EUCLIDIS ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Det er,

Første Grund

Til

Geometrien,

I det Danske Sprog oversat

Af

ERNEST GOTLIEB ZIEGENBALG.

KIØBENHAVN,
Trykt hos Ernst Henrich Berling, 1744.

Imprimatur.

J. P. ANCHERSEN Dr.

Den Stormægtigste
Monarch
CHRISTIAN
den Siette,

Konge til Danmark og Norge,
de Venders og Gothers,
Hertug udi Slesvig, Holstein, Stormarn
og Dytmarsken,
Græve udi Oldenborg og Delmenhorst, ꝛc.

Min Allernaadigste
Arve-Konge og Herre.

Stormægtigste Allernaadigste

Arve-Konge og Herre!

Efterat Deres Kongelige Majestæt Allernaadigst havde forundt mig et Stipendium paa toe Aars Tiid for at fortsætte mine Studeringer udi Theologien ved Universitætet udi Jena og da jeg mine Studia Theologica der allerede udi Aaret 1738 hafde absolveret og befant mig ikke udi Predike-Stolen og Cathedra Theologica saaledes begavet, som det maatte udkræ-

udkræves og jeg gierne hafde ønsket, har det siden behaget Deres Kongelige Majestæt paa min derom allerunderdanigst giorte Forestilling Allernaadigst at tillade mig at reyse over til Engeland, for der des bedre at kunde anvende min Tiid paa Mathematiske Videnskaber, som jeg ogsaa i nogle Aar tilforn paa de tvende Universitæter Tubingen og Jena tillige med Theologien havde lagt mig efter. Saadan Deres Kongelige Majestæts Høye Naade bør jeg min Lives Tiid med allerunderdanigste Taknemmelighed ihukomme og til en liden Prøve, at jeg saavel i Tydskland, som siden 2 Aar udi Engeland og nu paa tredie Aar efter min Hiemkomst haver med Fliid arbeidet paa Mathematiken, offereres Deres Kongelige Majestæt udi allerdybeste Underdanighed disse udi det Danske Sprog oversatte Elementa

 Geo-

Geometriæ, som ere Hoved-Kilden til alle Mathematiske Videnskaber og have nu i 2000 Aar været i saa stor Estime, at alle de største og erfarenste Mathematici have grundet deres Skrifter paa dem og at de til almindelig Nytte og Brug ere bekientgiorte næsten udi alle Europæiske, men ey tilforn i dette Sprog.

At **Deres Kongelige Majestæt** dette mit ringe Arbeyde Allernaadigst vilde optage, er det, som jeg allerunderdanigst ønsker og begierer. Jeg forbliver min Livs Tiid

Deres Kongelige Majestæts

Allerunderdanigste Arve-Undersaat
og Tro-pligtigste Tienere
ERNEST GOTLIEB ZIEGENBALG.

J. F. RAMI

Betænkning om Euclidis Elementer og om deres Oversættelse i det Danske Sprog.

Der have adskillige Mathematici og Mathematum studiosi foretaget sig at ville vise os en kortere Maade at lære Mathematiken end af disse Euclidis Elementer: Hvad de dermed have udrettet, kand her ikke tales meget om: thi med faa Ord at sige, da ere Euclidis Elementer det ældste og eeneste Document, hvorpaa ald Mathematik er grundet, og de beholde nok den Priis og Berømmelse, som de hidindtil udi To Tusinde Aar have haft. De Navnkundigste Mathematici blant de Græker, saasom Archimedes, Apollonius, Theodosius, Ptolomæ-

us

us &c. &c. have alle bygget deres Lærdomme, Inventa og Skrifter paa disse Elementer; De største Geometræ og Algebraister, som nu i de sidste 200 Aar have arbeidet paa at forbedre de Mathematiske og Physiske Videnskaber, stemme alle overeens herudi, at Mathematikens Principia og første Grund maa nødvendig tages af Euclide. Hvoraf kommer det vel, at saa mange gamle, skarpsindige, lærde og erfarne Mænd, for Exempel: Fed. Commandinus (a), Chr. Clavius (b), G. Schottus (c), If. Barrow (d), If. Newton (e), G. G. Leibnitz (g), E. W. de Tschirnhausen (h), D. Gregorius (i), Joh. Keill (k) og mange andre fleere, som her ville blive for vidtløftigt at opregne, ikke har kundet udfinde nogen kortere eller tienligere Vej til at lære os Geometriens første Principia, men de tilstaae, at Euclides i denne Post er den beste og eeneste Lære-Mester? ja de fleeste af disse ypperlige Mænd have selv i mange Aar med stor Berømmelse docerit Mathematiken paa Gymnasier og Universitæter og have anvendt megen Fliid og Bekostning paa dette Systema Elementare at oversætte af det Grækiske i det Latinske Sprog og paa at udgive det i sin rigtige Orden og Skik saaledes, som det fra Førstningen af har været indeelt og inrettet. Naar nu saadanne habiles og kyndige Mænd have giort sig saa stor U-mage for at conservere disse Ele-

(a) Fed. Commandini Prolegomena in Elementa Euclidis. Pisauri. 1619.
(b) Christoph. Clavii Proleg. in Elem. Eucl. Moguntiæ 1611.
(c) G. Schotti Cursus Matth pag. 61 & 62. Herbipoli 1661.
(d) If. Barrowii Præf. in Elem. Eucl. Londini 1678.
(e) vid. Acta Erud. A. 1730. pag. 330.
(g) vid. Wolfii Elem. Math. univ. Tom. V. pag. 36.
(h) Tschirnhausens Gründliche Anleitung zu nützlichen wissenschaften, absonderlich zu der Mathesi und Physica. 8. Leipz. 1712.
(i) Dav. Gregorii Præf. in Opera omnia Euclidis Oxoniæ 1703.
(k) Joh. Keillii Præf. in Elementa Euclid. Oxoniæ 1715.

Elementer u-forandrede udi deres Tal og Orden, fordi de ere ej alleeneste den pure og rette Hoved-Kilde, hvoraf alle gamle og nye Inventa udi de Mathematiske Videnskaber have deres Udspring og Oprindelse, men endogsaa fordi de citeres allevegne, saa at man ikke kand forstaae, hvad Archimedes og de fleeste Mathematici udi deres Videnskaber have skrevet, uden man tager samme Elementer til Hielp; Hvad behøves her da videre Prøver eller Beviis om, at jo den beste og korteste Maade at lære Mathematiken er at begynde af Euclidis Elementer? Vil man sige, at denne Bog er alleene nyttig og fornøden for dem, som agte at giøre Profession af de Mathematiske Videnskaber, men at den er formeget vidtløftig og vanskelig for andre, som ikke ville gaae saa vidt udi disse Videnskaber. Hertil svares: Naar man har en Kilde, der aldrig udtømmes eller udtørres, kan man jo deraf tage saa meget eller lidet, som man behøver, saa at man ej har nødig at søge efter Vand udi smaa Bekke, Krukker og Kraage; ligesaa kand ogsaa enhver af denne Bog tage hvor meget eller lidet han til sit Brug maatte behøve og forlange, for Exempel: Dennem, som ville vide noget af Geometrien, Mechaniken, Geographien, Fortificationen, Byg-Kunsten eller andre Mathematiske Videnskaber, naar de ikke kand have Tid eller Taalmodighed til at igiennemgaae Theorien udi Elementerne, men ville strax begynde af Praxi (hvilket de fleeste finde Behag udi), kand man jo lære de fornemste og nyttigste Praxes udi saadanne Videnskaber, og derhos allene citere af Euclidis Elementer de Principia eller Propositioner, hvorpaa deres Praxes ere grundede. Dem, der ville gaae videre frem og forlange at viide noget af Theorien, kunde man lære Definitionerne, Postulata og Axiomata og forklare for dem de nyttigste Theoremata ved Exempler, og vise dennem de tvende slags Demonstrations

)(Maa-

Maader, som Geometræ bruger, hvilket ligeledes ved nogle faa og korte Exempler af disse Elementer kunde skee. Men for dem, der have Lyst til at gaae meget vidt og grundigt til Verk udi alle Mathematikens Videnskaber, er det fornøden, at gaae denne gandske Bog igiennem og at øve sig vel udi Demonstrationerne, saa falder alt det øvrige dennem siden let at fattte og forstaae.

Efterat her korteligen er meldet om hvorledes enhver kand benytte sig af disse Elementer, det være sig meget eller lidet han agtede at lære, saa staar nu her ikkun tilbage, at vise hvad Gavn og Nytte det er at have samme Elementer udi vort Fædernelands Sprog. Erfarenhed og andre Nationers Exempler kand best oplyse os om denne Sag: Thi omendskiønt saa mange brave og lærde Mænd, som tilforn sagt er, have udgivet Elementa Euclidis i det Latinske Sprog, fordi de holde dennem saa høit fornøden og nyttige for den paa Universitætet studerende Ungdom at øve sig udi, paa det de herved kunde blive beqvemme til at fatte og forstaae Philosophiens rette Grund og Sammenhæng (l); ligesom der ogsaa fortælles (m), at den store Philosophus Plato ikke vilde tillade nogen at indkomme paa hans Philosophiske Collegium, uden de først havde lært Geometrien; Saa er dog ikke hermed meent eller sagt, at Mathematiken er alleene for studiosis Philosophiæ; Men dens egentlige Brug og Nytte erfares best in Vita militari & civili, det er, udi Kriigs-væsenet og udi den Civile Stand. Thi hvor mange store Ingenieurer, Søemænd, Bygmestere, Mechanici, Optici og andre Kunstnere findes der ikke udi Frankrige, Engeland, Holland og andensteds, som vide gandske lidet

(l) vid. Philippi Melanchtonis Fortale over Euclidis Elementa, dat. Wittenberg 1537.

(m) vid. Diogenes Laertius Libr. III. c. 5.

det af det Latinske Sprog og slet intet af den Academiske Philosophie at sige? De have Euclidis Elementa og alle andre herpaa grundede Videnskaber i deres egne Tungemaale udgangne, saa at enhver, som har Lyst og Genie til Mathematiken, kand hielpe sig fort derudi uden at anvende sin beste Tiid paa fremmede Sprog: Thi naar de ikkun først nogenledes have lært at skrive og regne, kand de strax begynde paa Geometrien, og herudi gaae saavidt, som enhver til sin Profession finder fornøden. Man skulle ikke tvivle om, at jo iblant de mange, der gaae udi de Danske Regne- og Skrive-Skoler i Danmark og Norge, fandtes jo adskillige, der kunde være meget vel skikkede til at blive med Tiden habiles og dygtige Mænd udi een eller anden af de foromtalte Professioner og Videnskaber; Men intet er derved at giøre, naar dennem udi deres unge Aar fattes de rette Principia, Bøger og Underviisning, thi siden naar de skal fortiene deres Brød, er det forsilde med dem derudi at begynde. Hvad nu Geometriens Principia og Theorie angaaer, da haver den hæderlige og vellærde Theol. & Mathem. Studiosus Ernest Gotlieb Ziegenbalg beviist Fæderne landet en roesværdig Tieneste ved at udgive dette Danske Systema Elementare, som indeholder den første Grund til Geometrien og alle andre Mathematiske Videnskaber. At denne saa nyttige Bog aldrig tilforn er seet i det Danske Sprog (n), kand man ikke undre over: Thi for det første hører der et grundig Begreb af Theorien til saadant Verk rigtig at oversætte; for det andet udkræves megen Speculation og Møye til at udfinde saadanne Ord og Talemaader i vort Danske Sprog, hvorved Tex-

)(2 tens

(n) Thi Georg Mohrs Euclides Danicus, som i det Danske Sprog er udgaaen i Amsterdam 1672 in 4to uden Figurer, indeholder alleeneste nogle faa Problemata uden Demonstration og Connexion, og Euclidis Navn er føyet dertil for derved at give dette lidet Skrift en Anseelse.

tens rette Meening og Forstand kort og tydeligen kunde forestilles; og for det tredie falder disse slags Bøger med tilhørende Figurer kostbare i Trykken at udgive, derimod findes ikkun faa Liebhabere og Kiøbere, saa at man ikke kand vente den halve Deel af Bekostningen igien betalt, og for sin megen derpaa anvendte Møye og Tidspilde har man slet intet. For det øvrige har dog Monſ. ZIEGENBALG forskaffet sig den Berømmelse, at han er den første, som saadant har præsteret og at han derved haver viist en tilstrekkelig Prøve paa, at han er i Stand til at tiene Publico med sin Lærdom og Videnskab i Mathematiken; hvortil jeg vil ønske ham Lykke og de Midler, som dertil udkræves.

For-

Fortale.

Eftersom disse Euclidis Geometriske Elementer indeholde den første Grund til den heele Mathematic, saa burde jeg vel paa dette Sted at mælde noget om Mathematiken, hvad den er, hvorledes den inddeeles og paa hvad Maade den best kunde læres; men da jeg finder derom tilforn udi vort Danske Sprog at være handlet udi Fortalen over Wolfens første Grund til alle Mathematiske Videnskaber trykt her i Kiøbenhavn 1741, er mig Leylighed og Anledning dertil allerede betaget. Derimod, efterdi jeg ey finder noget udi vort Danske Sprog at være skrevet om Mathematikens og i Særdeleshed Geometriens og Arithmetikens Oprindelse og Fremvext, saa har jeg her villet indføre Andreæ Tacquets Historiske Beretning derom, hvorudi man tillige ogsaa haver en kort Underretning om disse Euclidis Elementer. Dernæst har jeg ogsaa agtet fornøden at give en liden Oplysning om den Methode eller Lære-Maade, som Euclides bruger, samt om Indholdet og Nytten af hver Bog i disse Elementer. Dog, forend jeg gaaer videre, maae jeg melde dette, at eftersom den 7de, 8de og 9de Bog af Euclidis Elementer handler om Tal og den 10de Bog er grundet paa samme tre Bøger, saa har jeg ikke villet oversætte bemælte fire Bøger udi vort Danske Sprog, men herudi efterfuldt den Maade, som kyndige og erfarne Mathematici bruge i at meddeele Publico de 6 første Bøger tillige med den 11te og 12te Bog, helst saasom disse sidstbemældte 8te Bøger holdes for at være noksom tilstrekkelige til deraf at lære Geometriens første og fornemmeste Grund.

Nu følger da efter Løfte

I. En Historisk Relation eller Beretning, som findes af den berømte Geometra Andreas Tacquet udgiven om Mathematikens Oprindelse og Fremgang.

Dersom man skal troe, hvad Josephus udi sin Jødiske Histories 1 Bogs 3die Cap. skriver, da har Mathematiken været den første Videnskab, som Menneskene have lagt sig efter. Thi som han fortæller, skal Seths Børne-Børn have beflittet sig paa at observere Himlens og Stiernernes Løb; Og efterdi Adam (som han siger) havde forud forkyndet, at den heele Verden skulde forgaae engang ved en Vandflod og en anden gang ved Ild, saa skal de have oprettet to Støtter, den ene af Tegl-Steene og den anden af Kampe-Steene, og paa disse to Støtter skal de have skrevet de Ting, de havde observeret, paa det at, i fald den Støtte, som var giort af Tegl-Steene skulde forgaae ved en Vandflod, Steen-Støtten maatte blive bestaaende, at Efterkommerne deraf kunde lære og see de Ting, som derpaa vare skrevne. Denne Steen-Støtte siger Josephus at være den selv samme, som endnu i hans Tiid var at see i Syrien. Men dette lader man staae ved sit Værd.

Samme Josephus, samt Plinius, Diodorus, Cicero og andre berette, at de Assyrier og Chaldæer vare de første, som efter Syndfloden lagde Vind paa Mathematiken. Siden bleve de Mathematiske Videnskaber, som saaledes skal have haft deres Oprindelse og været i stor Floor og Anseelse hos Chaldæerne, af Abraham bragt fra Chaldæa og Assyria hen til Ægypten. Thi da Abraham efter GUds Befalning havde forladt sit Fæderneland og var kommet til Cannaans Land og derfra til Ægypten, og han saae, at Ægyterne havde baade Begierlighed og Nemme til at lære gode Kunster og Videnskaber, saa skal han, som Josephus fortæller i hans 1ste Bogs 9de Cap., have lært dem Arithmetiken og Astronomien og følgelig ogsaa Geometrien, som er Grun-

den

den til Astronomien. Efter den Tiid giorde Ægypterne saadan Fremgang udi samme Videnskaber, at Aristoteles 1 Met. Cap. 1. siger, at de Mathematiske Videnskaber vare opfundne i Ægypten af Præsterne, som vare fri for publique Forretninger.

Siden blev Mathematiken fort fra Ægypten over Havet til de Grædske Philosophos. Thi Thales Milesius, som levede 584 Aar for Christi Fødsel, var den første blant Grækerne der bragte Geometrien fra Ægypten til Grækenland. Denne Mand udfandt, foruden andre Ting, den 5te, 15de og 26de Propositioner, som findes udi den første Bog af disse Euclidis Elementer. Ham tilskrives ogsaa den fierde Bogs 2, 3, 4 og 5 Propositioner, og han siges af Glæde over disse af ham udfundne Propositioner at have offret en Stüd. Han begyndte ogsaa, som Laertius vidner, at observere Soolhverv og Jevndogn (Solstitia og Aquinoctia). Ligeledes var han, (som Hippias og Aristoteles berette) den første der forud sagde, naar Solens Formørkelser skulle skee; og Tzezes beretter, at han skal have forud forkyndet Kong Cyro Maanens Formørkelse. Hvorudover denne Mand holdes for at have været den første, der paafandt de Mathematiske Videnskaber i Grækenland.

Efter ham kom Pythagoras Samius, den ældste Philosophus, som meget forfremmede de Mathematiske Videnskaber. Han lagde sig saa stærkt efter Arithmetiken, at hans Philosophie var meestendeels grundet paa Tal. Han var, efter Laertii Beretning, den første, der betragtede Geometrien uden at have nogen Agt eller Henseende til Materie, og udi saadan Sindets Elevation eller Ophøyelse udfandt han den første Bogs 32, 44, 47 og 48de Proposit. udi Eucl. Elem.; men han berømmes allermeest for den 32te og 47 Proposit., over hvilken Invention han blev saa fornøyet, at han, som Apollodorus vidner hos Laertium, offrede 100 Stude til de Gudinder, som kaldtes Musæ. Samme Pythagoras var den første, der udfandt saadanne Størrelser, som ikke kand maales med et fælles Maal (Magnitudines incommensurabiles), saa og de 5 regulaire Corpora *, nemlig en Cubum, et Tetraedrum, Octaedrum, Doctecaedrum og Icosaedrum, som findes beskrevne udi Euclidis Elementers 11te Bog. Han baade lærte andre og ovede sig selv meget flitteligen udi Astronomien og Musiken; thi han ikke allene ste skarpsindigen udfandt mange Ting, men var ogsaa den første der oprettede en Skole, udi hviken han underrettede Ungdommen i disse Videnskaber.

Efter Pythagoram fuldte Anazagoras Clazomenius og Oenopides Chius, om hvilke Plato taler udi hans Skrift kaldet Amatores eller Elskere, hvor han forestiller to unge Personer, som beskreve Cirkler og derover faldt i Disput om disse to Mænd Anaxagoras og Oenopides. Aristotoles melder, at Anazagoras har skrevet en Bog om Geometrien, og udi Laertio læses, at bemeldte Anazagoras skal have viist Solen at være større end Peloponesus, som nu kaldes Morea (heraf seer man hvor slet og ringe deres Astronomie paa de Tider har været) og videre siges, at han skal have giort nogle Gisninger om Indbyggere i Maanen. Hvad Oenopides anlanger, da tilskriver Proclus ham den første Bogs 12te og 23de Proposit. udi Euclidis Elementer. Efter disse to Mænd kom Briso, Antipho og Hippocrates Chius, hvilke alle bleve af Aristotele lastede og tillige ogsaa berømmede, fordi de havde paataget sig at udfinde Qvadraturam Circuli. ** Iblant disse har Hippocrates været den berømmeligste; thi han blev af en Kiøbmand en Philosophus og Geometra og for=

* Corpora, som ogsaa kaldes Solida, ere de slags Størrelser, som have Længde, Brede og Tykkelse, om hvilke Euclides handler udi disse Elementers 11te og 12te Bog.

