uopnaaelige. Til Opnaaelse af det Uopnaaelige maa her da fra dette Standpunkt gøres et Spring; men, for at der dog heller ikke skal springes For meget over, maa Springet saa igjen være tilstrækkelig forberedt ved Tilnærmelse.

Denne Synsmaade har sin Betydning ved endelige Beregninger. Hvormange Decimaler man f. Ex. skal tage med af Tallet π , berøer paa den Nøiagtighed, hvormed Beregningen udføres; man kan i visse Tilfælde nøies med 5 Decimaler, man kan jo ogsaa gaae til 10, til 50, til 100 o. fl. Men i alt Sligt hersker Omtrentligheden: en endelig Accorderen om Spring og Tilnærmelse er desaaarsag vildeledende, naar det gjælder om Indsigt i det Uendelige.

Det er da ogsaa i Mathematiken let at paavise, hvorledes det Uendelige kun adskiller sig fra det Endelige, som ved et Spring, forsaavidt det selv springer ud af det Endelige.

Alf $a = a$ følger uimodsigelig $a - a = 0$, og omvendt følger af $a - a = 0$ uimodsigelig $a = a$. Lyde vi disse Pigninger i logiske Domme, sees Forskjellen mellem det Endelige og det Uendelige som en Forskel imellem det Positive og det Negative, imellem Det, som forestilles, og Det, som tænkes.

Opfattet som positiv Dom, udsiger $a = a$, at det Endelige er, hvad det er, og forholder sig til sig selv umiddelbart, uden al Negation; opfattet som negativ Dom, udsiger $a - a = 0$, at det Endelige, for at kunne udelukke Negationen og forholde sig til sig selv, maa sikkre sig Forholdet ved Negationen og altsaa dog optage Negationen i Forholdet: a er en Forestilling, 0 et Begreb.

I Quotienten $\frac{1}{a - a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots$ bliver Uendeligheden forestillet som en sig fortsættende Endelighed, en endeløs Endelighed, et Endeligt, der aldrig faaer Ende; i $\frac{1}{a - a} = \frac{1}{0} = \infty$ seer Tanken derimod det

Uendelige som et i Quotienten udtalt Begreb, en indre Forholdsbestemmelse, for hvilken de endelige Led kun ere Momenter.

I Ligningen $2 = 2$, er et Endeligt forestillet uden Hensyn til det Uendelige; i Ligningen: $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} +$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$ er et Uendeligt forestillet ved Hjælp

af det Endelige; i Quotienten: $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$+ \dots = 2$ er Identiteten af det Endelige og det Uendelige at see som i et Begreb.

For at udelukke det Dmtrænlige og fastholde Begrebet, har Mathematiken da ogsaa med stærket Opmærksomhed udhævet Mærket paa uendelige Rækker Convergens*).

Forskjellen imellem divergente og convergente Rækker er tilligemed Forskjellen imellem uendelige Størrelser af lavere og høiere Orden, 0^2 forsvindende mod 0, ∞ forsvindende mod ∞^2 , begrundet i „Functionsgrændsen“, og denne Grænsbestemmelse desaaarsag en ufravigelig Forudsætning for Bestemmelsen af Differentiallet.

At Differentiallet netop maa bestemmes ved en Functionsgrænse, hvori det Endelige enes med det Uendelige

*) „I enhver convergent Række“ ($s_n = u_0 + u_1 + u_2 \dots + u_n$) „er $\lim u_n = 0$, men dette er alene en nødvendig, ikke en tilstrækkelig Betingelse for Convergens, thi et uendeligt Antal af positive Led kan give en $\text{Sum} = \infty$. Derimod, naar r_n betyder Summen af alle de efter u_n følgende Led, $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3} \dots$ i det Uendelige, hvilken kaldes Resten af Rækken, saa vil $\lim r_n = 0$ udtrykke baade en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for Rækkens Convergens, thi man kan da steds gøre n saa stor, at r_n er mindre end en hvilken som helst opgiven Størrelse, hvorved s_n bliver bragt ligesaa nær som man vil til en vis Grænse.“
Ramus. Algebr. F. S. 79–80.

som med 0, altsaa: som med sin egen Negation, lader sig, ifølge Mathematikens Anvisning, fremstille saaledes: er $f(x) = y$, saa er $f(x + h) = y + k$; er t. Ex. $f(x) = x^2 = y$, saa er $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 = y + k$. Da nu $x^2 = y$, saa bliver k jo ikke $= h$, men $= 2xh + h^2$.

Er $h = 0$, er her slet Intet af det Endelige, ingen Tilvæxt for x ; saa er $f(x + 0) = f(x)$, saa er ogsaa $k = 0$; her er ingen Forskjel, altsaa intet Differential. Er h endelig, saa er Forskjellen mellem $f(x + h)$ og $f(x)$ ogsaa endelig; her er da en Differens, en endelig Størrelse k , men Intet af det Uendelige, intet Differential.

a) Functionsgrænsen og Differentialcoefficienten.

Som uendelig lille Tilvæxt til x , maa h være baade Noget og Intet, dx , Differentialet af x ; som uendelig lille Tilvæxt til y , maa k ligeledes være baade Noget og Intet, dy , Differentialet af y .

I Forhold til en hvilkensomhelst endelig Størrelse ere dx og dy begge $= 0$; men til hinanden indbyrdes ere de desuagtet i et ganske bestemt Forhold: $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ligesaa

bestemt, som f. Ex. $\frac{y}{x}$ eller som $\frac{1}{2}$ eller som $\frac{2}{3}$

Her viser sig den indre Sammenhæng imellem Functionsgrænsen og Differentialquotienten, eller, som den ogsaa kaldes, Differentialcoefficienten, en Sammenhæng, der articuleres i Anvendelsen af Taylors Række.

Alf $f(x + h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1.2} + f'''(x) \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$ erholdes: $f(x + h) - f(x) = f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1.2} + f'''(x) \frac{h^3}{1.2.3} \dots$, og, ved at dividere med h ,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + f''(x) \frac{h}{1 \cdot 2} + f'''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Saa længe h er en endelig Størrelse, kan intet Led af den uendelige Række bortfalde, uden at en Unøjagtighed viser sig; sættes h derimod $= 0$, bortfalde alle Led med Undtagelse af det første, $f'(x)$. Da nu, som vi have seet, h ikke umiddelbart kan sættes $= 0$, medmindre man vil have $f(x+0) = f(x)$, og derved tilintetgjøre dx ; saa sættes, i Kraft af den Lov, der gjælder baade for Endeligt og Uendeligt, $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim \frac{y+k-y}{h} = \lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, eller første Differentialcoefficient af $f(x)$.

Opfattet som Functionsgrænse, $\lim f(h) = f(0)$, er $f'(x)$ som enestaaende at see under Synspunktet af et Uopnaaeligt; opfattet som Differentialquotient betyder $f'(x)$, at det Uopnaaelige dog alligevel er opnaaet, idet Quotienten $\frac{dy}{dx}$ er en nøjagtig bestemt Function.

See vi tilbage paa $f(x) = x^2 = y$, $f(x+h) = (x+h)^2 = y+k$, saa er, da $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$, $\lim \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 2x$.

b) Differentiation *).