** At qvadrere en Cirkel eller at udfinde Qvadraturam Circuli er at finde, hvad Proportion en Cirkel har til den Qvadrat, som beskrives paa Cirkelens Diameter, eller ogsaa hvad Proportion Cirklens Diameter har til Peripherien.

forsøgte ikke alleneste at udfinde Qvadraturam Circuli, men var ogsaa den første, der fandt paa at duplere en Cubum * eller at giøre en Cubum to gange større formedelst to Middel-Proportional Linier, og saasom dennne hans Maade er fortreffelig og den eneste man kand bruge, saa er den af alle Efterkommere bleven antagen og fuldt. Iligemaade tiener dette ogsaa til hans store Berømmelse, at han (som Proclus vidner) var den første, som skrev Elementa og satte de Ting i Orden, som andre før ham havde udfundet.

Democritus var en ypperlig Mand ikke alleneste i Philosophien, men endogsaa i Mathematiken. Han har skrevet Physiske og maaskee ogsaa Mathematiske Skrifter, som efter nogles Meening ere blevne undertrykte ved Aristotelis Misundelse, som vilde, at hans egne Skrifter allene skulde læses. Democriti Philosophie har Petrus Gassendus restituered. Hvad Theodorus Cyrenæus angaaer, da, endskiønt hans Mathamatiske Inventioner ere nu ikke meere til, saa var han dog for denne Aarsags Skyld en stor Mand, at han siges at have været Platonis Lære-Mester.

Nu kommer vi da omsider til Platonem, som frem for nogen anden har tilveye bragt Mathematiken stor Splendeur og Anseelse. Ved den u-troelige Fliid, han anvendte paa Geometrien, formeerede han denne Videnskab med et Tillæg af mange nye Propositioner. Og i Særdeleshed er Analysis af ham opfunden, som er den visseste Vey og Maade at udfinde og raisonere paa. Hans Philosophiske Bøger har han udstafferet med Mathematiske Beviis og Exempler, og han udsøgte alt det, der er grundigt i Mathematiken og som har en Connexion og Forbindelse med Philosophien. Over Døren af hans Academie eller Skole stode disse Ord skrevne ὀδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω: Ingen, som

* Hvad en Cubus er, findes beskreven udi denne Bog pag. 218.

som er u-kyndig i Geometrien, maae komme herind; hvorved han klarligen gav tilkiende, at Mathematiken ikke er en Videnskab, som er den sunde og rette Philosophie u-vedkommende, u-nyttig og u-anstændig, men at den meget meere hører egentlig til Philosophien og tilføyer den stor Anseelse og Nytte. Kort sagt, hvor høyligen Plato har elsket og agtet Mathematiken, kand enhver, som igiennemlæser hans Skrifter, letteligen see og skiønne paa.

Udaf Platonis Skole udkomme mange Mathematici. Proclus opregner tretten, som vare Platonis Venner, med hvilke han ideligen havde conversation og ved hvis fliid og Arbeyde Mathematiken blev bragt til stor Fuldkommenhed. Blant dem vare Leodamus Thasius, Archytas Tarentinus og Theætetus fra Athenen, hvilke Mænd besynderligen forfremmede de Mathematiske Videnskaber. Leodamus lagde sig efter den af Platone udfundne Analysis og ved dens Hielp skal han, som Laertius melder, have udfundet mange Ting. Det som giør Theætetum berømmelig, ere deels de Ting, han har udfundet, hvoriblant de Elementa, han skal have skrevet, saa og hans Skrift om at indskrive regulaire Corpora inden i hinanden holdes for de Beste, deels ogsaa den Berømmelse, hvilken Plato har givet ham ved den Dialogum eller Samtale kaldet: Theætetus. Archytas skrev ogsaa Elementa og hans Maade at duplere Cubum paa findes hos Eutocium, og dette tiener ham ogsaa i Særdeleshed til Berømmmelse, at han var næsten den første, der anvente og applicerede Mathematiken til Menneskens Nytte og Brug; Gellius fortæller om ham, at han giorde en Due af Træe, som kunde flyve. Denne Mand, saavelsom ogsaa de efterfølgende Konstnere Dædalus og andre gave Leylighed og Materie til Poëternes Fabler. Ydermere maae ogsaae dette meldes om Archytas, at han baade var en Mathematicus og en General over en Armée; thi udi hans Fædernelands Kriige commanderede han fem gange de af

hans

haus Medborgere udrustede Arméer og vandt ogsaa fem Feldtslager. Om Neoclides er os intet bekiendt uden hans blotte Navn, thi han var maaskee meere beromt ved hans Discipel Leon, end af hans egne Inventioner. Samme Leon har sammenskrevet Elementa eller de forste Grund-Lærdomme af den heele Mathematic og forbedret dem og giort dem meere beqvem til Brug. Hvorfore han ogsaa holdes for at have været een af de Beste, der have sammenskrevet Elementa.

Eudoxus Cnidius, som gav de forbemældte Mænd intet efter, var en stor Mand i Arithmetiken og ham (dersom man ellers tor troe den Grædske Scholiastes) har vi at takke for den heele femte Bog af Euclidis Elementer. Han sammenskrev ogsaa selv Elementa og giorde dem meer almindelige, og foregede de af Platone begyndte Sectioner; tilmed var han den forste, som paafandt Astronomiske Hypotheses og han viisede ogsaa (som Archytas havde giort for ham) hvor nyttig og fornoden Geometrien er udi Mechaniken og til at indrette kunstige Machiner. Amyclas Heracleotes, Menæchmus og hans Broder Dinostratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, som alle vare Platonis Tilhængere, giorde Geometrien fuldkomnere end den tilforn havde været. I Særdeleshed udfandt Menæchmus de Coniske Sectioner og ved deres Hielp to Middel-Proportional Linier og denne hans Maade holdes af Eutocio for at være den Beste af alle. Theudius og Hermotimus giorde Elementa meer universal og fuldkommen. Alle disse Mænd, siger Proclus, ere udkomne af Platonis Skole og have bragt den Mathematiske Philosophie til stor Fuldkommenhed. Endogsaa Xenocrates og Aristoteles, som begge havde været Platonis Tilhorere, havde ogsaa tilveye bragt sig stor Berommelse formedelst deres Kundskab i Mathematiken. Den forste nemlig Xenocrates, da een, som var u-kyndig i Geometrien, begierte at underviises af ham udi Philosophien, svarede ham: Abi, ansas enim

Phi-

Philosophiæ non habes, gak bort, thi du har ikke Noglen til Philosophien.

Men hvad skal jeg sige meget om Aristoteles? Alle hans Bøger ere jo opfyldte med Mathematiske Exempler, hvilke Blancanus har sammensamlet og giort en heel Bog deraf. Af Aristotelis Skole ere to berømmelige Mænd komne, nemlig Eudemus og Theophrastus. Denne har skrevet to Bøger om Tal, fire om Geometrien og en om u-deelelige Linier (de Lineis individuis); Den anden skrev en Historie om Mathematiken, af hvilken Proclus og de andre Historie-Skrivere have laant deres. Aristæo, Isidoro, Hypsicli, som vare meget skarpsindige Geometræ, have vi at takke for de Bøger, som handle om Solidis eller om de slags Størrelser, der have Længde, Breede og Tykkelse. Efter dem alle kom Euclides, * som samlede, satte i Orden, formeerede og beviiste med største Skiønsomhed og Accuratesse, de Ting, som andre havde udfundet i Geometrien og han efterloed os de Elementa, ** udi hvilke

* Den lærde Jo. Gerh. Vossius mælder udi hans Bog de Natura & constit. universæ Math. cap. 15, at Euclides oprettede udi Byen Alexandria en Skole, som kom i saa stor Floor og Anseelse, at der neppe fandtes nogen god Mathematicus, efter Euclidis Tid indtil Saracenernes Tider, som ikke enten var fød i Alexandria eller havde der studeret Mathematiken.

** Disse Elementa Euclidis, som Tacqvet her taler om, ere de selv samme, som her findes oversatte i vort Danske Sprog. Denne Bog er det ældste Geometriske Skrift, man nu har, thi alle de Elementa og Geometriske Skrifter, som efter Tacqvets Relation vare skrevne for Euclidis Tider, ere alle undergangne. Den var allerførst skreven i det Grædske Sprog; siden blev den overſat paa Arabisk og Anno 1001 første gang i det Latinske Sprog af Joh. Campanus. Denne Bog (siger Clavius udi hans Prolegom. in Elementa Euclidis) kaldes derfore Elementa Geometriæ eller den første Grund til Geometrien, fordi man uden at forstaae den u-muligen kand læse og langt mindre have nogen Nytte af noget Mathematisk Skrift, eftersom alle Mathematici saasom hvilke Ungdommen nu omstunder paa alle Steder oplæres og underviises til Mathematiken. Han døde 284 Aar for Christi Fødsel. Næsten 100 Aar efter Euclidem kom Eratosthenes og Archimedes. Af Archimedis Skrifter have vi endnu mange, men mange have vi ogsaa tabt.

Men naar jeg nævner Archimidem, saa forestiller jeg mig den høyeste Spidse af Menneskelig Skarpsindighed og alle Mathematiske Videnskabers Fuldkommenhed. Hans forunderlige og herlige Inventioner have Polybius, Plutarchus, Tzezes og andre beskreven. I Archimedis Tid levede Conon, en Geometra og Astronomus, hvis Død Archimedes beklager i hans Bog de Qvadratura Parabolæ. Ikke lang Tiid efter Archimedem og Cononem kom Apollonius Pergæus, som ogsaa var en Mestere i Geometrien, og blev kaldet den store Geometra. Hans 7 meget skarpsindige Bøger om Coniske Sectioner ere endnu til. Ham tilskrives ogsaa Euclidis 14de og 15de Bog, som af Hypsicle ere bragte i et kortere Begreb. Hipparchus har skrevet 6 og Menelaus 12 Bøger (de Subtensis in Circulo) om rette Linier, som ere afpassede i

saasom Archimedes, Apollonius, Teodosius &c. have udi deres Demonstrationer brugt disse Euclidis Elementa, som Principia, der allerede vare beviiste og af alle antagne. Derfore (siger bemældte Clavius) ligesom den, der vil lære at læse, først lærer Bogstaver og siden repeterer og bruger dem i alle Ord, saa maae ogsaa den, som begierer at lære andre Mathematiske Videnskaber, først og forud fuldkommeligen og grundeligen forstaae disse Geometiske Elementa. Den berømte Mathematicus Christian Wolf siger udi hans Elem. Math. univ. (som udkom Anno 1741) Tom. 5. pag. 36. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, Reformatores Elementorum Euclidis non fuisse in ausu suo satis felices; sed Euclidis Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse, det er, foruden mig have ogsaa andre Mathematici fornummet og erfaret, at de som have villet forbedre Euclidis Elementa, have ikke været meget lykkelige i deres foretagende, men at Euclidis Elementa endnu billigen bære Prisen.

en Cirkel, og saasom disse to Mænd vare de første, som handlede om denne Materie, saa er man dem begge derfor ikke ringe Ære og Tak skyldig. Vi har ogsaa endnu Menelai tre Bøger om Sphæriske Triangler. Theodosii tre Bøger om Sphæriske Triangler ere meget nyttige, hvorfore de ogsaa ere i alles Hænder. Disse Mænd, som nu ere omtalte, have alle, undtagen Menelaus, levet for Christi Fødsel.

70 Aar efter Christum kom Claudius Ptolomæus til Verden, som var den fornemste blant Astronomos og en Mand af forunderlige og (efter Plinii Ord) meere end menneskelige Gaver. Han var særdeles vel forfaren ikke alleneste i Astronomien, men endogsaa i Geometrien, hvilket kand bevises baade af de mange Ting, han har skrevet, saa og i Særdeleshed af hans Bog de Subtensis in Circulo, udi hvilken findes 5 Theoremata, som indeholde alt det, hvad Menelaus udi hans ovenmeldte sex, og Hipparchus udi hans 12 Bøger have skrevet om samme Materie. Den høytberømte Philosophi Plutarchi Mathematiske Problemata ere endnu til. Eutocius Ascalonita er noksom bekiendt af hans lærde Commentarier over Archimedem og Apollonium. Samme Eutocius har opregnet Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, som vare store Mestere i Mathematiken, deres Maader at duplere Cubum. I Særdeleshed havde Hero et kosteligt Hoved baade til Mechaniken og Geometrien. Den Maade han brugte til at duplere en Cubum, berømmes frem for alle andre af Pappo Libr. 3. p. 7. Ctesibius Alexandrinus var den første der opfandt Pumper og hans forunderlige Verker berømmes af Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo og andre. Geminus havde heller ikke et slet Navn iblant Mathematicos, thi Proclus agtede ham i visse Ting høyere end Euclidem selv.

Diophantus, som ogsaa var fra Alexandria, var lige saa stor en Mand i Arithmetiken, som Archimedes, Apollonius og Euclides vare re i Geometrien; og saasom han var en Mestere af alle Arithmetiske Subtilitæter, saa udfandt han ogsaa den admirable Kunst kaldet Algebra, * som udi vore Tider er giort meget meere fuldkommen og universel af de to Mænd Franciscus Vieta og Renatus Cartesius.

Iblant de Gamle ere endnu disse følgende Navnkundige, nemlig Nicomachus, som er bekiendt af hans Arithmetiske, Geometriske og Musicaliske Skrifter; Serenus, som har skrevet to Bøger om en Cylinders og Coni Section; item Proclus, Pappus og Theon. Hvor stor en Mathematicus Proclus har været, er klart af hans lærde Commentarier over Euclidem og af hans andre Skrifter; og denne Mand, meener jeg, er den samme, om hvilken Zonoras og af ham Petrus Ramus og Baronius fortæller, at han opbrændte ved et Optisk Kunstgreb formedelst Brændspeile Vitaliani Flode, som beleyrede Constantinopel. For at giøre en Ende paa denne Relation, saa maae Pappus slutte Troppen. Han var vel iblant de Gamle den sidste i Henseende til Tiden, saasom han levede 400 Aar efter Christi Fødsel, men i Henseende til hans berømmelige Navn og Kundskab i Mathematiken, bør han regnes blant de første. Byen Alexandria, som havde været frugtbar paa store Mænd, og forhen havde frembragt Hypsiclem, Ctesibium og Diophantum, gav os ogsaa denne Pappum til Mathematikens store Gavn og Forfremmelse. Han

skrev

* Algebra er en Videnskab, som lærer at opløse alle muelige Arithmetiske, Geometriske og andre Mathematiske Problemata eller Spørsmaal. Denne Videnskab har ved Slutningen af det sidstafvigte Seculo faaet en langt anden Anseende end den havde i Tacquets Tider, ved de to nye Regne-Maader kaldede differential- og Integral-Regningen eller Methodus Fluxionum directarum & inversarum, som den store Engelske Mathematicus Isaac Newton, eller (som de Lærde i Tydskland foregive) Gotfr. Wilh. Baron von Leibnitz har udfundet og hvorved mange herlige Ting udi Mathematiken ere udfundne og endnu dagligen udfindes.

skrev otte Bøger kaldede (Collectiones Mathematicæ) Mathematiske Samlinger, af hvilke de to første ere undergangne, men de sex sidste indeholde saa mange og saa adskillige herlige Inventioner af alle Mathematikens Deele, at de kand regnes iblant de Fornemmeste af de Gamles Skrifter.

Her have vi da seet en kort Historie om Mathematikens Oprindelse og Fremvext, af hvilken man kand see Mathematikens Ælde, Ypperlighed og Værdighed og at de samme store Mænd i den lærde Verden, som have bragt Philosophien for Lyset, bragte ogsaa Mathematiken for Dagen.

II. En kort Underretning om Methoden.

Den Methode eller Lære-Maade, som Euclides og næsten alle Mathematici bruge i deres Skrifter og som derfore ogsaa kaldes den Mathematiske eller Geometriske Methode, bestaaer derudi, at der forudsættes tre slags Principia, nemlig

1.) Definitiones, som forklare, hvad der skal forstaaes ved nogle visse Ord, som ikke udi almindelig Tale forekommer, men egentligen og i Særdeleshed udi Mathematiske Videnskaber blive brugte.

2.) Postulata, hvorved begieres, at den, som agter at lære Geometrien, skal forud viide i Gierningen at udføre noget, som intet Menneske nægter at være giørligt, saasom at drage en ret Linie imellem to Punkter.

3.) Axiomata, hvilke ere saadanne aabenbare og i sig selv klare Sandheder, som intet fornuftigt Menneske nægter, for ex. at det heele er større end en Deel deraf.

Paa disse tre slags Principia grundes alle de følgende Propositiones (Forestillinger), som ere to slags neml. Theoremata og Problemata.

Et

Et Theorema (Lære-Regel) er saadan en Proposition, hvorved man paa visse Vilkaar og Conditioner nægter eller bekræfter noget; som for ex. udi disse Elementers første Bog den fierde Propotion bliver paa disse Conditioner (Dersom to Sider udi en Triangel ere lige saa store som to Sider udi en anden Triangel og om disse Sider ogsaa indslutte lige store Vinkler) affirmeret eller bekræftet, at Grund-Linierne i begge Trianglerne skal være lige store, saavelsom ogsaa Trianglerne selv og ligeledes deres øvrige Vinkler. Iligemaade udi den tredie Bogs 5te Proposition bliver paa dette Vilkaar (Dersom to Cirkler skiære hinanden) nægtet at de kand have et fælles Centrum.

Et Problema (Verk-Stykke) er en Proposition, udi hvilken man paa visse Vilkaar fremsætter noget, som skal udfindes eller i Gierningen udføres. For ex. udi den 1ste Bogs 9de Proposition siges, at man skal deele en given Vinkel i to lige Deele, hvortil føyes dette Vilkaar, at den givne Vinkel skal være retlined eller at de Linier, som indslutte Vinklen skal være rette.

Herved er at merke, at ved det Ord Hypothesis, som tit bruges i denne Danske Version, forstaaes de foromtalte Vilkaar og Conditioner, som findes udi et Theorema eller Problema.

For at giøre Propositionerne tydelige og klare, saa føyes til dem

1. Et Exempel, som ved en Figur viser Meeningen af Propositionen og ordentligen fremsætter først Propositionens Vilkaar eller Hypothesin og dernæst det, som nægtes eller bekræftes, eller og det, som skal udfindes eller i Gierningen udføres.

2. En Construction, som viser at danne og indrette en Figur saaledes, at man derved enten kand finde og iverksætte det som begieres i et Problema, eller bevise det, som nægtes eller bekræftes i et Theorema.

3. En Demonstration eller Beviis. Hvorved er at agte, at der ere toe Maader at beviise en Proposition paa. Den eene Maade kaldes Demonstratio directa eller ostensiva, og bestaaer derudi, at man ordentligen og i en rigtig Sammenhæng udfører eller uddrager en Proposition af de ovenmældte første Principiis eller af andre forud beviiste Propositioner. Af denne Beskaffenhed er det Beviis, som findes ved den 1ste Bogs 5te Proposition, thi deri bliver Propositionen (som lyder saaledes: Udi enhver ligebeenet Triangel ere Vinklerne ved Grund-Linien lige store) udført af den 25 Definition, 3 Axioma, 3die og 4de Proposition. Den anden Maade at bevise paa kaldes Demonstratio indirecta eller Reductio ad absurdum og bestaaer deri, at man klarligen viser, at dersom en Proposition var falsk, saa maatte ogsaa et af de forudsatte Principiis eller en forud rigtig beviist Proposition være falsk og u-rigtig. Et tydeligt Exempel herpaa findes udi Demonstrationen ved den 6te Proposition i den første Bog; thi deri vises, at saafremt bemældte Proposition (som lyder saaledes, dersom to Vinkler udi en Triangel ere lige store, saa skal ogsaa Siderne, som staae imod de lige store Vinkler, være lige store) var falsk, saa maatte ogsaa det 9de Axioma nemlig at det Heele er større end en Deel deraf, være falskt og u-rigtigt, og eftersom dette er u-mueligt og imod Fornuften, saa følger da, at bemældte Proposition ikke kand være falsk, men maae være gandske rigtig.