Er $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, og altsaa $dy = f'(x) dx$, saa er $f'(x+h) = \frac{dy}{dx} + k'$, altsaa: $\lim \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim \frac{\frac{dy}{dx} + k' - \frac{dy}{dx}}{h} = \lim \frac{k'}{h} = f''(x)$; men $k' = d \cdot \frac{dy}{dx}$,

*) Om Principerne for Differentiation af explicite Functioner jvfr. Ramus. Algbr. I. S. 99-108.

altsaa er $\lim \frac{k'}{h} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$, hvilket skrives $\frac{d^2y}{dx^2}$, og $d^2y = f''(x) dx^2$; paa tilsvarende Maade udvikles tredie Differen-

tialcoefficient: $\frac{d}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$, og $d^3y = f'''(x) dx^3$; fjerde Differentialcoefficient $\frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x)$; og $d^4y =$

$f^{(4)}(x) dx^4$; nte Differentialcoefficient: $\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$, og

$d^ny = f^{(n)}(x) dx^n$. Den Taylorske Række kan da med Hensyn til de her anvendte Betegnelser skrives saaledes:

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

„For enhver explicit given Function af x kan Differentialcoefficienten let bestemmes, altsaa og de successive Differentialcoefficienter.

Denne Act kaldes Functionens Differentiation og tjener til at finde dens Udvikling i Række efter stigende Potenser^{*)}.

Har man saaledes i Henshold til det Foregaaende (II, 1, 2, 3) Rækkerne:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1} \frac{h}{1} + n(n-1)x^{n-2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots^{**})$$

*) Ramus. Algbr. §. 8. 102.

**) Man har nemlig: $f(x+h) - y = \frac{dy}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots$

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1} \frac{h}{1} + n(n-1)x^{n-2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots$$

$$a^{x+h} - a^x = a^x (1,a) \frac{h}{1} + a^x (1,a)^2 \frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots$$

$$\log(x+h) - \log x = \log e \cdot \frac{1}{x} \frac{h}{1} - \log e \frac{1}{x^2} \frac{h^2}{2} \dots$$

$$a^{x+h} = a^x a^h = a^x (1 + (1.a) h + (1.a)^2 \frac{h^2}{1.2} + \dots)$$

$$\log(x+h) = \log x + \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \log x + \log e \left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{x^2} + \dots\right)$$

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h = \sin x + \cos x \cdot h - \dots$$

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h = \cos x - \sin x \cdot h - \dots$$

erholder man for de enkelte Rækker som første Differentialcoefficient:

$$\frac{d.x^n}{dx} = nx^{n-1}; \frac{d.a^x}{dx} = (1.a) a^x; \frac{d.\log x}{dx} = \frac{\log e}{x}; \frac{d.\sin x}{dx}$$

$$= \cos x; \frac{d.\cos x}{dx} = -\sin x.$$

Men som man under givne Forudsætninger finder den første, finder man ogsaa paa tilsvarende Maade den anden, den tredje, den fjerde Differentialcoefficient. Da man nu for alle mulige Functioner kan finde Differentialer og Differentialcoefficienter af alle mulige Ordner, og da disse Coefficienter, skjøndt forskjellige fra hverandre indbyrdes, dog i Sammenligning med endelige Størrelser, hver især, ere som $\frac{0}{0}$; saa have vi her et Exempel, som viser, hvorledes det

Uendelige, det Negative, allevegne kan fortære og dog bevare det Endelige, det Positive som et Moment, et Medbestemmende i de punktuelle Forhold, ja i Forholdenes Forhold.

Under disse Forhold kan her da ikke længere være Tale enten om et blot Endeligt eller om Spring eller om Tilnærmelse, men kun om Bestemthed, indre uendelig Bestemthed.

$$\sin(x+h) - \sin x = \cos x \frac{h}{1} - \dots$$

$$\cos(x+h) - \cos x = -\sin x \frac{h}{1} + \dots$$

Ved i hver Række at mærke sig Det, der svarer til $\frac{dy}{dx}$, faaer man de forlangte Værdier.

Hvor eiendommelig Tankeerretningen maa blive, naar det Endelige saaledes uafbrudt skal bestemmes ved det Uendelige, sees uvilkaarlig af de Principer*), som først komme til Anvendelse i den høiere Mathematik. Man taler om Differentialregningen som om en egen Opfindelse, og med Rette: i det Uendeliges Analyse er Alting nyt; kun maa det ikke glemmes, at det Uendelige fra Begyndelsen af har været med i det Endelige, at de nye Principer og de nye Love ere Consequenser, vel at mærke: teleologiske Consequenser af de gamle elementære Forudsætninger**).

*) Til Oplysning om sammensatte Functioners Differentiation, der ligejøm afgiver de intellectuelle Typer, hidsættes Følgende I) $day = ady$, naar a er constant, thi en constant Størrelse har naturligtviis intet Differential. II) Naar $y, z, u \dots$ ere hvilke som helst Functioner af x , er $d(y + z + u \dots) = dy + dz + du \dots$ III) Sættes $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $yz = F(x)$, erholdes: $F(x + h) = f(x + h) \cdot \varphi(x + h)$, og $d.yz = ydz + zdy$. IV) Sættes $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $\frac{y}{z} = F(x)$, erholdes: $F(x + h) = \frac{f(x + h)}{\varphi(x + h)}$, som ved Rækkendvifling og Reduction giver $F'(x) = \frac{\varphi(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}$ eller $d. \frac{y}{z} = \frac{zdy - ydz}{z^2}$; V) Sættes $z = \varphi(x)$, $y = f(z) = F(x)$, faaes ved Udvifling og Reduction $F'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ eller: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$. VI) Naar $f'(x)$ kan udtrykkes ved $f(x)$, saasom $f'(x) = \varphi[f(x)]$, og den omvendte Function af $f(x)$ kaldes $f_1(x)$, haaves: $y = f(x)$, $x = f_1(y)$, $dy = \varphi(f(x)) dx = \varphi(y) dx$; altsaa $dx = d f_1(y) = \frac{dy}{\varphi(y)}$ eller: $d. f_1(x) = \frac{dx}{\varphi(x)}$ (hvis Anvendelse er vigtig, naar man t. Ex. vil differentiere den til en trigonometrisk Størrelse svarende Bue).

**) Hvad f. Ex. Formlen $d. yz = ydz + zdy$ vil sige, kan med Hensyn paa de elementære Forudsætninger anskueliggjøres:

c) Differentialcoefficienternes indbyrdes Forhold.

Derfor vi med særligt Hensyn paa Rækken:

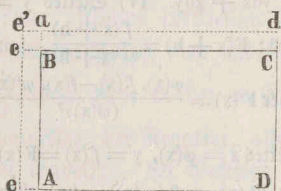
$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

anvendte Betegnelsen:

$$f(x+h) = y + \frac{0}{0} \frac{h}{1} + \frac{0^2}{0^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{0^3}{0^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

saa vilde vi vel herved blive paaminde om Differentialernes uendelige Lidenhed, men dog endnu ikke opnaae sand Indsigt i de forskjellige Differentialcoefficienters eiendommelige Betydning.

Lad Quotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ være, hvad forøvrigt ikke maa tages altfor bogstaveligt, t. Ex. $= \frac{2}{3}$; man vilde da tage meget feil, om man deraf sluttede, at $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0^2}{0^2}$



$D = BC = ad = y$; $DC = AB = ec = z$; $Ae = ae' = dy$; $Cd = Ba = dz$. Tænker man sig D som Udgangspunkt for to samtidige Bevægelser, saa at man har $DA = y = f(t)$, og $DC = z = f(t)$; da er Rectanglet $AD \cdot DC = yz = f(t) \cdot f(t)$. Hvor stor vil nu Tilvæksten blive, naar Bevægelserne fortsættes i en uendelig lille Tid? Man erholder $d(yz) = d[f(t) \cdot f(t)] = ydz + zdy = f(t) d f(t) + f(t) \cdot d f(t)$. Det Helt maa da, efter at Differentiationen er udført, og Tilvæksten funden, give $yz + d \cdot yz$, og $d \cdot yz = ydz + zdy$.

Dette Resultat kan bedømmes fra det elementære Synspunkt. Rectanglet $eDde' = (y + dy)(z + dz) = yz + ydz + zdy + dz dy$ giver nemlig 1) et Product af Endeligt med Endeligt, yz ; 2) af Endeligt med Uendeligt, yz og zdy ; 3) af Uendeligt med Uendeligt: $dzdy = 0 \cdot 0 = 0^2$, som bortfalder; med andre Ord: $ee'aB = dzdy$ betragtes som et Punkt, medens $adaB = ydz$ og $ABe = zdy$ regnes med som uendelig smaa Rectangler.

altsaa maatte være $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ o. s. v. Bistnok er d^ny i Almindelighed af samme Orden, det vil sige: com-
parabel med dx^n , thi kun for specielle Værdier af x haves
enten $f^n(x) = 0$ eller $f^n(x) = \infty$; men desuagtet minder
endog Betegnelsen om, at d^ny ikke forholder sig til y paa
samme Maade, som dx^n forholder sig til x .

$\Im \frac{d^2y}{dx^2}$ er nemlig $dx^2 = dx \cdot dx$; i $\frac{d^3y}{dx^3}$ er $dx^3 = dx \cdot dx \cdot dx$ o. s. fremdl.; medens derimod $d^2y = d \cdot dy$, $d^3y = d \cdot d^2y$ o. s. v. Hermed stemmer det da ogsaa, hvad

Sagen angaaer, at $\frac{dy}{dx}$ i visse Tilfælde kan være 0, medens

$\frac{d^2y}{dx^2}$ er en endelig Størrelse; hvilket vilde være umuligt,

dersom Differentialcoefficienterne i en given Række forholds-
sig til hinanden som stigende Potenser af den samme, ægte
eller uægte, Brøk. Vel bliver f''' i Rækken afledet af f''
paa samme Maade, som f'' afledes af f' ; men deraf følger
jo ingenlunde, at man skulde have $f'' = (f')^2$, $f''' = (f')^3$.

Kalde vi, for at vælge et Exempel af den rationelle
Mekanik, Hastigheden v , Tiden t , og det gennemløbne Rum

x ; saa er i en endelig Tid $v = \frac{x}{t}$; men i Diebliffets

uendelige Tid $= \frac{dx}{dt}$. Betegner dernæst φ den bevægende

Kraft, og søge vi Kraften i dens Maal, saa have vi for en

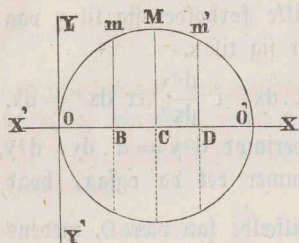
endelig Tid $\varphi = \frac{v}{t}$, men for Diebliffets uendelige Tid φ

$= \frac{dv}{dt}$. Da nu Hastigheden i hvert Dieblif er $v = \frac{dx}{dt}$,

saa er jo $dv = d \cdot \frac{dx}{dt}$; $\varphi = \frac{dv}{dt}$ bliver da $= \frac{\frac{d^2x}{dt}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Naar altsaa første Differentialcoefficient betegner en Hastighed, betegner anden Differentialcoefficient den i Diebliffet virkende Kraft.

Et andet, ligesaa fatteligt Exempel kan hentes fra Maximum og Minimum.



En Function af x er i sit Maximum, naar $f(x+h)$ og $f(x-h)$ begge ere mindre end $f(x)$, eller hvad der er det Samme, naar $f(x+h) - f(x)$ og $f(x-h) - f(x)$ begge ere negative; ere de begge positive,

Er $OC = x$, $BC = CD = h$, saa er Functionen derimod i sit Minimum
 $Dm' = f(x+h)$, $MC = f(x)$, og $Bm = f(x-h)$.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} - \dots$$

$$\text{Altsaa: } f(x+h) - f(x) = +f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = -f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} - \dots$$

For at begge Rækker kunne have samme Fortegn, maa det første Led, der har modsatte Tegn, og som, naar h er meget lille, bestemmer Fortegnet for hele Rækken, bortfalde,

d. e. $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$, og $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ være negativ. For

Minimum maa $\frac{dy}{dx} = 0$ ligeledes bortfalde, men $\frac{d^2y}{dx^2}$ deri-
 mod være positiv.

Vi kunne anskueliggjøre dette Forhold. Ifølge elementær Fremstilling har man for Cirklen, naar i ovenstaaende Figur sættes $OB = x$, $Bm = y$, $OO' = 2r$, $x : y = y : 2r - x$; $y^2 = 2rx - x^2$; $y = \pm \sqrt{2rx - x^2}$. Er $x = r$, saa er $y = CM$, og i sit Maximum.

Ifølge den høiere Analyse høves, da $y = f(x) = \pm \sqrt{2rx - x^2}$, $\frac{dy^*}{dx} = \pm \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}$, og $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{-1}{\sqrt{2rx-x^2}} - \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}^3}$

For enhver uendelig lille Tilvæxt til x , faaer y sin ligeledes uendelig lille Tilvæxt: de anførte Værdier udtrykke

*) $d f(x) = d(\pm \sqrt{2rx - x^2})$ bliver da $= d(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$. For at udføre denne Differentiation, forudsættes Formlen: $d(x^n) = nx^{n-1} dx$, hvorefter $d\sqrt{x} = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$; men $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; altsaa er $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{x}}$. Ifølge denne Formel bliver $d(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} d(2rx - x^2)}{\sqrt{2rx - x^2}}$. For at differen-

tiere Tælleren anvendes Formlen $d(y \pm z) = dy \pm dz$; $\frac{1}{2} d(2rx - x^2)$ bliver altsaa $\frac{1}{2} (d2rx - dx^2)$. Men $d2rx = 2r dx$, og $\frac{2r dx}{dx} = 2r$; $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$. Altsaa: $d(\pm \sqrt{2rx - x^2}) = \pm \frac{\frac{1}{2} (2r - 2x)}{\sqrt{2rx - x^2}} = \pm \frac{r - x}{\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{dy}{dx}$.

For at finde den anden Differentialcoefficient $d\left(\frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}\right)$,

forudsættes Formlen $d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z dy - y dz}{z^2}$; man faaer da ($y = r - x$; $z = \sqrt{2rx - x^2}$) $\frac{\sqrt{2rx-x^2} d(r-x) - (r-x) d\sqrt{2rx-x^2}}{(\sqrt{2rx-x^2})^2}$

Men $\frac{d(r-x)}{dx} = \frac{dr}{dx} - \frac{dx}{dx} = 0 - 1$, $\frac{d\sqrt{2rx-x^2}}{dx} = \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}$

og det hele Resultat: $\pm \frac{-\sqrt{2rx-x^2} - (r-x) \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}}{2rx-x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Dieblif Punkterne falde sammen, være Tangent. Da nu $\frac{k}{h} =$ tg α , idet α er den Vinkel, Tangenten til Punktet (x, y) danner med x-aksen.