4. Slutningen, som udi et Theorema udføres med de Ord: Hvilket var det, som skulde bevises; og udi et Problema: Hvilket var det, som skulde giøres.

Et Corollarium (Tillæg) er en Slutning, som letteligen kand udtrekkes af en Propositions Demonstration.

Et Lemma er en Proposition, som man i ingen anden Henseende bru-

bruger, uden ved dens Hielp at bevise alleneste en eneste Proposition; et saadant Lemma har Euclides sat udi disse Elementers 6te Bog efter den 22 Proposition. Iligemaade naar man for en eller anden Aarsags Skyld setter en Proposition paa et Sted, hvor den egentligen ikke henhører, saa kaldes den ogsaa et Lemma; som for ex. den Proposition, som findes udi denne Danske Version pag. 270 er af Euclide demonstreret i hans 10de Bog og hører derfore ikke til den 12te Bog; dog saasom den 10de Bog er ikke oversat i det Danske Sprog og bemældte Proposition bruges til at bevise de fleeste Propositioner i den 12te Bog, saa har jeg maat sætte den sammesteds og kaldet den et Lemma.

Et Scholion (Anmerkning) indeholder en eller anden Erindring, hvoraf kand haves Oplysning om noget, som maatte være nyttigt eller i visse Maader fornøden eller og behageligt at vide. De faa Scholia eller Anmerkninger, som findes udi denne Version ere ikke Euclidis egne, hvorfore de ogsaa ere trykte med smaa Stiil. Herhos maae ogsaa erindres, at for at forstaae de Scholia, som findes i den anden Bog, bør man forud vide de fire Species af Arithmetiken.

Af det, som hidindtil er sagt om Methoden, seer man, at det er fornøden for dem, som agte med Nytte og Fordeel at igiennemlæse dette Skrift, 1) at legge Vind paa at forstaae de forudsatte Definitioner, Axiomata og Postulata og 2) at læse Propositionerne i den Orden, som de findes her i Bogen, fordi de ere saaledes sammenføyede og connecterede med hinanden, at altid de efterfølgende bevises af de foregaaende.

III. Hvad enhver Bog af disse Elementer i sær indeholder og hvortil de ere nyttige, derom finder man udi den Edition af samme Elementer, som

An. 1722 til Cambridge er udgaaen, en udførlig Forklaring omtrent af følgende Indhold.

Den Første Bog.

Udi denne Bog har Euclides villet fremsætte Geometriens første Principia og til den Ende har han forudsat 1) Difinitiones eller Forklaringer paa de Ord, som meest bruges i disse Elementer, 2) nogle Postulata eller Begieringer, som alle fornuftige Mennesker maa tilstaae og endeligen 3) Axiomata, som ere klare og u-imodsigelige Sandheder. Siden bruger han overalt saadanne Demonstrationer og Beviise, som endnu ingen har kundet omstøde, hvor stor Umage end og de allerstørste Critici og Sceptici derpaa allerede udi 2000 Aar have anvendt. I Særdeleshed bevises udi denne Bog rette Liniers, Vinklers, Trianglers, Parallel-Liniers, Firkantede Figurers og i sær Parallelogrammers første og fornemmeste Egenskaber og derhos vises ogsaa, hvorledes man skal deele Linier og Vinkler i to lige Deele, opreise Perpendicular-Linier, forvandle irregulaire retlinede Figurer til andre, som ere regulaire og meere bekiendte, saasom til Triangler, Parallelogrammer og Rectangler.

Den anden Bog.

Denne Bog ligner de Qvadrater og Rectangler sammen, som beskrives af en ret Linie og dens Stykker. Denne Part af Euclidis Elementer er visseligen den allernyttigste og indeholder Grunden til de fornemmeste Algebraiske Operationer. De tre første Propositioner tiene til at bevise Multiplications-Reglerne og den fierde til at bevise Qvadrat-Rodens Extraction; den 6te, 7de og 8de ere meget nyttige i Algebra og de øvrige i Trigonometrien. Denne Bog kommer Begyndere meget tung for i Begyndelsen, fordi de tænke, at der ligger noget forborgent og hemmeligt i den, da dog de fleste derudi forekommende Demon-

mon-

monstrationer ere grundede paa dette klare Axioma, at det Heele er ligesaa stort som alle dets Deele tilsammentagen. Derfore skal Begyndere ikke lade Modet falde, dersom de ikke første gang fuldkommen kand forstaae denne Bog, thi naar de læser den anden gang igiennem, saa vil de da forundre sig over, at de ikke have forstaaet de Ting, som i sig selv ere gandske klare og begribelige.

Den tredie Bog.

Denne Bog forklarer Cirklens Egenskaber og ligner de Linier med hinanden, som ere dragne enten inden eller uden for dens Circumferentz eller Omkreds. Iligemaade viser den, hvad der er at merke om Cirkler, som skiære hinanden eller som røre enten hinanden indbyrdes eller rette Linier. Ydermere ligner den ogsaa de Vinkler mod hinanden, som med deres Spidser staae enten ved Cirklens Centrum eller ved Circumferentzen. Den foredrager ogsaa korteligen den første Grund til de Geometriske Praxes, som udføres ved Cirklens Hielp.

Den Fierde Bog.

Denne Bog lærer at beskrive retlinede Figurer, saasom Triangler, Qvadrater &c udi og omkring en Cirkel, og igien en Cirkel udi og omkring retlinede Figurer. Den er derfore af særdeles stor Nytte i Trigonometrien; thi ved at indskrive retlinede Figurer i en Cirkel lærer man at giøre Tabeller over de Linier udi en Cirkel, som kaldes Sinus, Tangentes og Secantes, ved hvis Hielp Figurer og Corpora kand maales og udregnes. Foruden denne Bog kand man ikke heller retteligen distinguere og adskille Stiernernes Aspecter, som kaldes Qvartilis, Sextilis &c, thi disse beroer aldeles paa retlinede Figurers Indskrivelse udi en Cirkel. Ikke heller kand man vide Cirklens Indhold eller Qvadratur paa nogen anden Maade end ved at beskrive u-tallige retlinede Figurer i og omkring en Cirkel og af deres Indhold finde Cirklens Indhold. Ligeledes at Cirkler have en dupleret Forhold til hinanden sluttes og vides deraf, at de retlinede Figurer, som beskrives i eller omkring dem, have en dupleret Forhold til hinanden. Det falder ogsaa tit for udi Fortificationen eller Kriigs-Bygnings-Konsten, at man skal indskrive Polygoner i en Cirkel, saa at bemældte Videnskab, frem for nogen anden, synes næsten gandske at beroe paa denne Bog.

Den femte Bog.

Denne Bog handler om Størrelsers Proportion i Almindelighed og er aldeles nødvendig til at bevise den siette Bogs Propositioner. Den viiser Maaden at udfinde og beviise Mathematiske Sandheder formedelst Geometriske Proportioner, hvilken Maade er den skarpsindigste, grundigste og korteste og bruges ideligen, ligesom en Mathematisk Logica, udi Geometrien, Arithmetica, Musica, Astronomien, Statica og alle de øvrige Parter af Mathematiken. Den Practiske Geometrie, som lærer at maale og udregne Linier, Figurer og Corpora, er mestendeels grundet paa den Lærdom om Proportioner. Der er ikke een eneste Regel i den heele Arithmetic, som jo kand bevises af denne 5te Bogs Propositioner. De gamles Musica kand med rette siges at have været Geometriske Proportioner, som vare applicerede paa Toner og det samme kand næsten ogsaa siges om Statica, som er en Videnskab, der lærer hvorledes man skal veye alle slags Corpora. Med faae Ord at sige: Dersom den Lærdom om Proportioner tages fra Mathematiken, saa bliver der næsten intet tilbage af nogen stor Værdie.

Den siette Bog.

Udi denne Bog appliceres den herlige Lærdom om Proportion, som udi den foregaaende 5te Bog er afhandlet, paa Linier, Triangler og alle andre retlinede Figurer, og der vises, hvad Proportion bemældte Figurer og deres Sider have imod hinanden og hvorledes de kand giøres stor-større eller mindre efter en vis given Proportion. Den fremsætter ogsaa saadanne visse og klare Principia til at maale Linier, Superficies og Solida, hvilket har sin store Nytte i alle Mathematikens Parter.

Den ellevte Bog.

Efterat Euclidis udi de sex første Bøger har handlet baade om de slags Størrelser, som alleneste have Længde, samt og om de, der have Længde og Breede tillige; saa handler han udi denne 11te Bog om de Størrelser, som have Længde, Breede og Tykkelse og kaldes Solida eller Corpora. De Ting, som afhandles udi denne Bog, ere saa nødvendige, at man foruden deres Kundskab ingen Vey kand komme i nogen af de nyttigste Videnskaber udi Mathematiken; thi Theodosii Sphæriske Bøger, saa og Trigonometria Sphærica, og en stor Deel af Geometria practica, Statica og Geographien beroe derpaa, og de Ting, som ellers ere vanskelige i Gnomonica eller Soelviisers Indretning, Coniske Sectioner, Astronomien, Perspectiven og den heele Optica blive gandske lette, naar man forstaaer de Ting, som i denne Bog foredrages.

Den tolvte Bog.

Saasom Euclides har udi den ellevte Bog handlet om de slags Solida, som indsluttes ved flade Superficies, saa betragter han nu i denne Bog saadanne Solida, som indsluttes ved krumme Superficies, nemlig Cylindrer, Coni eller Kegler og Sphærer. Denne Bog er ogsaa særdeles nyttig, fordi de skiønne Beviise og Demonstrationer, som den store Geometra Archimedes og andre have fremført om Cylindrer, Coniske og Sphæriske Corpora, ere grundede paa det, som i denne 12te Bog af Euclide er beviist.

Forklaring paa de Abbreviaturer, som findes i dette Skrift.

Def. betyder Definition; Ax. Axioma; Post. Postulatum; Prop. Propositio; Constr. Constructio; Hyp. Hypothesis; Cor. Corollarium. Naar der forekommer tvende Tal med en Prik imellem, saa betyder det første Tal Propositionen og det andet Bogen, for ex. 31. 1 betyder den 31 Proposition i den første Bog.

Efterfølgende Vildelser, som i Trykken have indsneget sig, blive rettede saaledes:

Pag.	Lin.	i Steden for	skal læses	Pag.	Lin.	i Steden for	skal læses
9.	21	AC AB	AC, AB	163	10	Omvending	Omsætning
16.	16	sat paa	dragen fra		14	tages fra den	CF tages fra den
18	14	sat paa	dragen fra			foregaaende	foregaaende CD
21	21	ved (Constr.)	(ved Constr.)	166	25	Forhold	Forhold til hinanden
30	11	Prop.	Post.	167	15	F	F (5 Def. 5)
34	23	GCB, DEF	GCB, DFE		28	fierde	femte
35	20	eller	og	183	14	Deel	Deel neml. AF
48	14	(31 Prop.)	(37 Prop.)	190	27	BD	B, D
50	10	Theorema	Problema	194	22	ABC	ABE
54	17	C	E	195	22	GL	GL (19. 6)
55	21	AH	AC	198	23	MF	MF (18. 6)
74	14	31	3	211	14	BD og DC	BA og AC
77	22	af dem største	af dem den største	213	25	tredie	fierde
80	23	Punkt i	Punkt B i	226	28	4	8
89	20	3	5	233	1	Tab. 1.	Tab. 2.
93	5	AEC	AED	240	19	AF	AE
	7	EA	FA	244	1	(75)	(7. 5)
	9	F, G	af de toe Cirkler	253	12	RC, RC	Rc, Rc
			ABC, ADE	256	29	forholder	forholder sig
94	23	C	E	259	31	ACBG	ALBG
95	2	6	7		34	ACBG	ALBG
	15	Punkterne	Punkten	261	28	OF	NF
126	3	DB	DF	266	19	AE	AB
129	25	3	4		20	AB	CD
135	9	saa stor	saa stor som	271	17	saa stor	saa stor som
	17	1	3		23	ogsaa	og saa
143	2	som til D	som C til D	272	21	mindre	større
146	11	fierde	anden	273	27	Følgelig	Følgelig (14. 5)
147	13	KH	LH	274	10	BD	FH
150	10	1	2		11	FH	BD
	23	anden	første	280	10	DEFG	DEFH
151	26	5 Def.	5 Def. 5	284	11	6	5
156	20	K, M, N	L, M, N	288	22	Da nu	Da nu (15. 5)
157	17	6	7	297	15	ATBYCVDQ	ATBYCVDQL
161	12	GN	LN	306	18	opreises	opreises (12. 11)
	21	BD	CD	307	13	BQ	BK

Eucli-

EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Første Bog.

Definitiones (Forklaringer.)

1. En Punkt eller Prikke er det, som ingen Deele har.

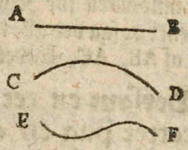
2. En Linie er en Længde foruden Brede.

Endskiønt det ikke er mueligt, at kunde betegne en Punkt saa liden, ey heller nogen Linie saa fiin, som disse Forklaringer udkræve; Saa maa man dog, for at gaae accurat og ordentligen til Verk, i Tankerne forestille sig enhver Punkt saa liden og gandske u-deelelig, ligesom den slet ingen Deele havde, og enhver Linie maae man ansee, ligesom den slet ingen Brede havde.

3. Enderne af en Linie ere Punkter.

4. En Ret Linie er den, som ligger lige udstrakt imellem sine Punkter.

For Exempel; Den hosstaaende Linie, som strækker sig lige ud imellem A og B, er en ret Linie; De andre Linier, som sees imellem CD og EF, kalder man krumme eller krogede Linier.



5. En Superficies er det, som har alleeneste Længde og Brede.

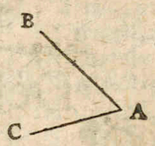
For Exempel: Et Landskabs eller en Søes eller en anden Tings udvortes Skikkelse og Strekning i Længde og Brede kaldes en Superficies, naar man ingen Agt eller Henseende har til nogen Dybhed eller Tykkelse: Ligeledes ere alle Tegninger og Skilderier intet andet end Afbildninger paa adskillige Tings Superficies, som er deres udvortes Anseelse og Skikkelse.

6. Enderne paa en Superficies ere Linier.

7. **En Flad** Superficies **eller en** Plan **er en** Superficies, **som over alt ligger gandske jevnt og slet imellem sine Linier.**

For Exempel: En Plads, som i Længde og Brede er jevnet og slettet efter en udspendt Snor eller en ret Linie; Ligeledes en jevn og slet sleben Side af et Speyl; item Siden af en Bord-Plade, eller Tavle, som er gandske jevn og glat, hvorpaa man overalt kand trekke en ret Linie, kaldes en Flad Superficies eller en Plan.

8. **En Flad Vinkel** (Angulus planus) **er den Aabning, der er imellem tvende Linier** AB **og** AC, **som udi en Plan støde sammen tvers paa hinanden.**

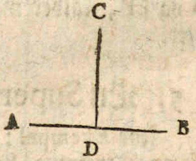


Spidsen eller Toppen af en Vinkel er den Punkt (A), i hvilken de rette Linier (AB, AC), som indslutte Vinklen, støde sammen.

9. **Dersom Linierne** BA, AC, **der indslutte en Vinkel, ere rette, saa kaldes samme Vinkel Ret-Lined.**

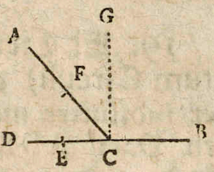
Naar der staae toe eller fleere Vinkler ved en Punkt, saa nævner man enhver af dem ved alle tre Bogstaver, som den er betegned med, saaledes: at man sætter det Bogstav, som staaer ved Vinklens Spidse, imellem de tvende andre: Saasom i den nestfølgende Figur staae toe Vinkler ved Punkten D, hvoraf den, som indsluttes af de rette Linier AD, DC, kaldes ADC eller CDA, og den anden som indsluttes af DC, DB, kaldes CDB eller BDC. Men staaer der ikkuns een Vinkel ved en Punkt, saa nævnes den samme enten for Korthेds Skyld ved det Bogstav alleene, som staaer ved dens Spidse, eller ogsaa ved alle tre; Saasom den Vinkel (udi nest foregaaende Figur), som indsluttes af AB, AC, kaldes A; undertiden ogsaa BAC eller CAB.

10. **Dersom en ret Linie** CD **staaer saaledes oprettet paa en anden ret Linie** AB, **at Vinklerne paa begge Sider, nemlig de Vinkler** ADC **og** CDB, **ere lige store med hinanden, saa kaldes enhver af disse lige store Vinkler en Ret Vinkel** (Angulus rectus;) **Og den rette Linie** CD, **som staaer saaledes oprettet, siges at være** Perpendicular **eller Lod-Ret paa den anden** AB.



II. En

11. **En Stumpet Vinkel** (Angulus obtusus) er den, som er større end en ret Vinkel; saasom den Vinkel BCA.



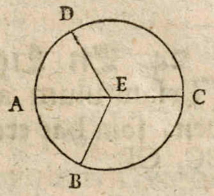
12. **En Spids Vinkel** (Angulus acutus) er den, som er mindre end en ret Vinkel; saasom den Vinkel ACD.

Herved merkes, at Vinklernes Størrelse ansees ikke efter Liniernes Længde, men alleeneste efter deres Aabning, saa at, naar Aabningen er større, saa er ogsaa Vinklen større; saasom den Vinkel GCD er større end den Vinkel ACD, fordi Aabningen imellem GC, CD er større end Aabningen imellem AC, CD. Derimod er den Vinkel ACD den samme, som den Vinkel FCE; thi den Kant eller den Vinkel, som de Linier FC, CE giøre, blive gandske u-forandret, endskiøndt samme Linier blive giort længere eller kortere.

13. **Et Endeskiæl** (Terminus) er det yderste af en Ting.

14. **En Figur** kaldes et Rum, som er indsluttet med eet eller fleere Endeskiæl.

15. **En Cirkel** er en Flad Figur, som er indslutted med een Linie ABCD kaldet **Omkredsen** (Circumferentia eller Peripheria) og i hvilken alle de rette Linier EA, EB, EC, ED, o. s. f. som drages til Omkredsen fra een af de Punkter, som ere inden for Figuren (saasom her fra E), ere lige store.



16. Og samme Punkt (E) kaldes Cirkelens **Middelpunkt** (Centrum.)

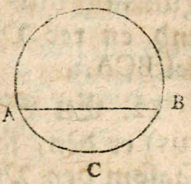
17. **Cirkelens Middel-Linie** (Diameter) er en ret Linie AC, som er dragen igiennem Cirklens Middelpunkt E, og endes paa begge Sider i Omkredsen, som ogsaa deeler Cirklen i toe lige store Deele.

18. **En Halv-Cirkel** (Semicirculus) er en Figur ABC, som er indsluttet med Middel-Linien AC og den Part ABC af Cirklens Omkreds, som afskiæres ved Middel-Linien.

Ligeledes er den anden Part ADC en halv Cirkel.

19. **Et Cirkel-Stykke** (Segmentum Circuli) er en Figur ADB, som er indsluttet med en ret Linie AB og en Part ADB af en Cirkels Omkreds.

Ligeledes er Figuren ACB et Cirkel-Stykke.



20. **Ret-Linede** Figurer ere de, som ere indsluttede med rette Linier.

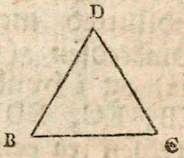
21. Af disse kalder man dem **Tre-sidede**, som ere indsluttede med tre;

22. **Fire-sidede**, som ere indsluttede med fire;

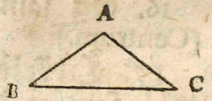
23. **Mange-sidede**, som ere indsluttede med fleere end fire rette Linier.

De Tre-sidede Figurer, som ogsaa kaldes Triangler eller Trekanter, ere i Henseende til deres Sider tre slags, nemlig:

24. **En Lige-sidet Triangel** (Triangulum æquilaterum) kaldes den, som har tre lige store Sider DB, BC, CD.



25. **En Lige-benet Triangel** (Triangulum Isosceles) kaldes den, som har ikkuns toe lige store Sider AB, AC.



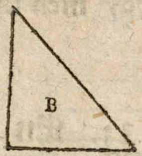
Herved merkes, at naar der meldes noget om toe Sider i sær af en Triangel, saasom her om de toe Sider AB, AC at de ere lige store, saa kaldes den tredie Side BC **Grund-Linien** (Basis), enten den staaer øverst eller nederst.

26. En

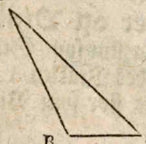
26. **En Ulige-sidet Triangel** (Triangulum Scalenum) kaldes den, hvis tre Sider ere af u-lige Størrelse, som A.

Ligeledes ere samme tre-sidede Figurer eller Triangler tre slags i Henseende til deres Vinkler, nemlig:

27. **En Ret-Vinklet Triangel** (Triangulum Rectangulum) kaldes den, som har en ret Vinkel, som B.

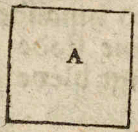


28. **En Stump-Vinklet Triangel** (Triangulum Ambligonium) kaldes den, som har en stumpet Vinkel, som ABC.

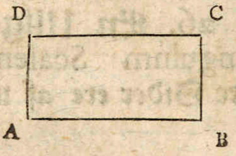


29. **En Spids-Vinklet Triangel** (Triangulum Oxigonium) kaldes den, som har tre spidse Vinkler; saasom den Triangel DBC. See den Figur, som staaer ved den 24. Definition.

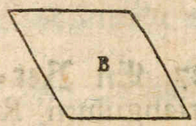
30. **En** Qvadrat er en fire-sidet Figur eller en Fiirkant, som har alle fire Sider lige store, og hvis Vinkler ere rette, som A.



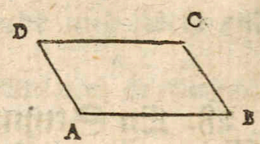
31. En aflang Qvadrat (Oblongum) er en Fiirkant, hvis Vinkler vel ere rette, men dens Sider ere ikke lige store, som ABCD.



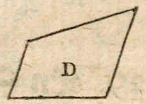
32. En Rhombus er en Fiir-kant, som har alle fire Sider lige store, men ingen ret Vinkel, som B.



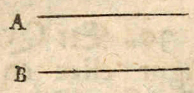
33. En Rhomboides er en Fiirkant ABCD, som hverken har alle fire Sider lige store, ey heller nogen ret Vinkel, men alleeneste de hinanden imodsatte Sider og Vinkler lige store, nemlig Siden AB lige saa stor som Siden DC, og AD saa stor som BC; Og ligeledes Vinklen A lige saa stor som Vinklen C, og Vinklen B saa stor som Vinklen D.



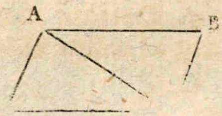
34. Alle andre Fiir-sidede Figurer, undtagne de fire nest forbemeldte, kaldes Trapezia, saasom D.



35. Parallel-Linier kaldes de rette Linier, som ligge i een og den samme Plan jevnsides med hinanden, og aldrig paa nogen af Siderne støde sammen, om de end aldrig saa langt bleve udtrakte, saasom A og B.



36. En Parallel-sidet Fiirkant eller et Parallelogram er saadan en Fiirkant ABDC, som har de hinanden imodsatte Sider Parallele med hinanden, nemlig: AB Parallel med DC og AC Parallel med BD. Og den rette Linie AD, som drages tvert igiennem Parallelogrammet fra et Hiørne A til et andet D, kaldes Parallelogrammets Diameter eller Tver-Linie.



Postulata

Postulata (Billige Begieringer)

1. Det begieres fra enhver Punkt til en anden at drage en ret Linie.

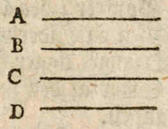
2. At trekke en given ret Linie længere ud til begge Sider.

3. Af enhver Middelpunkt, og udi hvad Længde eller Distance det forlanges, at beskrive en Cirkel.

Axiomata (Almindelige Tilstaaelser)

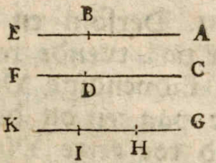
1. De Ting som ere hver for sig lige saa store som een og den samme eller som lige store Ting, ere lige store.

For Exempel: Dersom toe eller fleere rette Linier saasom A, B, C ere hver for sig saa store som een og den samme rette Linie D, saa ere samme rette Linier A, B, C ogsaa lige store med hinanden. Iligemaade dersom rette Linier A, D ere lige saa store som lige store rette Linier B, C, saaledes: at A ere lige saa stor som B, og D som C, og at B, C ere lige store med hinanden, saa ere ogsaa A og D lige store.



2. Dersom man legger lige store eller ogsaa een og den samme Ting til lige store Ting, saa ere de heele lige store.

For Exempel: Dersom man legger lige store rette Linier BE og DF til lige store rette Linier AB og CD, saa ere de heele AE og CF lige store, eller, dersom man legger een og den samme rette Linie HI til lige store rette Linier GH og IK, saa ere de heele GI og HK lige store.



3. Dersom man tager lige store eller ogsaa een og den samme Ting fra lige store Ting, saa blive de øvrige lige store.

For Exempel: (See den nest foregaaende Figur) Dersom man tager lige store rette Linier BE, DF fra lige store rette Linier AE, CF, saa blive de øvrige AB og CD lige store. Eller dersom man tager een og den samme rette Linie HI fra lige store rette Linier GI og HK, saa blive de øvrige GH og IK lige store.

4. Dersom man legger lige store eller ogsaa een og den samme Ting til Ting af u-lige Størrelse, saa ere de heele af u-lige Størrelse.

5. Dersom man tager lige store eller een og den samme Ting fra Ting af u-lige Størrelse, saa blive de øvrige af u-lige Størrelse.

6. De

6. **De Ting, som ere dobbelt saa store som een og den samme eller som lige store Ting, ere lige store;** Ligeledes ere de Ting lige store, som ere tre, fire ꝛc. gange saa store som een og den samme eller lige store Ting.

7. **De Ting, som ere halv saa store som een og den samme eller lige store Ting, ere lige store.** Ligeledes ere de Ting lige store, som ere tredie, fierde ꝛc. deele af een og den samme eller lige store Ting.

For Exempel: Dersom toe rette Linier ere enhver for sig halv saa store som een og den samme eller som toe andre lige store rette Linier, saa ere de lige store; og dersom de ere begge enten tredie eller fierde ꝛc. Deele af een og den samme eller lige store rette Linier, saa ere de ogsaa lige store med hinanden.

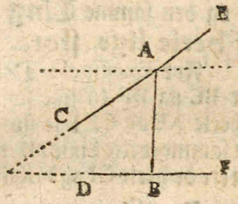
8. **De Ting, som passe sig overalt paa hinanden, ere lige store.**

Naar en Linie ligger saaledes paa en anden Linie, at alle Punkter i den eene falde i alle Punkter i den anden; Item, naar en Vinkel ligger saaledes paa en anden Vinkel, at Spidsen og Siderne af den eene ligger i Spidsen og Siderne af den anden: Eller, naar en Triangel ligger saaledes paa en anden, at alle tre Sider af den eene ligge paa alle tre Sider af den anden: Saa siges Linierne, Vinklerne og Trianglerne at passe sig paa hinanden.

9. **Det heele er større end en Deel deraf.**

10. **Alle rette Vinkler ere lige store.**

11. **Dersom en ret Linie AB, som falder paa twende rette Linier EC, FD, som de indvendige Vinkler CAB, ABD, giør ere paa een og den samme Side, mindre end toe rette Vinkler; Saa skal de twende rette Linier EC, FD, naar de blive immerfort uddragne, omsider støde sammen paa den Side CD, hvor Vinklerne ere mindre end toe rette Vinkler.**



Dette skal videre blive forklaret udaf denne Bogs 28 Proposition.

12. **Toe rette Linier kand ikke indslutte et Rum.**

13. Det heele er lige saa stort som alle sine Parter tilsammen tagne.

14. Dersom en Ting er dobbelt saa stor som en anden, og en fratagen Part er dobbelt saa stor som en fratagen Part, saa er ogsaa det øvrige dobbelt saa stort som det øvrige.

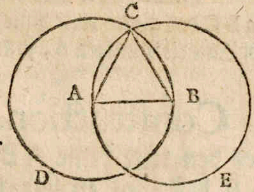
For Exempel: Det Tal 30 er dobbelt saa stort som 15, og 12 er dobbelt saa stort som 6. Dersom man nu trækker 12 fra 30 og 6 fra 15, saa maae det øvrige 18 være dobbelt saa stort som det øvrige 9.

Den

Den 1 Proposition.
Problema.

Paa en given ret Linie at beskrive en lige-sidet Triangel.

Exempel. Lad A B være den givne rette Linie, hvorpaa man skal beskrive en lige-sidet Triangel.



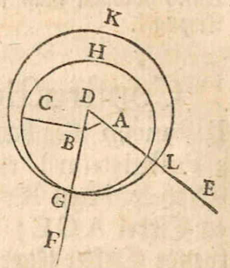
Construction. Af Middelpunkten A udi Distancen eller Længden A B beskriver man (efter 3 Postulatum) en Cirkel BCD. Ligeledes af Middelpunkten B udi Længden B A beskriver man en Cirkel ACE; Og fra Punkten C, hvor de tvende Cirkler skiære hinanden, til Punkterne A og B drages de rette Linier, AC, BC (efter 1 Postulatum).

Demonstration. Fordi nu A er Middelpunkten af Cirklen B C D, saa er (efter 15 Definition) den rette Linie A C lige saa stor som A B. Ligeledes fordi B er Middelpunkten af Cirklen A C E, saa er den rette Linie B C lige saa stor som A B: Altsaa er enhver af de tvende rette Linier A C, B C lige saa stor som A B. Men de Ting, som ere hver i sær saa store som een og den samme Ting, ere (efter 1 Axioma) lige store med hinanden; følgelig er A C lige saa stor som B C. Hvorfore de tre rette Linier A C A B, B C ere lige store med hinanden.

Altsaa er (efter 24 Definition) Trianglen A C B lige-sidet, og den er beskreven paa den givne rette Linie A B. Hvilket var det som skulde giøres.

Den 2 Proposition.
Problema.

Til en given Punkt at sætte en ret Linie, der er saa stor som en given ret Linie.



Exempel. Lad A være den givne Punkt, og B C den givne rette Linie: Man skal sætte en ret Linie til Punkten A, som er saa stor som B C.

Construction. Fra Punkten A til B drages den rette Linie AB (efter 1 Postul.), og paa AB beskrives en lige-sidet Triangel ADB (efter 1 Proposition). Dernest drages (2 Postul.) de rette Linier AD, DB lige ud henimod E og F. Endelig beskrives af Middelpunkten B udi Længden BC en Cirkel CGH (3 Postul.); og ligeledes af Middelpunkten D udi Længden DG en Cirkel GKL.

Demonstration. Fordi nu D er Middelpunkten af Cirklen GKL, saa er (15 Definition) DL lige saa stor som DG: Og fordi DBA er en lige-sidet Triangel, saa er DA lige saa stor som DB. Dersom man da tager DA fra DL, og DB fra DG, saa er den øvrige rette Linie AL lige saa stor (3 Axioma) som den øvrige rette Linie BG. Men BC er og lige saa stor som den samme BG (15 Definition), fordi B er Middelpunkten af Cirklen CGH; derfor er (1 Axioma) AL lige saa stor som CB.

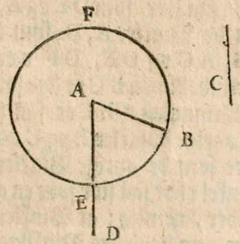
Og er da til den givne Punt A sat en ret Linie AL, som er saa stor som den givne rette Linie BC. Hvilket var det som skulde giøres.

Den

Den 3 Proposition.
Problema.

Naar toe rette Linier af u-lige Størrelse ere givne, da at skiære en ret Linie fra den større, som er saa stor som den mindre.

Exempel. Lad AD og C være de toe givne rette Linier, og lad AD være den større af dem: Man skal skiære en ret Linie fra AD, som er saa stor som den mindre rette Linie C.



Construction. Til Punkten A sætter man (2 Proposition) en ret Linie AB, som er saa stor som C; og af Middelpunkten A udi Distancen AB beskrives en Cirkel BEF (3 Postul.)

Demonstration. Eftersom nu A er Middelpunkten af Cirklen BEF, saa er AB lige saa stor som AE (15 Def.); Men AB er ogsaa lige saa stor som C (efter Constructionen); følgelig er AE lige saa stor som C (1 Axioma).

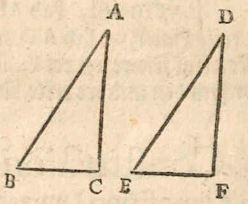
Derfor er da fra den større rette Linie AD skaaren en ret Linie AE, som er saa stor som den mindre C. Hvilket var det som skulde giøres.

Den 4 Proposition.
Theorema.

Dersom toe Sider udi en Triangel ere lige saa store som toe Sider udi en anden, nemlig: enhver Side for sig saa stor som en anden, og dersom disse Sider ogsaa indslutte lige store

Vinkler: Saa skal og Grund-Linien i den eene Triangel være lige saa stor som Grund-Linien i den anden, den eene Triangel skal være lige saa stor som den anden og de øvrige Vinkler udi den eene Triangel skal være lige saa store som de øvrige Vinkler udi den anden, nemlig: enhver Vinkel for sig saa stor som en anden, som staae imod lige store Sider.

Exempel. Lad udi de toe Triangler A B C, D E F de toe Sider A B, A C være lige saa store som de toe Sider D E, D F, enhver Side for sig saa stor som en anden, nemlig: A B saa stor som D E og A C saa stor som D F, og lad desuden de Vinkler A, D, som indsluttes af de lige store Sider A B, A C og D E, D F være lige store: Saa siger jeg, at Grund-Linien B C er lige saa stor som Grund-Linien E F, og at Trianglen A B C er saa stor som Trianglen D E F; og at de øvrige Vinkler B og C udi den eene Triangel ere lige saa store som de øvrige Vinkler E og F udi den anden, enhver Vinkel i sær saa stor som en anden, som staae imod lige store Sider, nemlig: at Vinklerne B, E, som staae imod de lige store Sider A C, D F ere lige store, og ligeledes Vinklerne C og F, som staae imod de lige store Sider A B, D E.



Demonstration. Man forestille sig Trianglen A B C saaledes at være lagt paa Trianglen D E F, at Punkten A falder i Punkten D, og den rette Linie A B paa den rette Linie D E, saa skal Punkten B falde i Punkten E, fordi den rette Linie A B er lige saa stor som den rette Linie D E: Og den rette Linie A C skal falde paa den rette Linie D F, fordi Vinklen A er (efter hypothesin) lige saa stor som Vinklen D. Følgelig skal ogsaa Punkten C falde i Punkten F, fordi A C er lige saa stor som D F.

Eftersom da Enderne B og C af den rette Linie B C falde i Enderne E og F af den rette Linie E F, saa maae B C overalt passe sig paa E F, og derfor skal (efter 8 Ax.) disse Grund-Linier B C, E F være lige store. Heraf følger da, at den heele Triangel A B C maae passe sig paa den heele Triangel D E F, og derfore skal den eene af dem være (8 Ax.) lige saa stor som den anden. Og de øvrige Vinkler udi den eene Triangel skal passe sig paa de øvrige Vinkler i den anden Triangel, og følgelig være lige store med hinanden, nemlig: Vinklen B skal være lige saa stor som Vinklen E, og Vinklen C saa stor som Vinklen F. Hvilket var det som skulde bevises.

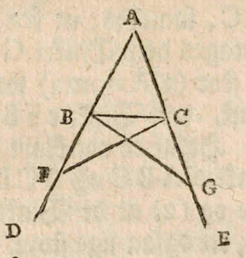
Den

Den 5 Proposition.

Theorema.

Udi enhver lige-beenet Triangel ere Vinklerne ved Grund-Linien lige store: Og naar de lige store rette Linier blive længere uddragne, saa skal ogsaa Vinklerne under Grund-Linien være lige store.

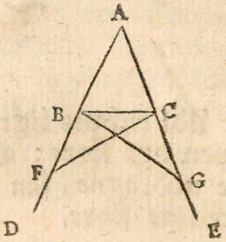
Exempel. Lad A B C være en lige-beenet Triangel (Triangulum Isosceles), hvori Siden A B er saa stor som Siden A C, og lad A B, A C blive uddragne efter Behag hen imod D og E (efter 2 Postul.): saa siger jeg for det første, at Vinklerne A B C og A C B ved Grund-Linien B C ere lige store, og for det andet, at Vinklerne D B C og E C B under Grund-Linien B C ere ogsaa lige store.



Construction. Udi den rette Linie AD antages en Punkt F efter Behag. Fra den større rette Linie A E skiæres en ret Linie A G, som er saa stor som den mindre A F (3 Prop.). Endelig drages de rette Linier F C, G B (1 Postul.)

Demonstration. Eftersom nu A F er lige saa stor som A G (Constr.), og A C er lige saa stor som A B (efter Hypothesin); saa ere udi de tvende Triangler F A C og G A B toe Sider A F, A C saa store som toe Sider A G, A B, enhver Side for sig saa stor som en anden, og da disse Sider indslutte een og den samme Vinkel A, saa er (4 Prop.) Grund-Linien F C saa stor som Grund-Linien G B, og de øvrige Vinkler i den eene Triangel F A C ere lige saa store som de øvrige Vinkler udi den anden Triangel G A B, nemlig: Vinklen A F C er lige saa stor som Vinklen A G B, og Vinklen F C A er saa stor som Vinklen G B A.

Fordi nu fremdeeles den heele rette Linie A F er lige saa stor som den heele rette Linie A G (efter Constr.), og den rette Linie A B er lige saa stor som A C (efter Hypothesin), saa er den øvrige rette Linie B F lige saa stor som den øvrige C G (3 Axioma); Og da nu ogsaa F C er saa stor som G B (som tilforn er beviist): Saa ere udi de tvende Triangler CBF, BCG toe Sider BF, FC lige saa store som toe Sider CG, GB, enhver Side for sig saa stor som en anden, og tilmed ere de Vinkler AFC, AGB eller BFC, CGB, som de lige store Sider BF, FC og CG, GB indslutte, ogsaa lige store (som tilforn er beviist). Følgelig skal og (4 Prop.) Vinklen FBC være lige saa stor som Vinklen GCB, og Vinklen FCB saa stor som Vinklen GBC.



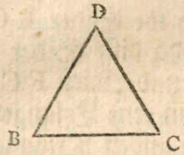
Dersom nu fra de toe Vinkler FCA og GBA, som man tilforn har beviist at være lige store, borttages de lige store Vinkler FCB og GBC, saaledes: at fra FCA borttages den Vinkel FCB, og fra GBA borttages den Vinkel GBC, saa er den overblivende Vinkel ACB lige saa stor (3 Axioma) som den overblivende Vinkel ABC. Ligeledes er beviist, at de Vinkler FBC, GCB, eller DBC, ECB ere lige store.

Heraf er det klart (1) at udi den lige-beenede Triangel ABC, de Vinkler ABC og ACB, som ere inden ved Grund-Linien BC, ere lige store og (2) at de Vinkler DBC, ECB, som ere under Grund-Linien BC, ere ogsaa lige store. Hvilket var det som skulde bevises.

Corollarium (Tillæg)

Altsaa har en lige-sidet Triangel ogsaa lige store Vinkler.

Exempel. Lad Trianglen DBC være lige-sidet, det er: lad dens Sider DB, DC, BC være lige store: saa siger jeg at dens Vinkler D, B, C ogsaa ere lige store.



Demonstration. Efterdi DB er lige saa stor som DC, saa er (5 Prop.) Vinklen B lige saa stor som Vinklen C; og fordi DB, BC ere lige store, saa er Vinklen D ogsaa lige saa stor Vinklen C. Altsaa ere begge de Vinkler D og B lige saa store som den Vinkel C, og derfore ere de ogsaa lige store med hinanden (1 Axioma). Følgelig ere de tre Vinkler D, B, C lige store. Hvilket var det som skulde bevises.

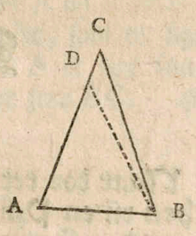
Den

Den 6 Proposition.