Alf Figuren A seer man, at tg α gaaer ved Maximumspunktet over fra at være positiv til at være negativ $=$ tg α' ; $\frac{dy}{dx}$ skifter altsaa Fortegn i M, og maa da i dette Punkt være 0.

Da endvidere $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d \text{ tg } \alpha}{dx}$, saa betyder $\frac{d^2y}{dx^2}$ den Tilvæxt, hvormed tg α varierer, naar x voxer. Men tg α (til Punktet m) er aabenbart, naar x varierer fra B til D, i bestandig Afstagen, saa at Tilvæksten er negativ; $\frac{d^2y}{dx^2}$ skal altsaa med Hensyn paa Maximum være negativ, og Formlen $\mp \frac{1}{r}$ give $-\frac{1}{r}$.

Saaledes kan da hver Differentialcoefficient, ifølge de afledede Functioners systematiske Sammenhæng, komme til at spille en eiendommelig Rolle.

3) Integralet.

En Analyse af det Uendelige er nødvendigviis med det Samme en Analyse af det Endelige, ligesom ogsaa enhver Analyse af det Negative med det Samme er en Analyse af det Positive, enhver Begrebsanalyse tillige en Forestillingsanalyse.

I Forhold til Linien som det Positive er Punktet, Liniens Grændse, det Negative; naar Linien er en Forestilling, er Punktet en Tanke. I Forhold til Fladen som det Positive, er Linien, Fladens Grændse, det Negative: Fladen

forestilles, naar Linien tænkes. I Forhold til Legemet, det Positive, er Fladen, Legemets Grænse, det Negative.

I Forhold til det endnu ubestemte Sted, det Negative, er det bestemte Punkt det Positive; ja, i Forhold til Massen, den materielle Gjenstand, er det mathematiske Legeme selv en Negation, en Tankegjenstand, et Begreb.

Den uendelige og dog derhos endelige Begrebbestemmelse af Negativt og Positivt, af Punkt og Linie, af Linie og Flade, af Flade og Legeme, som beskæftiger Mathematiken, bliver da ogsaa kjendelig paa Kategorierne: Discretion og Continuitet.

En Linie, dette givne Continuum, kan deles, og hver Deel er igjen Linie. Da nu hver Deel bliver desto mindre, jo større Delenes Antal bliver; slutter man, at enhver Linie maa kunne deles, eller rettere: „tænkes deelt i uendelig mange uendelig smaa Dele“.

Slutningen fører dog strax ind i adskillige Vanskeligheder. Er hver mindste Deel af den delte Linie endnu en Linie, et lille Continuum; saa maa dette Continuum jo igjen kunne deles i uendelig mange uendelig smaa Dele.

Den mindste Deel er da saa langt fra at være den mindst mulige, at den tværtimod endogsaa synes at blive ligestor med den hele Linie, eftersom Delen og det Hele jo begge lade sig dele i „uendelig mange uendelig smaa Dele“. Kan hver mindste Deel af den delte Linie derimod ikke længere deles; da er denne mindste Deel ikke mere en Linie men et Punkt.

Den delte Linie kommer altsaa til at bestaae i uendelig Discretion af uendelig mange Punkter; men Punktet er jo netop Liniens Negation, er, punktlig forstaaet, uden al Udstrækning, en Ikke-Linie. Ifølge den anførte Slutning kom da Linien til at bestaae, ikke af utallige Smaalinier, men af uendelig mange Ikke-Linier. Men at tænke sig en virkelig, positiv Linie sammensat af uendelig mange Ikke-Linier, falder vel omtrent ligesaa vanskeligt, som at tænke

fig en virkelig positiv. Tak sammensat af uendelig mange Utaf.

Hvad Mathematiken egentlig lægger i det Udtryk: „uendelig mange uendelig smaa Dele“, kan imidlertid ikke kjendes af Talemaader; det maa vise sig i Gjerningen. Søge vi Delenes uendelige Videnhed i Differentialet, maae vi søge deres saakaldte uendelige Sum i Integralet; af Summation og Integration vilde vi da stræbe at udfinde Integralets Bestemmelse.

a) Summation.

Antages en Linie, x , deelt i uendelig mange uendelig smaa Dele, og betegnes enhver af disse Dele, uden at det endnu er afgjort, om de ere Punkter eller Linier, ved dx , da har Mathematiken uimodsigelig Ret, naar den betegner den hele Linie ved Delenes uendelige Sum $\int dx = x$.

Men hvad er nu dx , Punkt eller Linie? Skulde Dialektiken forklare sig herover, vilde den sige: det er ikke et Punkt, thi det er egentlig en Linie; det er ikke en Linie, thi det er væsentlig et Punkt. Det er en Linie, som netop er indsvunden til et Punkt; et Punkt, der just er i Begreb med at udvides til en Linie.

Hvad Dialektiken saaledes siger i sit Sprog, er just det, Mathematiken forudsætter i sin Praxis. dx er, som allerede viist, ligesaa lidt 0, som en endelig Størrelse. Der- som dx var 0, saa maatte $\int dx$ ligefrem være $\infty \cdot 0$, men

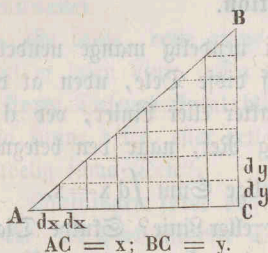
$$\text{dette er ingenlunde Tilfældet. Sættes } \int dx = \infty \cdot 0 = \frac{1}{0} \cdot 0 \\ = \frac{0}{0}, \text{ saa bliver her jo ingen Forskjel imellem Integralet og}$$

en endnu ubestemt Differentialcoefficient, hvis Værdi altsaa kan være baade endelig og uendelig.

Mathematiken indblader sig da heller ikke paa at bestemme dx umiddelbart, være sig som Punkt eller som Linie;

dx bestemmes kun i et Forhold som f. Ex. af dy ; saaledes at Forandringsloven kan vise sig i $f'(x) = y$.

I $f'(x) = y$ maa Tilvæerten for x , den Uafhængige, naturligtviis være constant; thi dersom dx varierende, maatte Forandringerne være underkastede en vis Lov, og x kunde da ikke være uafhængig. Hvad Tilvæerten for y , den Afhængige, angaaer, udtrykker Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dx}$ et bestemt Forhold, men de enkelte dy kunne derimod være indbyrdes enten lige eller ulige.



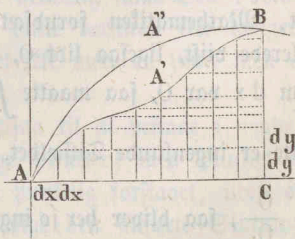
I Trekanten ABC høves:

$$BC = y = dy + dy + dy + \dots$$

$$AC = x = dx + dx + dx + \dots$$

I enhver af disse uendelige Summer ere Leddene indbyrdes lige, nemlig $dy = dy$, ligesom $dx = dx$; men kun i et enkelt Tilfælde, naar nemlig $\angle BAC = 45^\circ$, er $dy = dx$, og Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1$.