Theorema.

Dersom udi en Triangel toe Vinkler ere lige store, saa skal ogsaa Siderne, som staae imod de lige store Vinklet, være lige store.

Exempel. Lad i Trianglen A C B de toe Vinkler C A B og C B A være lige store: Saa siger jeg, at Siden C B er ogsaa lige saa stor som Siden C A.



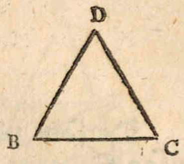
Demonstrarion. Vil nogen nægte, at C B, C A ere lige store, saa maae een af dem være den større. Lad for Exempel C A holdes for at være større end C B, og da maae der kunde skiæres (3 Prop.) fra C A et Stykke, som er saa stort som C B. Lad da A D holdes for at være det bemeldte Stykke af C A, og drag den rette Linie D B (1 Post.). Saa har man toe Triangler A D B og A C B, hvori den Side A D holdes for at være saa stor som C B, og A B er en tilsælles Side for begge Trianglerne; Altsaa ere toe Sider D A, A B lige saa store som toe Sider C B, A B, enhver i sær er saa stor som en anden, og desuden er ogsaa Vinklen D A B lige saa stor (efter hypothesin) som Vinklen C B A: Følgelig skal (4 Prop.) Grund-Linien D B være lige saa stor som Grund-Linien A C og Trianglen A D B saa stor som Trianglen A C B, nemlig: en Deel skal være saa stor som det heele, hvilket er imod det 9de Axioma. Altsaa kand de toe rette Linier C A, C B ikke være af ulige Størrelse, og heraf følger da, at de ere lige store. Hvilket var det som skulde bevises.

Corollarium (Tillæg)

Dersom alle tre Vinkler udi en Triangel ere lige store: saa er Trianglen lige-sider.

Exem-

Exempel. Lad Vinklerne D, B, C i Trianglen DBC være lige store: Saa siger jeg, at Siderne DB, BC, DC ere ogsaa lige store.



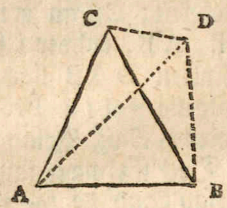
Demonstration. Eftersom Vinklerne B og C ere lige store, saa er ogsaa (6 Prop.) den Side DB lige saa stor som DC; Og fordi Vinklerne D og C ere lige store, saa er DB og lige saa stor som BC. Følgelig ere de tre Sider DB, DC, BC lige store. Hvilket var det som skulde bevises.

Den 7 Proposition.

Theorema.

Naar toe rette Linier ere dragne fra Enderne af en ret Linie hen til en Punkt; saa er det u-mueligt, at der fra Enderne og paa den samme Side af samme rette Linie kand til nogen anden Punkt drages toe andre rette Linier, som ere saa store som de første, nemlig: enhver i sær saa stor som den anden, det er sat paa samme Ende.

Exempel. Lad de tvende rette Linier AC og CB være dragne fra Enderne A og B af den rette Linie AB hen til Punkten C: saa siger jeg, at fra de samme Ender A og B og paa samme Side af AB kand ikke toe andre rette Linier blive dragne til nogen anden Punkt end C af samme Størrelse som AC, BC, saaledes: at den der drages fra A skulle være saa stor som AC, og den der drages fra B skulle være lige saa stor som BC.



Demonstration. Vil nogen sige, at saadant kand være mueligt; saa lad den rette Linie AD holdes for at være saa stor som AC, og BD at være saa stor som BC, og lad disse rette Linier AD, BD støde sammen i en anden Punkt end C, saasom i D, og drag CD.

Efter-

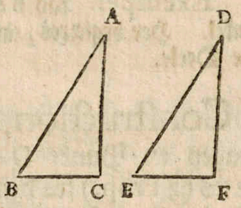
Eftersom da AD skal være saa stor som AC, saa er Trianglen CAD lige-beenet, og altsaa er Vinklen ACD lige saa stor som Vinklen ADC (5 Prop.). Men nu er den eene ACD af disse lige store Vinkler større end den Vinkel BCD (9 Axioma), thi BCD er ikkuns en Deel af ACD; Følgelig er ogsaa den anden ADC større end den samme Vinkel BCD; og fordi den Vinkel BDC er større end den Vinkel ADC (9 Ax.), saa er BDC og større end BCD. Fremdeeles, eftersom den rette Linie BC skal være lige saa stor som BD, saa maa ogsaa Vinklen BDC være lige saa stor som den Vinkel BCD (5 Prop.). Men den er og tillige større, som tilforn blev beviist; hvilket er u-muligt. Altsaa er det ikke heller muligt, at der fra Enderne A og B kand drages hen til nogen anden Punkt end C toe rette Linier, som ere lige saa store som AC, BC, saaledes: at den der drages fra A er lige saa stor som AC, og at den der drages fra B er lige saa stor som BC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 8 Proposition.

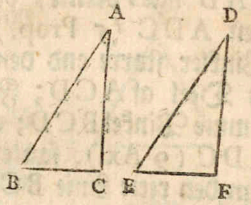
Theorema.

Dersom toe Sider udi en Triangel ere lige saa store som toe Sider udi en anden Triangel, enhver Side for sig saa stor som en anden, og dersom ogsaa Grund-Linien i den eene er saa stor som Grund-Linien i den anden Triangel: da skal bemeldte Sider ogsaa indslutte lige store Vinkler.

Exempel. Lad udi de toe Triangler ABC, DEF toe Sider AB, AC være lige saa store som toe Sider DE, DF, enhver Side for sig saa stor som en anden, nemlig: AB saa stor som DE, og AC saa stor som DF, og lad ogsaa Grund-Linien BC være lige saa stor som Grund-Linien EF: Saa siger jeg, at Vinklerne BAC, EDF, som indsluttes af de lige store Sider AB, AC og ED, DF, skal være lige store.



Demonstration. Thi dersom Trianglen ABC bliver saaledes lagt paa Trianglen DEF, at Punkten B falder i Punkten E, og den rette Linie BC i den rette Linie EF, saa skal Punkten C falde i F, fordi BC er lige saa stor som EF. Eftersom da den rette Linie BC passer sig paa den rette Linie EF, saa skal og Punkten A falde i Punkten D; Thi hvis ikke, saa skulde det være mueligt, at, naar toe rette Linier ED, DF ere dragne fra Enderne af en ret Linie EF hen til en Punkt D, da ogsaa fra Enderne og paa samme Side af samme rette Linie EF kunde drages til en anden Punkt end D toe andre rette Linier BA, CA, som (efter hypothesin) ere saa store som de første ED, FD, nemlig: enhver i sær saa stor som den anden, der er sat paa samme Ende. Men dette kand ikke skee (7 Prop.); Følgelig maa Punkten A falde i D, og derfor maae BA passe sig paa ED, og CA paa FD (12 Ax.), og altsaa passer sig ogsaa Vinklen BAC paa EDF. Da nu de Ting, som passe sig paa hinanden, ere lige store (8 Ax.); saa er Vinklen BAC lige saa stor som Vinklen EDF. Hvilket var det, som skulde bevises.

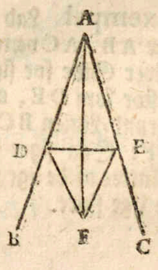


Den 9 Proposition.

Problema.

At deele en given ret-linet Vinkel i toe lige store Deele.

Exempel. Lad BAC være den givne ret-linede Vinkel. Her begiæres, at man skal deele den i toe lige store Deele.



Construction. Udi den rette Linie AB antages en Punkt D efter Behag. Dernest skiæres (3 Prop.) fra den rette Linie AC et Stykke AE saa stort som AD. Siden drager man (3 Post.) den rette Linie DE, paa hvilken beskrives en lige=sidet Triangel DFE (1 Prop.). Endelig drages den rette Linie AF. Saa skal samme AF deele Vinklen BAC i toe lige store Deele.

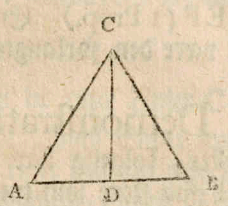
Demonstration. Thi AD er saa stor som AE (efter Constr.), og AF er en fælles Side til begge de Triangler DAF og EAF, og derfore ere udi bemeldte Triangler toe Sider AD, AF saa store som toe Sider AE, AF, enhver i sær saa stor som en anden; Ydermeere er Grund=Linien DF saa stor som Grund=Linien EF, fordi Trianglen DEF er lige=sidet (efter Constr.). Følgelig er (8 Prop.) Vinklen DAF saa stor som Vinklen EAF. Altsaa er den givne ret=linede Vinkel BAC deelt i toe lige store Deele. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 10 Proposition.

Problema.

At deele en given ret Linie i toe lige store Deele.

Exempel. Lad AB være den givne rette Linie, som man skal deele i toe lige store Deele.



Construction. Beskriv paa AB (1 Prop.) en lige=sidet Triangel ACB. Deel (9 Prop.) Vinklen ACB i toe lige store Deele med den rette Linie CD. Saa er AB deelet i Punkten D udi toe lige store Deele.

Demonstration. Thi AC er saa stor som CB, fordi Trianglen ACB er lige=sidet (Constr.); og den rette Linie CD er en fælles Side til begge de Triangler ACD og BCD; Og derfore ere udi disse toe Triangler toe Sider AC, CD saa store som toe Sider CB, CD, enhver i sær saa stor som en anden, og desuden er Vinklen ACD lige saa stor som Vinklen BCD (efter Constr.); Følgelig er (4 Prop.) Grund=

 Linien

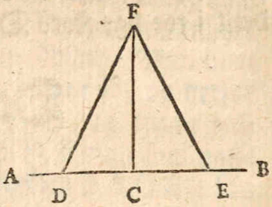
Linien AD saa stor som Grund-Linien DB. Altsaa er den givne rette Linie AB ved den Punkt D deelet i toe lige store Deele. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den II Proposition.

Problema.

Paa en given ret Linie og fra en given Punkt deri at opreise en Perpendicular ret Linie.

Exempel. Lad AB være den givne rette Linie, og C den givne Punkt deri: Man skal fra Punkten C opreise en perpendicular ret Linie paa AB.



Construction. Udi den rette Linie AC antager man en Punkt D efter Behag. Dernest giøres (3 Prop.) CE saa stor som CD. Siden beskriver man paa DE en lige-sidet Triangel DEF (1 Prop.) Endelig drager man den rette Linie FC; saa skal denne være den forlangte Perpendicular Linie.

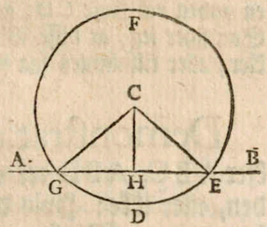
Demonstration. Thi DC er saa stor som CE, og CF er tilfælles, følgelig har de tvende Triangler DFC, EFC toe Sider DC, CF saa store som toe Sider EC, CF, enhver i sær saa stor som en anden; Tilmed er Grund-Linien DF saa stor som Grund-Linien FE, fordi Triangelen DFE er lige-sidet (Constr.); Følgelig er (8 Prop.) Vinklen DCF saa stor som Vinklen FCE. Altsaa staaer den rette Linie FC saaledes paa AB, at den giør Vinklerne paa begge Sider lige store, og derfore er den perpendicular paa AB (10 Def.), og den er ogsaa opreist fra den givne Punkt C. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den

Den 12 Proposition.
Problema.

At drage en Perpendicular ret Linie ned paa en given ret Linie, som man paa begge Sider efter Behag skal kunde uddrage, fra en given Punkt, som er uden for den samme givne rette Linie.

Exempel. Lad AB være den givne rette Linie, som man paa begge Sider efter Behag skal kunde uddrage, og C den givne Punkt uden for samme Linie: Det begiæres, at man fra Punkten C skal lade falde en perpendicular ret Linie ned paa AB.



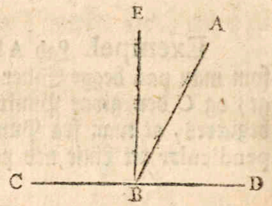
Construction. Paa den anden Side af AB antag en Punkt D efter Behag, og af Middelpunkten C udi Længden CD beskriv (3 Post.) en Cirkel EFG. Deel den rette Linie GE i toe lige store Deele i H (10 Prop.); og drag den rette Linie CH (1 Post.). Saa er denne CH den forlangte Perpendicular-Linie.

Demonstration; Thi naar man drager de rette Linier CG, CE, saa faaer man toe Triangler CHG og CHE, hvis Sider hver i sær lignet med hinanden, ere lige store, nemlig: GH er lige saa stor som HE ved (Constr.), CH er en fælles Side, og Grund-Linien GC er saa stor (15 Defin.) som Grund-Linien CE. Altsaa er Winklen GHC saa stor som Winklen EHC (8 Prop.): Og følgelig er den rette Linie CH perpendicular paa den givne rette Linie AB (10 Def.) og den er ogsaa dragen fra den givne Punkt C. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 13 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie, som staaer paa en anden ret Linie, giør Vinkler: saa skal disse enten være toe rette Vinkler, eller tilsammen saa store som toe rette Vinkler.



Exempel. Lad en ret Linie AB, som staaer paa en anden ret Linie CD, giøre de Vinkler CBA, ABD: Saa siger jeg, at disse Vinkler ere enten toe rette Vinkler, eller tilsammen saa store som toe rette Vinkler.

Demonstration; Thi bemeldte Vinkler ABC, ABD ere enten lige store med hinanden, eller ikke: Hvis de ere lige store, saa ere de begge rette Vinkler (10 Def.). Men hvis ikke, da opreiser man (11 Prop.) paa CD fra Punkten B en Perpendicular-Linie BE, saa ere Vinklerne EBC, EBD toe rette Vinkler. Af disse er nu den Vinkel EBD saa stor (13 Ax.) som de tvende Vinkler EBA, ABD, og naar den Vinkel EBC bliver dem tillagt, saa skal (2 Ax.) de toe rette Vinkler EBC, EBD tilsammen være saa store som de tre Vinkler EBC, EBA, ABD.

Fremdeeles er ogsaa Vinklen CBA saa stor (13. Ax.) som de tvende Vinkler EBC, EBA. Naar altsaa Vinklen ABD bliver dem tillagt, saa skal de tvende Vinkler CBA, ABD være lige saa store som de tre Vinkler EBC, EBA, ABD. Men de toe rette Vinkler EBC, EBD ere lige saa store som samme tre Vinkler (som tilforn er beviist), og derfore ere (1 Ax.) de toe Vinkler CBA, ABD tilsammen saa store som de toe rette Vinkler CBE, EBD. Heraf følger da, at de tvende Vinkler CBA, ABD maae enten være toe rette Vinkler eller tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Hvilket var det, som skulde bevises.

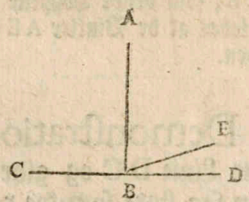
Den

Den 14 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier, som ere dragne til een og den samme Punkt udi en tredie ret Linie, men ikke paa samme Side, giøre Vinklerne paa begge Sider tilsammen saa store som toe rette Vinkler: Saa skal samme toe rette Linier være i en lige Linie med hinanden.

Exempel. Lad toe rette Linier CB, BD være dragne til en og den samme Punkt B udi den rette Linie AB, men ikke paa samme Side af AB, og lad Vinklerne CBA, ABD, som CB, BD giøre med AB, være tilsammen saa store som toe rette Vinkler: Saa siger jeg, at disse toe rette Linier CB, BD ere udi en lige Linie med hinanden, saa at CBD er en ret Linie.



Demonstration. Vil nogen nægte at BD er i lige Linie med CB, saa lad (2 Post.) en anden ret Linie, for Exempel, BE være i lige Linie med CB, saa at CBE er en ret Linie.

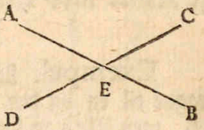
Eftersom nu AB staaer paa den rette Linie CBE, saa ere (13 Prop.) Vinklerne CBA, ABE tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Men CBA, ABD ere (efter Hypothesin) ogsaa saa store som toe rette Vinkler. Følgelig ere de Vinkler CBA, ABE saa store (1 Ax.) som de Vinkler CBA, ABD. Dersom nu den fælles Vinkel CBA bliver tagen fra dem, saa skal (3 Ax.) Vinklen ABE være saa stor som Vinklen ABD, nemlig: en Deel skal være saa stor som det heele; hvilket er u-mueligt (9 Ax.)

Altsaa kand BE ikke være i en lige Linie med CB. Paa samme Maade kand man ogsaa bevise, at ingen anden ret Linie foruden BD kand være i en lige Linie med CB. Derfore ere de toe rette Linier CB, BD udi lige Linie med hinanden. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 15 Proposition.
Theorema.

Dersom toe rette Linier skiære hinanden, saa skal de Vinkler, som vende Toppene imod hinanden og kaldes Vertical-Vinkler, være lige store med hinanden.

Exempel. Lad de tvende rette Linier AB, CD skiære hinanden i Punkten C, saa siger jeg, at de Vinkler AED og CEB, som vende Toppene imod hinanden, ere lige store, og ligeledes at de Vinkler AEC og DEB ere lige store med hinanden.



Demonstration. Efterdi den rette Linie AE staaer paa den rette Linie DC og giør de Vinkler AED, AEC, saa ere disse tilsammen saa store som toe rette Vinkler (13 Prop.). Ligeledes efterdi CE staaer paa AB og giør de Vinkler AEC, CEB, saa ere og disse tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Følgelig ere (1 Ax.) Vinklerne AED, AEC saa store som Vinklerne AEC, CEB. Tag nu den fælles Vinkel AEC fra dem, saa er den øvrige Vinkel AED (3 Ax.) saa stor som den øvrige Vinkel CEB. Paa samme Maade bevises ogsaa, at Vinklen AEC er saa stor som Vinklen DEB. Derfore, dersom toe rette Linier skiære hinanden, saa skal Vertical-Vinklerne eller de Vinkler, som vende Toppene imod hinanden, være lige store. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium (Tillæg)

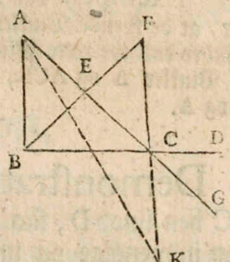
Heraf er det klart, at dersom rette Linier, i hvor mange de end ere, skiære hinanden udi en Punkt, saa skal alle Vinklerne omkring samme Punkt være tilsammen saa store som fire rette Vinkler.

Den

Den 16 Proposition.
Theorema.

Naar en Side i en Triangel bliver længere uddragen; saa er den udvendige Vinkel større end nogen af de toe indvendige og imodsatte Vinkler.

Exempel. Lad ABC være en Triangel, og lad dens Side BC blive længere uddragen hen imod D: saa siger jeg, at den udvendige Vinkel ACD er større end nogen af de toe indvendige og imodsatte Vinkler CBA, BAC.



Construction. Deel den rette Linie AC i toe lige store Deele i E (10 Prop.). Derneft drager man BE og trækker den længere ud hen imod F og gior FE saa stor (3 Prop.) som BE. Endelig drages FC, og AC trækkes længere ud hen imod G.

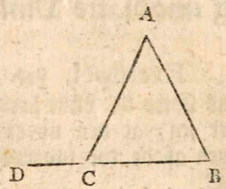
Demonstration. Da nu AE er saa stor som EC, og BE er saa stor som EF (efter Constr.), saa ere udi de tvende Triangler ABE, EFC toe Sider AE, EB saa store som toe Sider EC, EF, enhver i sær saa stor som en anden, og Vinklen AEB er (15 Prop.) saa stor som sin Vertical eller Top-Vinkel FEC. Følgelig skal (4 Prop.) Vinklerne BAE og ECF, som staae imod de lige store Sider BE og EF, være lige store med hinanden. Eftersom da den Vinkel ECD er (efter 9 Axioma) større end ECF, saa er Vinklen ECD eller ACD ogsaa større end Vinklen BAE eller BAC.

Dersom Siden BC bliver deelet i toe lige store Deele, saa kand paa selv samme Maade bevises, at Vinklen BCG og følgelig ogsaa (15 Prop.) den Vinkel ACD er større end Vinklen CBA. Derfore er da den udvendige Vinkel ACD større end nogen af de toe indvendige og imodsatte Vinkler CBA, BAC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 17 Proposition.
Theorema.