I Figuren $AA'BC$ og $AA''BC$ høves endnu, som før, $dx = dx$, men derimod ikke $dy = dy'$. Anskues den Afhængighed, hvori y befinder sig til x , for et Tilfælde ved Curven $AA'B$, for et andet, ved Curven $AA''B$; da er det heraf indlysende, at de enkelte dy i den uendelige Sum:



$$AC = x; BC = y.$$

$y = dy + dy' + dy'' + dy''' + \dots$ ikke blot i begge Tilfælde ville være indbyrdes ulige, men

er Summen, ∞dx , endda en saa ubestemt Størrelse, at den kan sættes $= x$, $= \frac{1}{2} x = 1000 x$, $= \frac{1}{1000} x$ o. s. f.

En Sum er efter sit Begreb et Antal, et endeligt Tal. En uendeligt Antal, en uendelig Sum, en Summation af et uendeligt Antal ere i Grunden lutter Modsigelser. Skal en uendelig Summation udføres, maa Opgaven løses enten ved Tilnærmelse, altsaa i Dmtræntlighed, eller ved en Forvandling.

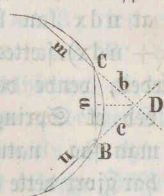
b) Integration.

I Rækken $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$ er Ledenes Antal uendeligt. En Summation af disse Led kan nu for det Første skee ved Tilnærmelse, idet man med Hensyn til Rækkens Convergens tager saa mange Led, som Regningens Nøiagtighed udkræver; men uden at fortabe sig i en Sammentællen af utallige Led, kunde man dog ogsaa ad en anden Veie opnaae et Resultat, og det endog et exact Resultat, ved nemlig at finde den Quotient, hvoraaf den uendelige Række udspringer. Istædetfor en uendelig Summation anvendes da en lovbestemt Reduction: Opgaven løses, idet den forvandles.

Et talende Exempel paa Opgavers Forvandling have vi i Behandlingen af brudte Liniers Forhold til Curver.

Paa Overgangen fra Endeligt til Uendeligt begynder Mathematiken med den Antagelse, at Cirklen er en Polygon af et uendeligt Antal uendelig smaa Sider. Hvorledes denne Sætning anvendes i den elementære Geometrie, er bekjendt; i den høiere Analyse kan Sagen fremstilles saaledes:

$a = b \cos C + c \cos B$, ifølge Figuren; men $\cos C = 1 - \frac{C^2}{1.2} + \frac{C^4}{1.2.3.4} \dots$ og $\cos B = 1 - \frac{B^2}{1.2} + \frac{B^4}{1.2.3.4} \dots$ Altså



$$\text{Saa er } a = b \left(1 - \frac{C^2}{1.2} \dots \right) + c \left(1 - \frac{B^2}{1.2} \dots \right) = b - \frac{bC^2}{1.2} \dots$$

$$+ c - \frac{cB^2}{1.2} \dots = b + c - \frac{bC^2}{1.2} \dots - \frac{cB^2}{1.2} \dots$$

Grundspørgsmaalet er, hvad der ifølge den angivne Forandringslov vil ske, naar Leddene blive uendelig smaa; og Svaret er, at $\frac{bC^2}{1.2}$ og $\frac{cB^2}{1.2}$, Leddene af anden Orden, ville forsvinde, og efterlade $a = b + c$.

I endelig Forstand er den til a som Chorde svarende Bue $CB < b + c$, men $> a$; men, idet $a = b + c$, er hele BCD svundet ind til et Punkt, som dog ikke er et Punkt, men et Element i en Linie.

Den Linie, i hvilken BCD er et Element, er ikke en Polygonside, men en Cirkelperipheri. Foraaavdt her i a endnu er mindste Rest tilbage af en Polygonside, er BCD ikke et Element i en Linie, men et virkeligt Triangel; Trianglet BCD kan forsvinde, men kun i den frumme Linie.

Istedetfor at bevise, enten at Cirklen er Polygon eller Polygonen Cirkel, har Mathematiken tværtimod forvandlet Opgaven, og beviist, at en Cirkel er væsentlig forskjellig fra en Polygon, og en Polygon fra en Cirkel.

Den Synsmaade, at en frum Linie i Grunden er en brudt Linie, hænger inderlig sammen med den Anskuelse, at Integrationen er en Summation. Istedetfor at opfatte Integrationen som en uendelig Summation, maae vi meget mere betragte den som en Forvandling af Summationens Opgave, nærmere bestemt ved den udtryffelige Mod sætning til Differentiationen *).

*) „Integration er den omvendte Regning af Differentiation. Den bestaaer i, naar et Differential er forelagt, at bestemme den Func-

Leibnitz, der opdagede Differentiationen, som den directe Tangentmethode, fandt i Integrationen den omvendte Tangentmethode.

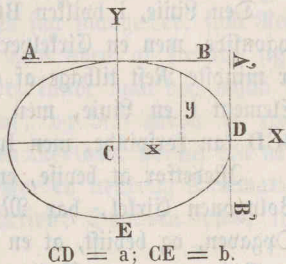
Med Hensyn paa Cirklen blev i det Foregaaende $y = f(x) = \pm \sqrt{2rx - x^2}$ givet som den oprindelige Function; Opgaven var da at finde de afledede Functioner, navnlig $\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}}$ og derved bestemme den Vinkel, Tangenten til et Punkt i Cirklen vil danne med den positive Retning af Abscisseaxen. Ved at indsætte forskjellige Værdier for x bestemmer man Tangenten for de forskjellige Punkter i Curven.

Vælg vi Ellipsen, og lægg Coordinaternes Begyndelsespunkt i Centrum; saa have vi atter $y = f(x)$, men denne Gang

bestemt som $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Den hertil svarende første Differentialcoefficient, findes da

at være $-\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ hvor



tion, hvoraf det er Differential, og almindeligt, naar en Differential ligning er forelagt, at bestemme dens tilsvarende primitive Ligning". Ramus. Differ. Integr. S. 34.

At de høiere Theorier om uendelige Rækkers Summation beroe paa Reductioner og Forvandlinger, er indlysende. En Række som

den Eulerske: $x^{-a_m-1} \int_{s_n, m}^x x^{a_m} dx = s_{n, m-1}$. (Ramus. Diff.

Integr. S. 308) lader sig naturligtvis endnu mindre behandle ved

ligefrem Summation, end f. Ex. Rækken: $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$

ved da ligeledes Retningen af Tangenten for ethvert Punkt i Ellipsen kan bestemmes. Er f. Ex. $x = 0$, faaes Retningen af Tangenten i Endepunktet af den lille Axe; thi da er $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{0}{\sqrt{a^2-0}} = 0$. Er $x = a$ faaes Tangen-

ten til Endepunktet af den store Axe, nemlig $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2-a^2}} = -\frac{ba}{\sqrt{0}} = -\frac{ba}{0} = \infty$.*)

I begge disse Tilfælde blev altsaa den oprindelige Function, $f(x)$, given, og Opgaven var at finde den afledede, $\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx}$. Dette var altsaa Exempler paa den directe Tangentmethode.

Men nu kunde jo ogsaa omvendt en afledet Function $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ være given, og Opgaven blive, at finde den tilsvarende oprindelige, $f(x) = y$.