I enhver Triangel ere toe Vinkler tilsammen, hvorledes de end tages, mindre end toe rette Vinkler.

Exempel. Lad ABC være en Triangel: Jeg siger, at de tvende Vinkler B og ACB tilsammentagne ere mindre end toe rette Vinkler; saavel som ogsaa de tvende Vinkler A og ACB, og ligeledes de tvende Vinkler B og A.

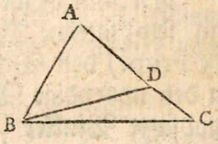


Demonstration. Thi dersom man uddrager (2 Post.) Siden BC hen imod D, saa er den udvendige Vinkel ACD større (16 Prop.) end den indvendige og imodsatte Vinkel B. Læg Vinklen ACB til enhver af dem, saa ere Vinklerne ACD, ACB tilsammen større (4 Ax.) end de Vinkler B og ACB. Men Vinklerne ACD, ACB ere (13 Prop.) saa store som toe rette Vinkler. Følgelig ere Vinklerne B og ACB tilsammen mindre end toe rette Vinkler. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at Vinklerne A og ACB, og ligeledes Vinklerne B og A ere tilsammen mindre end toe rette Vinkler. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 18 Proposition.
Theorema.

Udi enhver Triangel er den Vinkel større, som staaer imod en større Side.

Exempel. Lad udi Trianglen ABC den Side AC være større end den Side AB. Saa siger jeg, at Vinklen ABC, som staaer imod den større Side AC, er større end Vinklen ACB, som staaer imod den mindre Side AB.



Con-

Construction. Eftersom AC er større end AB, saa skiær (3 Prop.) fra AC en ret Linie AD, som er saa stor som AB, og drag BD.

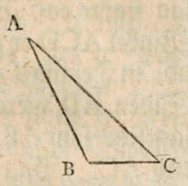
Demonstration. Fordi nu AB er saa stor som AD, saa er (5 Prop.) Vinklen ABD saa stor som Vinklen ADB. Men Vinklen ADB, eftersom den er den udvendige Vinkel af Trianglen DBC, saa er den større end den indvendige DCB eller ACB (16 Prop.): Følgelig er ogsaa Vinklen ABD større end Vinklen ACB. Da nu den Vinkel ABC er større (9 Ax.) end den Vinkel ABD, saa følger at Vinklen ABC ogsaa er større end den Vinkel ACB. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 19 Proposition.

Theorema.

I enhver Triangel er den Side større, som staaer imod den større Vinkel.

Exempel. Lad udi Trianglen ABC den Vinkel B være større end den Vinkel C: Saa siger jeg, at den Side AC, som staaer imod den større Vinkel B, er større end den Side AB, som staaer imod den mindre Vinkel C.



Demonstration. Thi dersom AC skulde være lige saa stor som AB, saa maatte ogsaa Vinklen B være saa stor (5 Prop.) som Vinklen C. Og det er den ikke; thi den er større (efter Hypothesin), følgelig er AC ikke lige saa stor som AB. Og dersom AC skulde være mindre end AB, saa maatte ogsaa Vinklen B være mindre (18 Prop.) end Vinklen C, og det er den ikke (efter Hypothesin), thi den er større, altsaa er AC ikke mindre end AB. Eftersom da AC hverken er lige saa stor som AB, ikke heller mindre end AB; saa følger af Fornødenhed, at AC maae være større end AB. Hvilket var det, som skulde bevises.

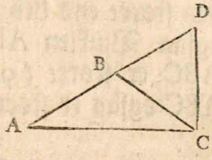
 Den

Den 20 Proposition.

Theorema.

Udi enhver Triangel ere toe Sider, hvorledes de end tages, tilsammen større end den øvrige.

Exempel. Lad ABC være en Triangel. Jeg siger, at toe Sider deraf, hvorledes de end tages, ere større end den øvrige, nemlig: at AB, BC ere tilsammen større end AC; og BC, AC tilsammen større end AB; og AB, AC tilsammen større end BC.



Construction. Drag AB ud hen imod D; giør (3 Prop.) BD saa stor som BC, og drag DC.

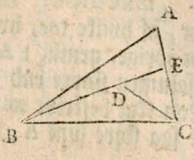
Demonstration. Efterdi nu BD er saa stor som BC, saa er (5 Prop.) Vinklen BCD lige saa stor som Vinklen BDC. Da nu Vinklen ACD er (9 Ax.) større end Vinklen BCD; saa er Vinklen ACD ogsaa større end Vinklen BDC eller ADC. Fordi nu i Trianglen DAC den Vinkel ACD er større end den Vinkel ADC, og (efter 19 Prop.) den Side udi en Triangel er større, som staaer imod en større Vinkel: Saa skal Siden AD være større end Siden AC. Men nu er AD (efter Constr.) saa stor som AB, BC tilsammen. Følgelig ere AB, BC tilsammen større end AC. Paa samme Maade kand bevises, at BC, AC ere tilsammen større end AB, og AC, AB tilsammen større end BC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 21 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier blive dragne fra Enderne af en Triangels Side hen til en Punkt, som er inden for den samme Triangel: saa skal disse toe rette Linier være mindre end Trianglens øvrige toe Sider, men de skal indslutte en større Vinkel.

Exem-



Exempel. Lad udi Trianglen ABC de tvende rette Linier BD, DC være dragne fra Enderne B, C af Trianglens Side BC hen til en Punkt D, som er inden for Trianglen: saa siger jeg først, at de tvende rette Linier BD, DC ere tilsammen mindre end Trianglens øvrige toe Sider BA, AC tilsammen tagne. Og for det andet, at Vinklen BDC, som bemeldte rette Linier BD, DC indslutte, er større end Vinklen BAC, som Trianglens øvrige toe Sider indslutte.

Demonstration. Naar man drager BD lige ud imod E (2 Post.), saa faaer man den Triangel BAE, hvori de toe Sider BA, AE ere tilsammen større (20 Prop.) end den øvrige BE. Dersom nu den rette Linie EC legges til de tvende BA, AE, og samme legges ogsaa til BE, saa ere BA, AC tilsammen (4 Ax.) større end BE, EC. Fremdeeles ere udi Trianglen DCE de toe Sider DE, EC tilsammen større end DC (20 Prop.); Naar altsaa den rette Linie BD bliver dem tillagt: Saa ere BE, EC større end BD, DC (4 Ax.). Da nu Siderne BA, AC ere større end BE, EC, (som tilforn er beviist), saa ere ogsaa BA, AC tilsammen større end BD, DC. Hvilket først var at bevise.

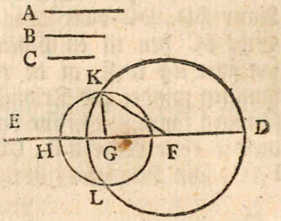
Fremdeeles, eftersom den Vinkel, som er uden for en Triangel, er (16 Prop.) større end nogen af de indvendige og imodsatte: saa er Vinklen BDC, som er uden for Trianglen DCE, større end Vinklen DEC eller BEC. Af samme Aarsag er Vinklen BEC, som er uden for Trianglen ABE, større end Vinklen BAE. Følgelig er ogsaa Vinklen BDC større end Vinklen BAE eller BAC. Hvilket for det andet var at bevise.

Den 22 Proposition.

Problema.

Af tre rette Linier, som ere saa store som tre givne rette Linier, at beskrive en Triangel. Men af de tre givne rette Linier bør toe, hvorledes de end tages, være tilsammen større end den øvrige.

Exempel. Lad A, B, C være tre givne rette Linier, af hvilke toe, hvorledes de end tages, ere større end den øvrige, nemlig: A og B tilsammen større end C; A og C tilsammen større end B; B og C tilsammen større end A: Man skal beskrive en Triangel udaf tre rette Linier, som ere saa store som A, B, C.



Construction. Fra en efter Behag antagen Punkt D drages en ret Linie DE, som kand udtrækkes hen imod E, saa langt man vil. Derneſt giøres (3 Prop.) DF saa stor som A, FG saa stor som B, og GH saa stor som C. Siden beskriver man (3 Prop.) af Middelpunkten F udi Længden FD en Cirkel DKL, og af Middelpunkten G udi Længden GH en Cirkel HKL. Endelig drages (1 Post.) fra samme Punkter F og G til Punkten K, hvor bemeldte Cirkler skiære hinanden, toe rette Linier FK, GK.

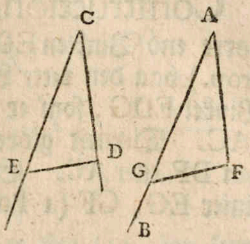
Demonstration. Eftersom F er Centrum af Cirklen DKL, saa er (14 Definition) FK saa stor som FD. Men FD er saa stor som A. Følgelig er og FK (1 Ax.) saa stor som A. Fremdeeles, eftersom G er Centrum af Cirklen HKL, saa er GK saa stor som GH; men GH er saa stor som C: og derfore er og GK saa stor som C. Fremdeeles er GF saa stor som B (efter Constr.); følgelig er Trianglen GKF beskreven af tre rette Linier FK, GF, GK, som ere saa store som de tre givne rette Linier A, B, C. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 23 Proposition.

Problema.

Paa en given ret Linie og udi en given Punkt deri at afsætte en ret-lined Vinkel, som er saa stor som en given ret-lined Vinkel.

Exem-



Exempel. Lad AB være den givne rette Linie og A den givne Punkt deri, og DCE den givne ret-linede Vinkel: Man skal udi den givne Punkt A paa den givne rette Linie AB afsætte en ret-lined Vinkel, der er saa stor som den givne ret-linede Vinkel DCE.

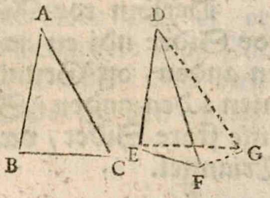
Construction. Udi de tvende rette Linier CD, CE tages toe Punkter D, E efter Behag; Derneſt drager man ED (1 Poſt.); Endelig beskrives (22 Prop.) en Triangel AFG af tre rette Linier, ſom ere ſaa ſtore ſom de tre CD, CE, ED, ſaa at AF bliver ſaa ſtor ſom CD, AG ſaa ſtor ſom CE, og GF ſaa ſtor ſom ED.

Demonſtration. Efterſom nu de toe rette Linier AG, AF ere (efter Conſtr.) ſaa ſtore ſom de toe rette Linier CE, CD, nemlig: enhver i ſær ſaa ſtor ſom en anden, og Grund-Linien GF er lige ſaa ſtor ſom Grund-Linien ED, ſaa er (8 Prop.) Vinklen FAG lige ſaa ſtor ſom Vinklen DCE, og den er ogſaa affat udi Punkten A paa den rette Linie AB. Hvilket var det, ſom ſkulde giøres.

Den 24 Propoſition.

Theorema.

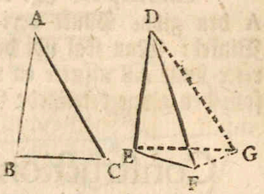
Derſom toe Sider udi en Triangel ere hver i ſær ſaa ſtore ſom toe Sider udi en anden Triangel, og den Vinkel, ſom indſluttes af de lige ſtore Sider, er ſtørre i den eene end i den anden Triangel; ſaa ſkal ogſaa Grund-Linien i den eene Triangel være ſtørre end Grund-Linien i den anden Triangel.



Exempel Lad den Triangel ABC have toe Sider AB, AC hver i ſær ſaa ſtore ſom toe Sider DE, DF udi en anden Triangel DEF, ſaa at AB er ſaa ſtor ſom DE, og AC ſaa ſtor ſom DF; Men lad den Vinkel BAC være ſtørre end den Vinkel EDF: Saa ſiger jeg, at ogſaa Grund-Linien BC er ſtørre end Grund-Linien EF.

Con-

Construction. Fordi Vinklen BAC er større end Vinklen EDF, saa affætter man (23 Prop.) paa den rette Linie DE udi Punkten D en Vinkel EDG, som er saa stor som den Vinkel BAC. Dernest giøres (3 Prop.) DG saa stor som DF eller AC. Endelig drager man de rette Linier EG, GF (1 Post.).



Demonstration; Da nu de tvende Sider BA, AC ere saa store som de toe Sider ED, DG, og Vinklen BAC er saa stor som Vinklen EDG (efter Constr.), saa er og (4 Prop.) BC saa stor som EG. Fremdeeles efterdi DG er saa stor som DF (efter Constr.), saa er (5 Prop.) Vinklen DFG saa stor som Vinklen DGF; Men Vinklen DGF er større (9 Ax.) end Vinklen EGF. Følgelig er ogsaa Vinklen DFG større end EGF. Da nu den Vinkel EFG er større (9 Ax.) end den Vinkel DFG, saa maae den nødvendigen ogsaa være større end Vinklen EGF. Følgelig er i Trianglen FEG den Vinkel EFG større end den Vinkel EGF, og derfore er ogsaa (19 Prop.) den Side EG større end den Side EF. Men BC er lige saa stor som EG (som tilforn blev beviist): Følgelig er BC større end EF. Hvilket var det, som skulde bevises.

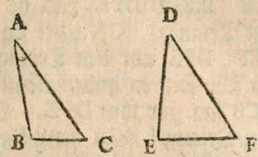
Den 25 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Sider udi en Triangel ere lige saa store som toe Sider udi en anden Triangel, hver Side i sær saa stor som en anden, og Grund-Linien i den eene er større end Grund-Linien i den anden: Saa skal og den Vinkel, som indsluttes af de lige store Sider, være større udi den eene end udi den anden Triangel.

Exem-

Exempel. Lad de toe Sider BA, AC udi den Triangel ABC være lige saa store som de toe Sider DE, DF i Trianglen DEF, hver Side i sær saa stor som en anden, nemlig: AB saa stor som DE, og AC saa stor som DF, men lad Grund-Linien EF være større end Grund-Linien BC: saa siger jeg, at Vinklen D er større end Vinklen A.

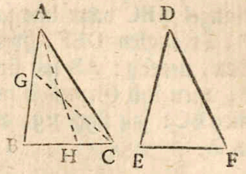


Demonstration. Dersom Vinklen D var lige saa stor som Vinklen A, saa maatte (4 Prop.) Grund-Linien EF være lige saa stor som Grund-Linien BC, fordi BA, AC ere lige saa store som ED, DF (efter hypothesin). Efterdi da EF er større end BC (Hyp.), saa kand Vinklen D ikke være lige saa stor som Vinklen A. Og dersom Vinklen D var mindre end den Vinkel A, da maatte (24 Prop.) Grund-Linien EF være mindre end Grund-Linien BC, men dette er atter imod Hypothesin, hvorfore den Vinkel D ey heller kand være mindre end den Vinkel A. Følgelig er Vinklen D større end Vinklen A. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 26 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Vinkler i en Triangel ere lige saa store som toe Vinkler i en anden Triangel, hver Vinkel i sær saa stor som en anden, og dersom fremdeeles udi den eene Triangel enten den Side, som ligger imellem de lige store Vinkler, eller og een af de toe øvrige Sider, som staae imod de lige store Vinkler, er saa stor som den samme Side udi den anden Triangel: Saa skal og de øvrige Sider hver i sær og den øvrige Vinkel i den eene Triangel være lige saa store som de øvrige Sider og den øvrige Vinkel i den anden Triangel.



Exempel. Lad de toe Vinkler ABC, ACB udi den Triangel BCA være lige saa store som de toe Vinkler DEF, DFE udi den Triangel EFD, enhver Vinkel i sær saa stor som en anden, nemlig: ABC saa stor som DEF, og ACB saa stor som DFE. Lad ogsaa een af Siderne udi den Triangel BCA være lige saa stor som een af Siderne i den Triangel EFD; saa siger jeg, at de øvrige Sider i Trianglen BCA ere hver i sær saa store som de øvrige Sider i den Triangel EFD, og at den øvrige Vinkel BAC er lige saa stor som den øvrige Vinkel EDF.

1. Lad de Sider, som ligge imellem de lige store Vinkler være lige store, nemlig: den Side BC lige saa stor som Siden EF: Saa siger jeg, at Siden AB er lige saa stor som Siden DE, og AC saa stor som DF, item at Vinklen BAC er lige saa stor som Vinklen EDF.

Demonſtration. Hvis Siderne AB, ED ikke ere af lige Størrelse, saa maae een af dem være den større. Lad nu AB holdes for at være større end ED, og giør da BG (3 Prop.) saa stor som ED, og drag den rette Linie GC; Saa har man toe Triangler GBC, DEF, hvori Siden BG holdes for at være lige saa stor som Siden ED og BC er (efter Hypoth.) lige saa stor som EF, og Vinklen GBC er (efter Hyp.) lige saa stor som Vinklen DEF. Heraf følger da (efter 4 Prop.), at Grund-Linien GC er lige saa stor som Grund-Linien DF, og Trianglen GBC saa stor som Trianglen DEF, og at de Vinkler GCB, DEF, som staae imod de lige store Sider BG, ED ere lige store med hinanden. Men Vinklen DFE er lige saa stor som Vinklen ACB (efter Hyp.); Følgelig skulde (1 Ax.) Vinklen GCB være lige saa stor som Vinklen ACB, nemlig: den mindre skulde være lige saa stor som den større, hvilket er u-mueligt (9 Ax.). Derfore kand Siderne AB og DE ikke være af u-lige Størrelse, følgelig maae de være lige store. Altsaa ere udi Trianglerne ABC og DEF de toe Sider AB, BC lige saa store som de toe Sider DE, EF, nemlig enhver i sær saa stor som en anden, og Vinklen ABC er lige saa stor som Vinklen DEF; Følgelig er (4 Prop.) AC lige saa stor som DF, og Vinklen BAC saa stor som Vinklen EDF. Hvilket for det første var at bevise.

2. Lad

2. Lad for det andet toe Sider AB, DE, som staae imod lige store Vinkler ACB, DFE, være lige store; Jeg siger atter, at de øvrige Sider ere lige saa store som de øvrige Sider, enhver i sær saa stor som en anden, nemlig: BC saa stor som EF, og AC saa stor som DF, og at Vinklen BAC er saa stor som Vinklen EDF.

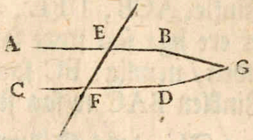
Thi, hvis Siderne BC og EF ey ere af lige Størrelse, saa maae een af dem være den største. Lad nu BC holdes for at være den største, og giør da (3 Prop.) BH saa stor som EF. Naar nu AH drages, saa har man toe Triangler ABH, DEF, hvori BH er lige saa stor som EF, og AB saa stor som DE, og altsaa toe Sider AB, BH ere saa store som toe Sider DE, DF, enhver i sær saa stor som en anden, og desuden er Vinklen ABH (efter Hyp.) saa stor som Vinklen DEF; Følgelig skal (4 Prop.) Grund-Linien AH være lige saa stor som Grund-Linien DF, og Trianglen ABH lige saa stor som Trianglen DEF, og ligeledes skal de Vinkler AHB, DFE, som staae imod de lige store Sider AB, DE være lige store med hinanden. Men Vinklen DFE er lige saa stor (efter Hyp.) som Vinklen ACB. Følgelig skulde (1 Ax.) Vinklen AHB være lige saa stor som Vinklen ACB, hvilket er u-mueligt (16 Prop.); thi AHB er den udvendige Vinkel af Trianglen AHC, og ACB eller ACH er den indvendige eller imodsatte Vinkel. Derfore kand de Sider BC og EF ikke være af u-lige Størrelse; følgelig ere de lige store. Men nu er ogsaa AB lige saa stor (efter Hyp.) som DE: Følgelig ere de toe Sider AB, BC lige saa store som de toe Sider DE, EF og disse indslutte lige store Vinkler ABC, DEF. Derfore er (4 Prop.) AC lige saa stor som DF og den øvrige Vinkel BAC lige saa stor som den øvrige Vinkel EDF. Hvilket for det andet var at bevise.

Den 27 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie, som falder paa toe rette Linier, giør Vexel-Vinklerne lige store: Saa skal de tvende rette Linier være Parallele.