1) Exempel. Der er givet en Ligning $\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{\sqrt{2rx-x^2}} = f'(x)$, hvorved en Curves Tangent bestemmes; Opgaven

En Række som $\int_0^x 2x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{x^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1))$

bliver ikke summeret, men reduceret: $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{x^2}{n^2} \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$. Af Reductionernes Resultat

fremgaaer, at Rækkens Sum, naar man sætter $n = \infty$, vil give x^2 , og at man altsaa erholder $\int_0^x 2x dx = x^2$; men en saadan Summation er ikke mere Summation: Grænsen er overstreden, Opgaven forvandlet.

*) Til AB, Tangenten, som danner en Vinkel $= 0$ med xnes Axe, svarer en Tangens (i Talværdi) $= 0$; til A'B', en Tangent, som danner en Vinkel med xnes Axe $= 90^\circ$, svarer en Tangens $= \infty$.

er, at finde Curvens oprindelige Ligning: $f(x) = y$. Ved Integrationen, den omvendte Tangentmethode, finder man da $\int f'(x) dx = f(x) = \pm \sqrt{2rx - x^2}$; d. e. man finder at den omspurgte Curve er en Cirkel.

2) Exempel. Der er givet en Ligning $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, hvorved Tangenten for en Curve bestemmes; man skal nu ved Integrationen, den omvendte Tangentmethode, finde, hvad det er for en Curve, og finder da $\int f'(x) dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$, som viser, at Curven er en Ellipse.

Modsætningen mellem Integration og Differentiation kan med Hensyn til Potenser anfælgiggjøres saaledes: man gaaer ved Differentiation fra $f(x) = x^n$ til $f'(x) = nx^{n-1}$; man gaaer ved Integration omvendt fra $f'(x) dx = nx^{n-1} dx$ til $f(x) = x^n$: man har ved Differentiation $d(x^n) = nx^{n-1} dx$, man faaer ved Integration $\int nx^{n-1} dx = \int d(x^n) = x^n$; man differentierer en Potens ved at multiplicere med Exponenten og subtrahere 1 fra Exponenten; man integrerer en Potens ved at addere 1 til Exponenten og dividere med den forøgede Exponent.

$x^n = \int nx^{n-1} dx = n \int x^{n-1} dx$, altsaa: $\frac{x^n}{n} = \int x^{n-1} dx$, sættes nu $n-1 = m$, $n = m+1$, saa høves:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Men hvad betyder nu C, den arbitrære Constant?

c) Integralets Bestemmelse. *)

I Modsætning til Differentialet som det Negative er Integralet det Positive. Er Differentialet et Punkt, saa er

*) „Der gives ingen almindelig Methode til at finde $\int X dx$ udtrykt under endelig Form, naar X er en explicit Function af x under

Integralet en Linie; er Differentiallet en Linie, saa er Integralet en Flade, er Differentiallet en Flade, saa er Integralet et Legeme.

Det Negative kan imidlertid ikke af sig selv frembringe det Positive, saalidt som det umiddelbart Positive kan frembringe det Negative: Overgangen fra Negativt til Positivt, og omvendt, forudsætter en pønerende og negerende Virksomhed, et Princip.

endelig Form, hvorimod steds $\frac{dX}{dx}$ kan udtrykkes under endelig

Form. Integration er nemlig en omvendt Beregning og leder derfor almindeligen til nye Functioner"... „Ligesom Subtraction, Division, Røddetræction, som ere omvendte Beregninger af Addition, Multiplication, Potensopløstelse, have ledet til nye Størrelser: negative, brudne, rationale og imaginære.“ Ramus. Differential- og Integral-Rgn. S. 36.

At forøvrigt Integrationen i det Hele bestemmes ved sin principielle Modfæmning til Differentiationen, ligger i Sagens Natur, og sees af mangfoldige Former. Da en Constant ikke kan have noget Differential, kan den heller ikke have noget Integral. Naar

a er constant, have $\int a X dx = a \int X dx$. Er $d(\sin x) =$

$\cos x dx$, saa er $\int \cos x dx = \int d(\sin x) = \sin x$; er $d(\cos x)$

$= -\sin x dx$, saa er $\int -\sin x dx = \int d(\cos x) = \cos x$, og $-\cos x$

$= \int \sin x dx$; er $d(f(x) \pm \Phi(x)) = f'(x) dx \pm \Phi'(x) dx$,

saa er $\int (f'(x) dx \pm \Phi'(x) dx) = \int d(f(x) \pm \Phi(x)) = f(x) \pm$

$\Phi(x)$; er $d(f(x) \cdot \Phi(x)) = f(x) d\Phi(x) + \Phi(x) df(x)$, og $f(x) d\Phi(x)$

$= d(f(x) \Phi(x)) - \Phi(x) df(x)$, saa er $\int d(f(x) \cdot \Phi(x)) = f(x)$

$\Phi(x) = \int f(x) d\Phi(x) + \int \Phi(x) df(x)$, og $\int f(x) d\Phi(x) = f(x) \Phi(x)$

$- \int \Phi(x) df(x)$. Men under den videre Udvikling bliver Sagen indviklet; allerede $\int \frac{f(x)}{\Phi(x)}$ kræver udsørgere Operationer:

$$\frac{f(x)}{\Phi(x)} = F(x) + \frac{k_1}{x - \alpha_1} + \frac{k_2}{x - \alpha_2} \dots \text{Sæt } \frac{1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{(x - 4)(x - 3)} =$$

I den negerende Virksomhed er det Positive forudsat; det er det Positive, som i Negationen faa at sige gennemskjæres, overskjæres eller affskjæres af det Negative: det Positive deles. I den ponerende Virksomhed er omvendt det Negative forudsat. Det er jo ikke det Værende, det Positive, der sættes, thi det Værende er allerede, det Positive er allerede sat; nei, det er just det Ikke-Værende, det, som endnu ikke er, det Negative, der sættes, og omsættes. At Punktet, det Negative, sættes positivt, vil med andre Ord sige, at Begyndelsen til en Linie sættes; idet den satte Begyndelse fortsættes, bliver Linien til: Fortsættelsen er en Bevægelse.

At det i denne Sammenhæng ikke er nok med Kategorierne: Deling og Sammensætning, men at Deling og Bevægelse bør modsættes hinanden, kan sees af en Sammenligning mellem den brudte og den krumme Linie.

For den brudte Linie gælder en Sammensætning, thi dens Dele ere endelige; den er et Stykværk, som i Et og Alt tilhører Endeligheden. For den krumme Linie gælder ingensomhelst endelig Sammensætning, ingen end ikke den allerfineste Sammenstykning; den fylder kun Bevægelsen sin Tilblivelse, thi den tilhører Uendeligheden.

Den saakaldte sammensatte Bevægelse er ikke en Sammenstykning af to Bevægelser; men en gennem to Momen-

$$\frac{k_1}{x-4} + \frac{k_2}{x-3} = \frac{k_1(x-3) + k_2(x-4)}{(x-4)(x-3)}; \text{ altsaa } 1 = (k_1 + k_2)x - (3k_1 + 4k_2). \text{ Ved at sammenligne Potenserne af } x \text{ paa begge Sider sees det, at } k_1 + k_2 = 0, \text{ og } -3k_1 - 4k_2 = 1; 4k_1 + 4k_2 = 0; k_1 = 1; k_2 = -1. \text{ Følgelig:}$$

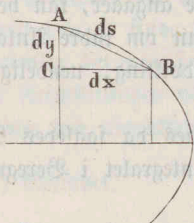
$$\frac{1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}; \text{ det er: } \int \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} = \int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{x-3}. \text{ For } \Phi(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_p)^n (x-a)^m \dots$$

haves $\int \frac{1 \cdot dx}{x-4}, \int \frac{3 dx}{(x-4)^2}, \int \frac{A dx}{(x-a)^m}$. Jfr. Ramus. Diff. Integr. S. 37.

ter formidlet Bevægelse. Foraaavdt her er mindste Spor af virkelig Sammenstykning, vil det bevægede Legeme kun i endelige Mellemrum forandre sin Retning: der vil fremkomme en brudt, ikke en krum Linie.

Det Bevægelsesprincip, som frembringer den krumme Linie, er inderlig beslægtet med Functionens Natur; her er Continuitet i uendelig Discretion, et Uforanderligt i uendelig Forandring.

Men af Functionen afhænge jo baade Differentiallet og Integralet.



A = ds, den uendelig lille Sector.

Signing; $f(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ for Cirklen; $\frac{b}{a}$

$\sqrt{a^2 - x^2}$ for Ellipsen; $\frac{b}{a} - \sqrt{x^2 - a^2}$ for Hyperblen;

$\sqrt{x} \sqrt{p}$ for Parablen *), o. s. v.

Spad her angives ved Differentialcoefficienten, er da heller ikke et allerede tilværende Brudstykke, men et Moment, der alene har Betydning i Forhold til den bestemte Bevægelseslov, og den dermed enten allerede indtraadte eller dog indtrædende Bevægelse.

Indsættes Udtrykket $-\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{dx}{dy}$ for El-

lipsen, erholder man ved Reduction $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$

*) Jfr. Ramus. Analytisk Geometrie. S. 13—23.

altsaa $ds = dx \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}}$, en Formel, som især anvendes til at rectificere Ellipsen, eller fremstille den ved Quadratur*), idet man ved at integrere erholder: $s = \int_0^{x=a} \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}}}$, en Forvandling, der umulig kan tilveiebringes ved Sammenstykning, men alene styldes Bevægelsen og den for Bevægelsen gjældende Lov.

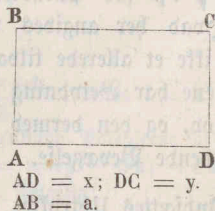
Selv hvad det Incommensurable angaaer, kan her ikke være Tale om Unpiagtighed, men kun om indre Anlæg til uendelig Fremadskriden, uendelig Udvikling, uendelig Bevægelse.

Af Deling og Bevægelse forstaaes da saaledes Modfætningen mellem Differentiallet og Integralet i Beregninger af Arealer og Volumina.

At en Flade kan deles i uendelig mange uendelig smaa Flader, er uimodsigeligt; men at en endelig Flade ikke kan sammenstyffes af uendelig mange uendelig smaa Flader, er ogsaa uimodsigeligt. $\int y dx = A$ være typisk Formel for et hvilket somhelst Areal, idet $y = f'(x)$.

1) Exempel.

I Rectanglet yx er $y = a$,
 $y dx = a dx$. Ifølge Formlen:
 $\int y dx = \int a dx = a x + a x$
 $+ a x + \dots$



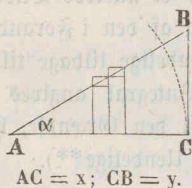
AD = x; DC = y.
 AB = a.

*) Enhver Differentia ligning, der er bleven opløst saaledes, at den ene Variable er bleven udtrykt ved et Integral, som indeholder den anden alene, siges at være fremstillet ved Quadratur. Om Quadratur og Rectification jvfr. Ramus. Analytisk Geometrie S. 112—125.

kunde man næsten antage, at Mathematiken virkelig havde i sinde at sammmentælle de utallige adx , og sammenstykke det endelige Rectangel af uendelig mange uendelig smaa Rectangler. Dette er dog en Misforstaaelse. Opgaven forvandles, idet den løses. $\int y dx = \int a dx$ er $a = y$ constant; altsaa $\int a dx = a \int dx = ax$: Rectanglet = Grundlinie $\times$ Høide.

Opgavens Løsning gaaer altsaa her ingenlunde ud paa at vise, hvorledes det Endelige sammenstyckes af det Uendelige, men paa at finde det til det Uendelige svarende Endelige, nemlig det yx , som lader sig dele i de utallige ydx . Skulde Fremstillingen vise, hvorledes yx fremkommer af ydx , da maatte den udtrykkelig paavise Bevægelsen.

2) Exempel.

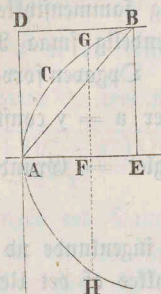


$AC = x$; $CB = y$.

$\int$ Trekanten ABC høves $\int y dx = ydx + y'dx + y''dx + \dots$; men istedetfor at sammenstykke Trekanten af uendelig mange uendelig smaa Rectangler, opfatter Mathematiken y som en Function af x ; $y = \operatorname{tg} \alpha x$, altsaa $y dx = \operatorname{tg} \alpha x dx$, denne Opfatning svarer just til

Bevægelsen.

Man erholder altsaa $\int y dx = \int \operatorname{tg} \alpha x dx = \operatorname{tg} \alpha \int x dx$; men ifølge den for Integrationen af en Potens angivne Lov, er $\int x dx = \frac{x^2}{2}$, og altsaa $\operatorname{tg} \alpha \int x dx = \operatorname{tg} \alpha \frac{x^2}{2} = \operatorname{tg} \alpha x \frac{x}{2} = y \frac{x}{2}$: Trekantens Areal = Grundlinien $\times \frac{1}{2}$ Høide.



AE = x; EB = y
GFH = p.

For en Parabel, hvis Ligning, $y^2 = px$,
vifer $y = \sqrt{p} \sqrt{x} = \sqrt{p} x^{\frac{1}{2}}$, er
$$\int y dx = \int \sqrt{p} \sqrt{x} dx = \sqrt{p} \int x^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \sqrt{p} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{p} x^{\frac{3}{2}} =$$

$\frac{2yx}{3}$. Segmentet ACB = $\frac{2yx}{3}$ --

$\frac{yx}{2} = \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6} \right) xy = \frac{1}{6} xy$.

Arealet ADBCA = $xy - \frac{2}{3} xy = \frac{1}{3} xy$
= $2 \times$ Segmentet ACB*)

I alle flige Tilfælde behandles det Tilblivne ikke som et umiddelbart Værende, men efter dets Tilblivelse; Functionen udtrykker Tilblivelsens Lov.

Tilblivelsen forudsætter ogsaa her et allerede Tilblevet. Idet Integrationen, under Forudsætning af den i Forandringerne udtrykte Bevægelse, fører det Uendelige tilbage til endelig Bestemthed, maa det bestemte Integral angives ved en tilføjet Constant. Constanten er just den Grænse, hvori det Endelige berører det i Bevægelsen Uendelige**).

*) Vi have fundet Arealet ABCE = $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3}$ af et Rectangel, som kan reduceres til et Kvadrat; Parablen kan altsaa, hvad de øvrige Reglesnitlinier ikke kunne, kvadreres under endelig Form.