Exempel. Lad den rette Linie EF, som falder paa de toe rette Linier AB, CD, giøre Vexel-Vinklerne AEF, EFD lige store: saa siger jeg, at AB er Parallel med CD.



Demonstration; Dersom AB, CD ey ere Parallele med hinanden, saa maae de, naar de immerfort uddrages, støde sammen enten paa den Side imod B, D eller paa den Side imod A, C. Lad dem nu blive uddragne fra B, D, og støde sammen i Punkten G.

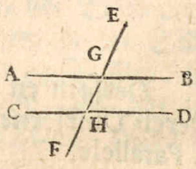
Saa er AEF den udvendige Vinkel af Trianglen EGF, og EFG er een af de indvendige og imodsatte Vinkler. Følgelig burde Vinklen AEF være større end Vinklen EFG (efter 16 Prop.). Men det er den ikke, thi den er lige saa stor som EFG (efter Hyp.): derfore kand AB, CD ikke støde sammen mod B, D. Paa samme Maade kand bevises, at AB, CD ikke kand støde sammen imod A, C. Men rette Linier, som paa ingen Side støde sammen, naar de blive immerfort uddragne, ere (35 Def.) Parallele med hinanden. Følgelig er AB Parallel med CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 28 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie falder paa toe rette Linier, og giør den udvendige Vinkel lige saa stor som den indvendige imodsatte, som er paa den samme Side, som den udvendige; eller om den giør de toe indvendige Vinkler, som ere paa een og den samme Side, saa store som toe rette Vinkler: Saa skal de tvende rette Linier være Parallele.

Exempel. Lad den rette Linie EF falde paa de tvende rette Linier AB, CD og giøre den udvendige Vinkel EGB lige saa stor som den indvendige og imodsatte Vinkel GHD, der er paa samme Side af EF, som den udvendige EGB; eller lad de indvendige Vinkler BGH, GHD, som ere paa een og den samme Side, være tilsammen saa store som toe rette Vinkler; saa siger jeg, at AB er Parallel med CD.



Demon-

Demonstration. Eftersom Vinklen EGB er (efter Hyp.) lige saa stor som Vinklen GHD, og EGB er (15 Prop.) ogsaa lige saa stor som AGH, saa skal og AGH (1 Ax.) være lige saa stor som GHD, og fordi disse ere Vexel-Vinkler, saa er AB (27 Prop.) Parallel med CD. Hvilket var for det første at bevise.

2. Efterdi Vinklerne BGH, GHD ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler (efter Hyp.), og BGH, AGH ere (13 Prop.) ogsaa saa store som toe rette Vinkler, saa skal Vinklerne BGH, GHD være (1 Ax.) saa store som BGH, AGH. Tag den fælles Vinkel BGH fra dem, saa skal den øvrige AGH være (3 Ax.) lige saa stor som den øvrige GHD, og fordi disse ere Vexel-Vinkler: saa skal (27 Prop.) AB være Parallel med CD. Hvilket var for det andet at bevise.

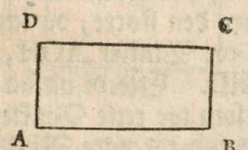
1 Corollarium.

Naar altsaa de toe indvendige Vinkler BGH, GHD ere større end toe rette Vinkler, saa maae de rette Linier AB, CD gaae videre fra hinanden, jo længere de blive uddragne imod BD. Men derimod, naar bemelte Vinkler ere mindre end toe rette Vinkler, saa maae AB, CD omsider støde sammen, naar de blive uddragne imod B, D.

Heraf sees da, at det 11 Axioma er gandske rigtigt.

2 Corollarium.

Dersom alle Vinkler A, B, C, D i en Fiirkant ABCD ere rette Vinkler, saa er Fiirkanten et Parallelogram.



Demonstration. Efterdi den rette Linie AB falder paa de toe rette Linier AD, BC, og gior de toe indvendige Vinkler A og B saa store som toe rette Vinkler, thi enhver af dem er en ret Vinkel (efter Hyp.), saa er (efter 28 Prop.) AD Parallel med BC. Ligeledes, fordi de toe indvendige Vinkler

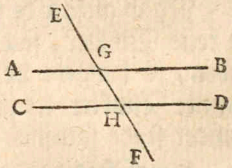
kler A og D, som AD gior med DC, AB, ere toe rette Vinkler (efter Hyp.), saa er ogsaa AB Parallel med DC. Følgelig er ABCD et Parallelogram (efter 36 Defin.). Hvilket var det, som skulde bevises.

Heraf følger da, at baade en Qvadrat og et Oblongum ere Parallelogrammer, fordi alle deres Vinkler ere rette (see 30 og 31 Defin.)

Den 29 Proposition.
Theorema.

Dersom en ret Linie falder paa toe Parallele-Linier, saa skal den giøre Vexel-Vinklerne lige store; den udvendige Vinkel lige saa stor som den indvendige og imodsatte, som staaer paa samme Side, som den udvendige; og de indvendige, som ere paa een og den samme Side, saa store som toe rette Vinkler.

Exempel. Lad den rette Linie EF falde paa de tvende Parallel-Linier AB, CD; Jeg siger (1) at Vexel-Vinklerne AGH, GHD ere lige store, (2) at den udvendige Vinkel EGB er lige saa stor som den indvendige og imodsatte Vinkel GHD, som er paa samme Side af EF; og (3) at de indvendige Vinkler BGH, GHD, som ere paa een og den samme Side af EF, ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler.



Demonstration. Hvis de Vinkler AGH, GHD ey ere lige store, saa maae een af dem være den større. Lad AGH holdes for at være den større, og læg Vinklen BGH til enhver af dem, saa ere (4 Ax.) de toe Vinkler AGH, BGH tilsammen større end de toe Vinkler BGH, GHD. Efterdi altsaa de Vinkler AGH, BGH ere (13 Prop.) saa store som toe rette Vinkler: Saa skal de Vinkler BGH, GHD være mindre end toe rette Vinkler. Men naar en ret Linie, som falder paa toe andre rette Linier, gior de toe indvendige Vinkler, som ere paa samme Side, mindre end toe rette Vinkler, saa skal de toe rette Linier (11 Ax.) naar de blive immerfort uddragne, omsider støde sammen: Altsaa skulde AB, CD, naar de blive uddragne, støde sammen. Men det giøre de ikke

ikke (35 Def.), fordi de ere Parallele (efter Hyp.): Altsaa kand Vexel-Vinklerne AGH, GHD ikke være af u-lige Størrelse, og følgelig ere de lige store. Hvilket (1) var at bevise.

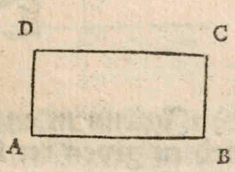
2 Vinklen AGH ere lige saa stor (efter 15 Prop.) som EGB, og efterdi nyelig er beviist, at den Vinkel GHD er ogsaa lige saa stor som den samme Vinkel AGH, saa er og følgelig den udvendige Vinkel EGB lige saa stor som den indvendige GHD. Hvilket (2) var at bevise.

3 Naar nu til hver i sær af de lige store Vinkler EGB, GHD tillægges den Vinkel BGH, saa ere de Vinkler EGB, BGH (2 Ax.) saa store som BGH, GHD. Men Vinklerne EGB, BGH ere (13 Prop.) saa store som toe rette Vinkler; Følgelig ere og de indvendige Vinkler BGH, GHD (1 Ax.) saa store som toe rette Vinkler. Hvilket (3) var at bevise.

Paa samme Maade bevises ogsaa, at de andre Vexel-Vinkler BGH GHC ere lige store, og at enhver af de udvendige Vinkler EGA, FHC, FHD er saa stor som sin indvendige og imodsatte Vinkel, nemlig: EGA saa stor som GHC, FHC saa stor som HGA, og FHD saa stor som HGB, og at de toe indvendige Vinkler AGH, GHC ere saa store som toe rette Vinkler.

Corollarium.

Heraf følger, at udi ethvert Parallelogram ABCD, naar en Vinkel, for Exempel A er en ret Vinkel, saa ere ogsaa de øvrige Vinkler B, C og D rette Vinkler.



Demonstration. Efterdi ABCD er et Parallelogram (efter Hyp.), saa er den rette Linie AB (36 Def.) Parallel med DC, og fordi den rette Linie DA falder paa dem, saa ere de toe indvendige Vinkler A og D tilsammen saa store (29 Prop.) som toe rette Vinkler; Men nu er A en ret Vinkel (efter Hyp.); følgelig er ogsaa D en ret Vinkel. Paa samme Maade bevises ogsaa, at B og C ere rette Vinkler. Hvilket var det, som skulde bevises.

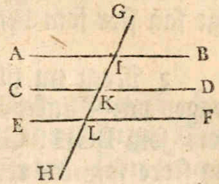
Den

Den 30 Proposition.

Theorema.

De rette Linier, som ere Parallele med een og den samme rette Linie, ere Parallele med hinanden,

Exempel. Lad enhver af de toe rette Linier AB, EF være Parallel med een og den samme rette Linie CD: saa siger jeg, at de rette Linier AB, EF ogsaa ere Parallele med hinanden.



Construction. Lad en ret Linie GH falde paa AB, CD, EF.

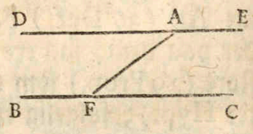
Demonstration. Fordi nu AB, CD ere Parallele med hinanden, og GH falder paa dem: Saa ere (29 Prop.) Vexel-Vinklerne AIK, IKD lige store. Ligeledes fordi CD, EF ere Parallele og GH falder paa dem, saa er den udvendige Vinkel IKD lige saa stor (29 Prop.) som den indvendige ILF. Da nu Vinklen AIL ogsaa er lige saa stor som den samme IKD (som nyligen er beviist), saa er AIL ((1 Ax.) lige saa stor som ILF, og disse ere Vexel-Vinkler. Følgelig er AB Parallel med EF (27 Prop.). Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 31 Proposition.

Problema.

Igiennem en given Punkt at drage en ret Linie Parallel med en given ret Linie.

Exempel. Lad A være den givne Punkt, og BC den givne rette Linie: Her begiæres, at man skal drage en ret Linie igiennem Punkten A Parallel med BC.



Construction. Udi den rette Linie BC antages en Punkt F efter Behag. Derneſt

drages

drages den rette Linie AF, paa hvilken afsættes (23 Prop.) i Punkten A en Vinkel DAF, som er saa stor som Vinklen AFC. Endelig drages den rette Linie DA længere ud hen imod E (2 Post.)

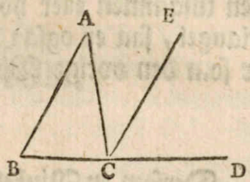
Demonstration. Eftersom den rette Linie AF, som falder paa de toe rette Linier DE, BC, giør Vexel-Vinklerne DAF, AFC lige store, saa er (27 Prop.) DE draget igiennem Punkten A Parallel med den givne rette Linie BC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 32 Proposition.

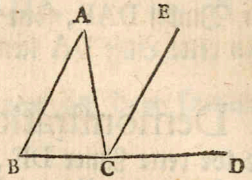
Theorema.

Naar en Side udi en Triangel bliver længere uddragen, saa er den udvendige Vinkel saa stor, som de toe indvendige og imodsatte Vinkler tilsammen tagne; og i hver Triangel ere de tre indvendige Vinkler saa store som toe rette Vinkler.

Exempel. Lad ABC være en Triangel, og lad dens Side BC blive længere uddragen hen imod D: Saa siger jeg, (1) at den udvendige Vinkel ACD er lige saa stor som de toe indvendige og imodsatte Vinkler A og B tilsammen. Og (2) at Trianglens tre indvendige Vinkler A, B og BCA tilsammen ere saa store, som toe rette Vinkler.



Demonstration. Naar man igiennem Punkten C drager (efter 31 Prop.) en ret Linie EC Parallel med AB, saa ere Vexel-Vinklerne ECA og A lige store (29 Prop.). Fremdeeles, eftersom AB er Parallel med EC, og BD falder paa dem, saa er (29 Prop.) den udvendige Vinkel ECD lige saa stor som den indvendige og imodsatte Vinkel B: Derfore er den heele udvendige Vinkel ACD lige saa stor (2 Ax.) som de toe indvendige og imodstaaende Vinkler A og B tilsammen. Hvilket (1) var at bevise.



Naar nu den fælles Vinkel BCA lægges til den udvendige Vinkel ACD, og den samme lægges til de toe indvendige Vinkler A og B tilsammen, saa ere Vinklerne BCA, ACD lige saa store som de tre Vinkler A, B, BCA. Men de toe Vinkler BCA, ACD ere (13 Prop.) saa store som toe rette Vinkler: følgelig ere og de tre indvendige Vinkler A, B og BCA tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Hvilket (2) var at bevise.

1 Corollarium.

Eftersom alle tre Vinkler udi enhver Triangel ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler (efter 32 Prop.); saa maae (1 Ax.) alle tre Vinkler udi en Triangel være tilsammen saa store som alle tre Vinkler udi en anden Triangel.

2 Corollarium.

Heraf følger da videre, at dersom toe Vinkler udi en Triangel ere enten tilsammen eller hver for sig saa store som toe Vinkler udi en anden Triangel, saa er ogsaa den øvrige Vinkel udi den eene Triangel lige saa stor som den øvrige Vinkel udi den anden Triangel.

3 Corollarium.

Dersom en Vinkel i en Triangel er en ret Vinkel, saa skal de tvende øvrige Vinkler tilsammen være saa store som en ret Vinkel. Item: Dersom toe Vinkler i en Triangel ere tilsammen saa store som den tredie, saa er samme tredie Vinkel en ret Vinkel.

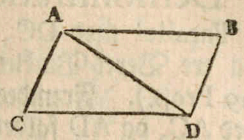
Den 33 Proposition.

Theorema.

De rette Linier, som sammenføye lige store og Parallele rette Linier ved de samme Sider, ere selv lige store og Parallele.

Exem-

Exempel. Lad de rette Linier AB, CD være lige store og Parallele, og lad AC, BD sammenføye dem ved de samme Sider, nemlig: at A og C paa den eene Side, ligeledes B og D paa den anden Side blive sammenføyede: saa siger jeg, (1) at AC, BD ere lige store, og (2) at de ere Parallele.



Demonstration. Drager man en ret Linie fra A til D, at den falder paa de Parallele-Linier AB, CD, saa ere (29 Prop.) Vexel-Vinklerne BAD, ADC lige store. Og fordi AB er (efter Hyp.) lige saa stor som CD, og AD er tilfælles for begge de Triangler ABD, ACD; saa ere toe Sider AB, AD hver i sær lige saa store som toe Sider CD, DA, og disse indslutte lige store Vinkler BAD, ADC. Følgelig er (4 Prop.) AC lige saa stor som BD. Hvilket (1) var at bevise.

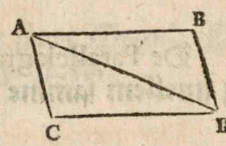
2 Videre følger (4 Prop.) at den Vinkel DAC udi Trianglen ACD er lige saa stor som Vinklen ADB udi den Triangel ABD, saa at den rette Linie AD, som falder ind paa de toe rette Linier AC, BD, gior Vexel-Vinklerne DAC og ADB lige store, hvorfore samme rette Linier AC, BD ere ogsaa Parallele. Hvilket (2) var at bevise.

Den 34 Proposition.

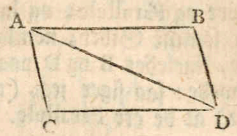
Theorema.

Udi ethvert Parallelogram ere de hinanden imodsatte Sider og Vinkler lige store: Og Tver-Linien deeler Parallelogrammet i toe lige store Deele.

Exempel. Lad ACDB være et Parallelogram og AD dens Tver-Linie eller Diameter: Jeg siger (1) at de hinanden imodsatte Sider og Vinkler af Parallelogrammet ACDB ere lige store, og (2) at Tver-Linien AD deeler Parallelogrammet ACDB udi toe lige store Deele.



 Demon-



Demonstration. Fordi AB (36 Def.) er Parallel med DC, og AD falder paa dem, saa ere Vexel-Vinklerne BAD, CDA lige store (29 Prop.). Fremdeeles, fordi BD er Parallel med AC, og AD falder paa dem, saa ere Vexel-Vinklerne BDA, CAD lige store: Saa have da de tvende Triangler ABD, ACD toe Vinkler BAD, BDA lige saa store som toe Vinkler CDA, CAD, enhver Vinkel i sær saa stor som en anden; videre have de een Side lige saa stor som een Side, som ligger imellem de lige store Vinkler, nemlig: AD, hvilken er tilfælles for begge Trianglerne: Følgelig skal og (26 Prop.) de øvrige Sider AB, BD være lige saa store som de øvrige Sider DC, CA, hver i sær saa stor som en anden, nemlig AB saa stor som DC og BD saa stor som CA, og den øvrige Vinkel B skal ogsaa være lige saa stor som den øvrige Vinkel C. Og eftersom Vinklen BAD er lige saa stor som Vinklen CDA og Vinklen CAD saa stor som BDA, saa er og (2 Ax.) den heele Vinkel BAC lige saa stor som den heele Vinkel BDC. Heraf følger da, at i Parallelogrammet ACDB de imodsatte Sider, og ligeledes de imodsatte Vinkler ere lige store. Hvilket (1) var at bevise.

2 Efterdi nu AB er lige saa stor som DC, og AD er en fælles Side, og Vinklen BAD er lige saa stor som Vinklen ADC; saa er (4 Prop.) Trianglen BAD lige saa stor som Trianglen DAC. Følgelig deeler Tver-Linien AD Parallelogrammet ACDB udi toe lige store Deele. Hvilket (2) var at bevise.

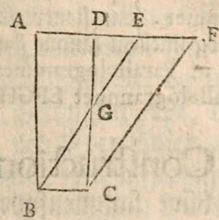
Den 35 Proposition.

Theorema.

De Parallelogrammer, som staae paa samme Grund-Linie og imellem samme Parallel-Linier, ere lige store.

Exem-

Exempel. Lad ABCD, EBCF være Parallelogrammer, som staae imellem samme Parallel-Linier AF, BC og paa samme Grund-Linie BC: Jeg siger, at Parallelogrammet ABCD er lige saa stort som Parallelogrammet EBCF.



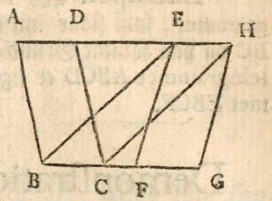
Demonstration. Eftersom ABCD er et Parallelogram (efter Hyp.), saa er (34 Prop.) AD lige saa stor som BC. Af samme Aarsag er ogsaa EF lige saa stor som BC; hvorfore AD og EF ere lige store (1 Ax.). Naar nu den fælles rette Linie DE lægges til AD og samme lægges ligeledes til EF, saa er den heele rette Linie AE lige saa stor som DF (2 Ax.). Ydermeere er AB (34 Prop.) lige saa stor som DC; og derfore ere da udi de toe Triangler EBA, FCD de toe Sider AE, AB lige saa store som de toe Sider DF, DC, nemlig hver for sig saa stor som en anden, videre er den udvendige Vinkel FDC lige saa stor (29 Prop.) som den indvendige EAB; Følgelig er Trianglen EBA (4 Prop.) lige saa stor som Trianglen FCD. Naar nu fra disse lige store Triangler borttages den fælles Triangel DGE, saa er det øvrige Stykke ABGD lige saa stort (3 Ax.) som det øvrige Stykke CGEF. Dersom til begge disse Stykker hver i sær lægges den fælles Triangel BGC; saa skal det heele Parallelogram ABCD være lige saa stort (2 Ax.) som det heele Parallelogram EBCF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 36 Proposition.

Theorema.

De Parallelogrammer, som staae paa lige store Grund-Linier og imellem samme Parallel-Linier, ere lige store.

Exempel. Lad ABCD, EFGH være Parallelogrammer, som staaer paa lige store Grund-Linier BC, FG og imellem samme Parallel-Linier AH, BG: saa siger jeg, at Parallelogrammet ABCD er lige saa stort som Parallelogrammet EFGH.



Construction. Lad de rette Linier EH, BC blive sammenføyede (2 Post.) ved de rette Linier EB, HC.