**) Væren om Constanten maa ikke misforstaaes, som om Mathematiken, for at angive bestemte Forhold og udtrykke de bestemte Love, nødvendigviis maatte have enkelte uforanderlige Led; tværtimod, jo længere man trænger ind i den høiere Analyse, i Differentialer med flere Uafhængige (Ramus. Diff. Integr. S. 149 o. fl.), i Curvers og Fladers Generation (Ramus. Analytisk Geometrie. S. 135 o. fl.), i Liniers Røring, Osculation, Evolution o. s. v.; desto mere indlyser det, at hvert Forholdsled er i

Exempel. Af den rationelle Mechanik er Forholdet mellem Hastigheden: $v = \frac{dx}{dt}$, og den bevægnede Kraft: $\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$, allerede fremhævet.

Er nu 1) Hastigheden constant, saa sættes $\frac{dx}{dt} = a$, hvor a er Constanten. Af $dx = a dt$ faaes da ved Integration $\int dx = \int a dt = a \int dt$, eller: $x = at + b$; b er en tilføjet vilkaarlig Constant, thi differentierer man $x = at + b$, faaer man igjen $dx = d.at + db = a dt + 0$. Betydningen af den tilføiede Constant oplyses da saaledes: for $t = 0$ er $x = b$, altsaa er b Massens Afstand fra Udgangspunktet ved Bevægelsens Begyndelse.

Er 2) Kraften, φ , constant, $= k$, haves $\frac{d^2x}{dt^2} = k$, og $\frac{d^2x}{dt^2} = k dt$, som, integreret, giver $\frac{dx}{dt} = \int k dt$; altsaa er $\frac{dx}{dt} = kt + c$, og c , Constanten, en Begyndelseshastighed, thi, naar $t = 0$, er $\frac{dx}{dt} = c$. Integreres atter, faaer man $\int dx = \int (kt + c) dt = \int (ktdt + cdt) = k \int t dt + c \int dt$, altsaa: $x = \frac{1}{2} kt^2 + ct + d$, hvor d er en ny Constant, o. s. v.

Constantens Betydning fremlyser iligemaade af Arealberegningen.

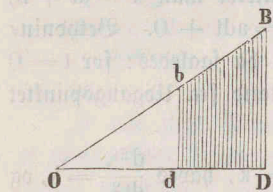
det Uendelige foranderligt, og kun Povenes System det Væsentlige, det Bestandige, det Evige.

Forsaaavidt Materialismen med Hensyn til de i mekaniske og kemiske Tiltrækninger exacte Forhold vil slutte fra Forholdenes Bestandighed til Grunddelenes Uforanderlighed ved at veraabe sig paa det Mathematiske, er Slutningen falsk.

Bestemmer man Trekantens Areal ved Formlen $y \frac{x}{2}$ fra Endelighedens Synspunkt, saa maa man fra Uendelighedens Standpunkt anvende Formlen: $\int y dx = \frac{xy}{2} + C$.

Her forudsættes da, at x , den Uafhængige, og y , den Afhængige, variere i det Uendelige: den tilføiede Constant peger hen paa Bevægelsen.

$\int y dx = \int f'(x) dx = f(x) + C$. Er $x = 0$, da er $f(0) = 0$; $\int y dx = 0 + C$, og $C = 0$; er $x = OD$, da er $\int y dx = \int_0^x y dx = \int_0^x f'(x) dx = f(x)$; er $x = OD = x'$, da er $\int y dx = \int_0^{x'} y dx = \int_0^{x'} f'(x) dx = f(x')$.



Forsaavidt de varierende x og x' ere i et vist Forhold til hinanden, ere de varierende Arealer OBD og Odb i et tilsvarende Forhold. Dette Forhold bestemmes ved Areal-differensen, og ved denne igjen Constanten.

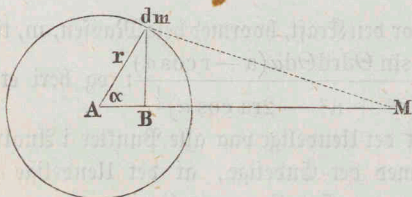
$$OBD - Odb = bdBD = \int_0^x y dx - \int_0^{x'} y dx = \int_{x'}^x y dx = f(x) - f(x').$$

Før nu at udfinde, hvorvidt Constanten er positiv eller negativ, maa man begynde med at lade Areal-differensen indsvinde til 0. Dette skeer i nærværende Tilfælde ved at sætte $x = x'$, hvorved man erholder en bestemt Grænse, enten bd eller BD.

Aralet bdBD, som før var $= f(x) - f(x')$, bliver altsaa nu $= f(x') - f(x') = f(x') + C = 0$, og følgelig $C = -f(x')$. Naar nu x ved Endepunktets Bevægelse, d. e. ved continuelig Tilvæxt dx , forlænges ud over x' , vil Areal-differensen blive $= f(x) + C$, idet $C = -f(x')$. Man

vil altsaa, hvormeget end x vojer, altid kunne sætte $bdBD$
 $= \int_x^x y dx = f(x) - f(x') = f(x) + C.$

Hvorledes Overgangen fra Punkt til Linie, fra Linie til Flade, fra Flade til Legeme forholder sig til Integralet, sees af den Maade, hvorpaa der integreres med Hensyn til Mæsse.



$$AM = a; AB = r \cos \alpha$$

Antager man et legemligt Punkt, et materielt Element, dm , der tiltrækker M , og dette dm bestemt ved Radius r , ved Vinklen α , og ved en Vinkel θ , som et fast Plan danner f. Ex. med Papirets Plan; antager man endvidere $dm = p dw$ idet p er Vægtfylde og w Volumen, saa at dw bevises at være $= r^2 \sin \theta dr d\theta d\alpha$, og Punktets hele Tiltrækning,

$$\text{opløst efter Retningen mod Centrum,} = \frac{k dm (a - r \cos \alpha)}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

saa kan man ved Integration bestemme den Tiltrækning, som

$$\text{hele Kuglemassen udøver paa } M, = k \int \frac{dm (a - r \cos \alpha)}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{men } dm = p dw, \text{ altsaa haaves } kp \int \frac{dw (a - r \cos \alpha)}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= kp \int \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\alpha (a - r \cos \alpha)}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Men, at integrere een Gang med Hensyn til Mæsse er det Samme som at integrere 3 Gange med Hensyn til de Variable, hvorved Volumen er udtrykt. Altsaa integreres først med Hensyn til θ , den Vinkel, som fremkommer, idet

dm dreies i Cirkel om AM (Grændserne ere 0° og 360° , $\int_0^{2\pi}$); dernæst integreres med Hensyn til α (Grændserne ere 0° og 180° , $\int_0^{\pi}$, thi, naar Halvcirklen bevæger sig, om sin Diameter, fremkommer Kugleskallen), endelig maa man, for at faae de uendelig mange Kugleskaller, integrere med Hensyn til r , $\int_0^r$.

Altsaa haaves for den Kraft, hvormed hele Massen, m , tiltrækker M ,

$$kp \iiint \frac{r^2 \sin \Theta dr d\Theta d\alpha (a - r \cos \alpha)}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$
; og heri et yderligere

Beviis for, at det Uendelige paa alle Punkter i Analysen slutter sig sammen med det Endelige, at det Uendelige altsaa dog er endeligt, og det Endelige uendeligt.