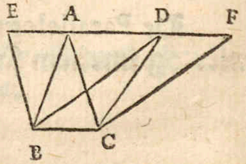
Demonstration. Eftersom BC er lige saa stor som FG (efter Hyp.), og FG er (34 Prop.) lige saa stor som EH, saa er og (1 Ax.) BC lige saa stor som EH. Da nu disse samme Linier BC, EH ere ogsaa Parallele (efter Hyp.), og de ere sammenføyede ved de rette Linier BE, CH, saa skal ogsaa BE, CH være lige store og Parallele (efter 33 Prop.) Hvorfore EBCH er et Parallelogram, som er (35 Prop.) lige saa stort som det Parallelogram ABCD, thi de staae begge paa samme Grund-Linie BC og imellem samme Parallel-Linier AH, BC. Ligeledes er og EBCH lige saa stort som Parallelogrammet EFGH, fordi de staae begge paa samme Grund-Linie EH og imellem samme Parallel-Linier AH, BG. Følgelig er det Parallelogram ABCD (1 Ax.) lige saa stort som Parallelogrammet EFGH. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 37 Proposition.

Theorema.

De Triangler, som staae paa een og den samme Grund-Linie og imellem samme Parallel-Linier, ere lige store.

Exempel. Lad de Triangler ABC, DBC staae paa samme Grund-Linie BC og imellem samme Parallel-Linier AD, BC; saa siger jeg, at Trianglen ABC er lige saa stor som Trianglen DBC.



Demonstration. Naar den Linie AD drages længere ud til begge Sider hen imod E og F;

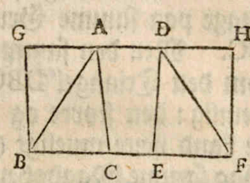
og igiennem den Punkt B trækkes (31 Prop.) en ret Linie BE Parallel med AC, og ligeledes igiennem den Punkt C trækkes en ret Linie CF Parallel med BD: saa ere EBCA og DBCF Parallelogrammer, som (35 Prop.) ere lige store, fordi de staae paa samme Grund-Linie BC og imellem samme Parallel-Linier EF, BC. Men nu er Trianglen ABC halfparten af det Parallelogram EBCA, som deeles ved Tver-Linien AB i toe lige store Deele (34 Prop.); og Trianglen DBC er Halfparten af Parallelogrammet DBCF, som ligeledes deeles ved Tver-Linien DC i toe lige store Deele; hvorfore Trianglen ABC (7 Ax.) er lige saa stor som Trianglen DBC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 38 Proposition.

Theorema.

De Triangler, som staae paa lige store Grund-Linier og imellem samme Parallel-Linier, ere lige store.

Exempel. Lad de Triangler ABC, DEF staae paa lige store Grund-Linier BC, EF og imellem samme Parallel-Linier AD, BF: saa siger jeg, at Trianglen ABC er lige saa stor som Trianglen DEF.



Demonstration. Naar den Linie AD drages ud paa begge Sider til H og G, og igiennem den Punkt B bliver draget (31 Prop.) en ret Linie BG Parallel med CA, og ligeledes igiennem F bliver draget en ret Linie FH Parallel med ED; saa faaer man toe Parallelogrammer, nemlig: GBCA og DEFH, som (36 Prop.) ere lige store, thi de staae begge paa lige store Grund-Linier BC, EF og imellem samme Parallel-Linier GH, BF. Men Trianglen ABC er Halfparten af Parallelogrammet GBCA, thi Tver-Linien AB deeler (34 Prop.) GBCA i toe lige store Deele, og Trianglen DEF er Halfparten af Parallelogrammet DEFH, fordi Tver-Linien DF deeler det i toe lige store Deele: Altsaa er Trianglen ABC (7 Ax.) lige saa stor som Trianglen DEF. Hvilket var det, sam skulde bevises.

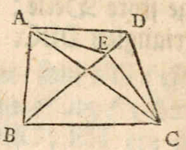
Den

Den 39 Proposition.

Theorema.

Naar lige store Triangler ere satte paa een og den samme Grund-Linie og paa een og den samme Side, da staae de ogsaa imellem samme Parallel-Linier,

Exempel. Lad ABC, DBC være lige store Triangler, som staae paa samme Grund-Linie BC og paa samme Side; saa siger jeg, at den rette Linie AD er Parallel med den rette Linie BC.



Demonstration. Dersom nogen nægter dette, saa lad (31 Prop.) igiennem Punkten A drages en anden ret Linie for Exempel: AE Parallel med BC.

Naar nu fra Punkten E drages en ret Linie EC, saa skal Trianglen ABC være lige saa stor (31 Prop.) som Trianglen EBC; thi de staae begge paa samme Grund-Linie BC og imellem samme Parallel-Linier AE, BC. Men den samme Triangel ABC er ogsaa (efter Hyp.) lige saa stor som den Triangel DBC: Derfor skulde ogsaa de Triangler DBC og EBC, nemlig: den større og den mindre være lige store (1 Ax.): hvilket dog ikke kand være muelig (9 Ax.). Følgelig er AE ikke Parallel med BC. Paa samme Maade bevises, at ingen af alle de rette Linier, som foruden AD drages igiennem den Punkt A, kand være Parallel med BC, og derfor er den rette Linie AD Parallel med den rette Linie BC. Hvilket var det, som skulde bevises.

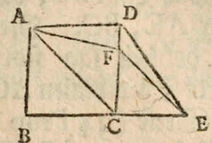
Den 40 Proposition.

Theorema.

Lige store Triangler, som staae paa lige store Grund-Linier og paa samme Side, staaer ogsaa imellem samme Parallel-Linier.

Exem-

Exempel. Lad ABC, DCE være lige store Triangler, og lad dem staae paa lige store Grund-Linier BC, CE og paa samme Side: saa siger jeg, at den rette Linie AD er Parallel med den rette Linie BE.



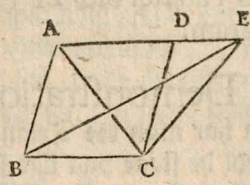
Demonstration. Vil nogen nægte, at AD er Parallel med BE, saa lad igiennem den Punkt A (31 Prop.) drages en anden ret Linie, for Exempel: AF Parallel med BE. Naar nu fra Punkten F drages en ret Linie FE, saa skal de Triangler ABC, FCE (38 Prop.) være lige store; thi de staae paa lige store Grund-Linier BC, CE og imellem samme Parallel Linier AF, BE. Men de Triangler ABC, DCE ere (efter Hyp.) lige store. Følgelig skal (1 Ax.) de Triangler DCE, FCE, nemlig den større og den mindre være lige store, hvilket dog er umueligt (9 Ax.). Derfore er AF ikke Parallel med BE. Paa samme Maade bevises, at ingen af alle de rette Linier, som foruden AD drages igiennem den Punkt A, kand være Parallel med BE; og derfor er da den rette Linie AD Parallel med den rette Linie BE. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 41 Proposition.

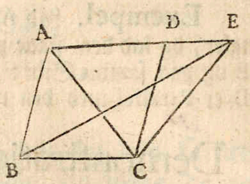
Theorema.

Dersom et Parallelogram og en Triangel staae paa samme Grund-Linie og imellem samme Parallel-Linier; saa skal Parallelogrammet være dobbelt saa stort som Trianglen.

Exempel. Lad Parallelogrammet ABCD og Trianglen EBC staae paa samme Grund-Linie BC og imellem samme Parallel-Linier AE, BC: Saa siger jeg, at Parallelogrammet ABCD er dobbelt saa stort som Trianglen EBC.



Demonstration. Naar man drager en ret Linie fra A til C tvert igiennem Parallelogrammet, saa er Trianglen ABC lige saa stor som Trianglen EBC, thi de staae paa samme Grund-Linie BC, og imellem samme Parallel-Linier AE, BC. Men Parallelogrammet ABCD er dobbelt saa stort som den Triangel ABC, fordi Tver-Linien AC deeler ABCD i toe lige store Deele (34 Prop.). Hvorfore det heele Parallelogram ABCD er ogsaa dobbelt saa stort som Trianglen EBC. Hvilket var det, som skulde bevises.

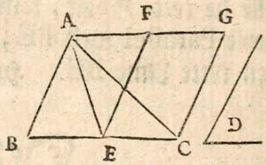


Den 42 Proposition.

Theorema.

Udi en given ret-Linet Vinkel at beskrive et Parallelogram saa stort som en given Triangel.

Exempel. Lad ABC være den givne Triangel og D den givne Vinkel: Her begiæres, at man skal beskrive et Parallelogram, som er saa stort som Trianglen ABC, i en ret-Linet Vinkel, som er saa stor som den Vinkel D.



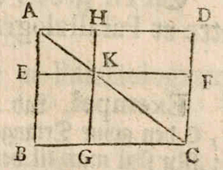
Construction. (1) Trianglens eene Side BC bliver skaaren i toe lige store Deele udi E (10 Prop.); (2) udi den Punkt E paa den rette Linie CE afsættes en Vinkel CEF saa stor som den givne Vinkel D (23 Prop.). (3) Igiennem den Punkt A trækkes en ret Linie AG Parallel med BC; ligeledes igiennem den Punkt C trækkes den rette Linie CG Parallel med EF (31 Prop.): Saa er FECG det forlangte Parallelogram.

Demonstration. Naar der drages en ret Linie fra A til E, saa har man toe Triangler ABE og ACE, som ere lige store (38 Prop.), fordi de staae paa lige store Grund-Linier BE, EC (efter Constr.) og imellem samme Parallel-Linier AG, BC. Følgelig er Trianglen ABC dobbelt saa stor som Trianglen AEC. Men Parallelogrammet FECG er og dobbelt saa stort som Trianglen AEC (41 Prop.); thi de staae begge ge paa samme Grund-Linie EC og imellem samme Parallel-Linier AG, EC. Derfor er da (6 Ax.) Parallelogrammet FECG lige saa stort som den givne Triangel ABC og har den Vinkel CEF (efter Constr.) lige saa stor som den givne ret-linede Vinkel D. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 43 Proposition.

Theorema.

Udi ethvert Parallelogram **ere** Supplementerne **til de** Parallelogrammer, **som ere omkring Tver-Linien, lige store.**

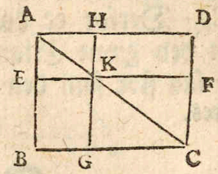


Exempel. Lad ABCD være et Parallelogram, hvis Diameter eller Tver-Linie er AC; Lad AEKH og KGCF være Parallelogrammer, som staae omkring Tver-Linien AC; men lad EBGK og HKFD være Supplementerne (Fylde-Rumme) til førstbemeldte Parallelogrammer AEKH og KGCF: Saa siger jeg, at det Fylde-Rum EBGK er lige saa stort som det Fylde-Rum HKFD.

Demonstration. Efterdi Tver-Linien AC skiærer de tre Parallelogrammer ABCD, AEKH, KGCF hver i sær udi toe lige store Deele (34 Prop.), saa er den Triangel ABC lige saa stor som Trianglen ADC, Trianglen AEK lige saa stor som Trianglen AHK, og Trianglen KGC lige saa stor som Trianglen KFC. Hvorfore de toe Triangler AEK, KGC tilsammen ere lige saa store som de toe Triangler AHK, KFC (2 Ax.). Naar nu fra enhver af de lige store Triangler ABC, ADC borttages lige meget, nemlig: fra ABC borttages de toe Triangler AEK, KGC, og fra ADC borttages de toe Triangler AHK, KFC, saa ere de overblivende Supplementer EBGK, HKFD lige store. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion (Anmerkning.)

Naar inden for et Parallelogram ABCD antages en Punkt K i Tver-Linien AC og igiennem samme Punkt K drages toe rette Linier HG og EF Parallele med Parallelolelogrammets Sider, nemlig: HG Parallel med AB eller DC, og EF Parallel med AD eller BC, saa deeles derved Parallelogrammet ABCD i de fire Parallelogrammer AEKH, EBGK, KGCF, og FKHD; hvoraf de toe AEKH, KGCF, igiennem hvilke Tver-Linien AC gaaer, kaldes Parallelogrammer, som ere omkring Tver-Linien; og de toe øvrige EBGK og FKHD kaldes Supplementa eller Fylde-Rumme til de toe første.

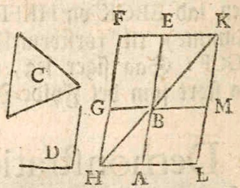


Den 44 Proposition.

Problema.

Til en given ret Linie og i en given ret-lined Vinkel at opsætte et Parallelogram saa stort som en given Triangel.

Exempel. Lad AB være den givne rette rette Linie, C den givne Triangel og D den givne ret-linede Vinkel: Nu skal man til den rette Linie AB og udi en Vinkel af lige Størrelse med den Vinkel D opsætte et Parallelogram, der er lige saa stort som den givne Triangel C.



Construction. 1 Man opsætter (42 Prop.) et Parallelogram BEFG, der er saa stort som den givne Triangel C og har en Vinkel EBG af lige Størrelse med den Vinkel D.

2 Den givne Linie AB bliver sat udi en lige Linie med BE, og FG addrages hen imod H.

3 Igiennem den Punkt A trækkes AH Parallel med BG eller EF (31 Prop.).

4 Fra den Punkt H drages en Tver-Linie igiennem B ud ad, saa at de uddragne Linier FE og HB støde sammen i den Punkt K.

5 Igiennem den Punkt K drages en ret Linie KL Parallel med EA eller FH og de rette Linier GB, HA drages ud til M og L. Saa er ABML det forlangte Parallelogram.

Demon-

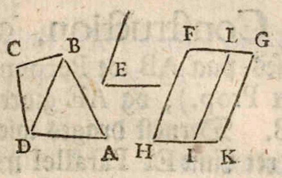
Demonstration. Det Parallelogram BEFG er (efter Constr.) saa stort som den Triangel C; Det samme Parallelogram BEFG er ogsaa (43 Prop.) lige saa stort som det Parallelogram ABML. Derfore er ABML (1 Ax.) saa stort som Trianglen C. Og eftersom den Vinkel ABM er saa stor som den Vinkel GBE (15 Prop.), og den Vinkel GBE er saa stor som den Vinkel D (efter Constr.), saa ere (1 Ax.) de Vinkler ABM og D lige store. Hvorfore til den givne rette Linie AB er opsat det Parallelogram ABML, som er lige saa stort som den givne Triangel C, og i en Vinkel ABM af lige Størrelse med den givne Vinkel D. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 45 Proposition.

Problema.

Udi en given ret-lined Vinkel at beskrive et Parallelogram, der er saa stort som en given ret-lined Figur.

Exempel. Lad ABCD være den givne ret-linede Figur og E den givne Vinkel: Det begiæres, at giøre et Parallelogram, som er saa stort som den ret-linede Figur ABCD, i en ret-lined Vinkel af lige Størrelse med E.

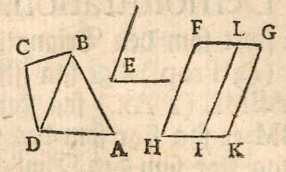


Construction. 1 Drag Tver-Linien BD og giør (42 Prop.) et Parallelogram FI saa stort som Trianglen ABD i en Vinkel IHF, som er saa stor som E.

2 Til den rette Linie LI og i en Vinkel LIK, som er saa stor som Vinklen E, opsættes (44 Prop.) et Parallelogram LIKG, som er saa stort som Trianglen BDC. Saa er FHKG det forlangte Parallelogram.

Demonstration; Den Triangel ABD er lige saa stor som det Parallelogram FI (efter Constr.), og den Triangel BDC er lige saa stor som det Parallelogram LK. Altsaa ere (2 Ax.) de toe Triangler ABD, BDC

BDC tilsammen lige saa store som de toe Parallelogrammer FI, LK tilsammen, det er, den heele ret-linede Figur ABCD er lige saa stor som det heele Parallelogram FK. Og efterdi Vinklen H udi Parallelogrammet FK er giort lige saa stor som den givne Vinkel E; saa er da Parallellelogrammet FK efter Forlangende beskrevet. Hvilket var det, somskulde giøres.

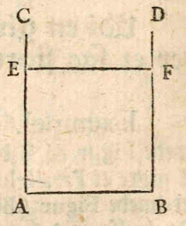


Den 46 Proposition.

Problema.

Paa en given ret Linie at beskrive en Qvadrat.

Exempel. Lad AB være den givne rette Linie: Man skal beskrive en Qvadrat paa samme AB.



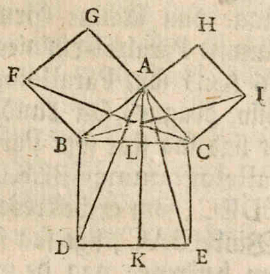
Construction. Fra Punkterne A og B opreises paa AB toe Perpendicular-Linier AE og BD (11 Prop.), og AE giøres (3 Prop.) saa stor som AB. Derneſt drages igiennem Punkten C (31 Prop.) en ret Linie EF Parallel med AB. Saa er ABFE den forlangte Qvadrat.

Demonstration. Eftersom Vinklerne EAB, ABF ere rette (efter Constr.), saa er (28 Prop.) AE Parallel med FB. Men EF er og Parallel med AB (efter Constr.); Følgelig er ABFE et Parallelogram, og derfore er AB lige saa stor som EF, og FB saa stor som EA (34 Prop.). Eftersom da EA er lige saa stor som AB (efter Constr.), saa ere de fire Sider EA, AB, BF, FE lige store. Ydermeere ere alle Vinkler i Parallelogrammet ABFE rette (efter Cor 29 Prop.); thi den Vinkel EAB er en ret Vinkel (efter Constr.): Følgelig er ABFE en Qvadrat (30 Def.), som er beskreven paa den givne rette Linie AB. Hvilket var det, som skulde giøres

Den 47 Proposition.

Theorema.

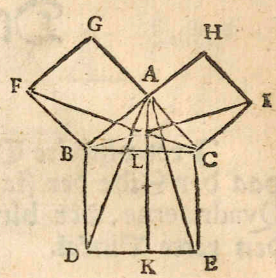
I ret-vinkelte Triangler er Qvadraten, som bliver beskreven paa den Side der staaer imod den rette Vinkel, lige saa stor som Qvadraterne, der blive beskrevne paa de Sider, som indslutte den rette Vinkel.



Exempel. Lad ABC være en ret-vinklet Triangel, som har en ret Vinkel BAC: saa siger jeg, at Qvadraten, som beskrives paa den rette Linie BC, er lige saa stor som begge de Qvadrater, der beskrives paa BA, AC.

Construction. Paa den rette Linie BC beskrives (46 Prop.) en Qvadrat BDEC, og paa AB, AC beskrives de Qvadrater BG, CH. Dernest drages igiennem Punkten A (31 Prop.) en ret Linie AK Parallel med BD eller med CE. Endelig drager man de rette Linier AD og CF.

Demonstration. Fordi de toe rette Linier AG, AC ere saaledes dragne til een og den samme Punkt A i den rette Linie AB, at Vinklerne paa begge Sider, nemlig den Vinkel BAG og den Vinkel BAC tilsammen giøre toe rette Vinkler; (thi enhver af dem er en ret Vinkel), saa er GA i lige Linie med AC (14 Prop.), saa at GA, AH giøre tilsammen en ret Linie CG. Paa samme Maade kand ogsaa bevises at AB, AH ere i en lige Linie, saa at BAH er en ret Linie. Videre er (10 Ax.) den Vinkel DBC saa stor som den Vinkel FBA, thi enhver af dem er en ret Vinkel (30 Def.). Læg nu den Vinkel ABC til enhver af dem: saa er (2 Ax.) den heele Vinkel FBC lige saa stor som den heele Vinkel ABD. Ydermeere ere de toe Sider FB, BC in Trianglen FCB lige saa store som de toe Sider AB, BD i Ttianglen ADB, enhver Side i sær saa stor som en anden, nemlig FB er saa stor som BA, fordi de ere Sider af Qvadra-

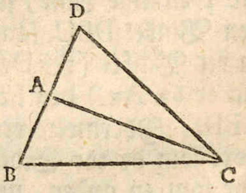


Qvadraten BG, og BC er saa stor som BD, fordi de ere Sider af Qvadraten BDEC. Følgelig er (4 Prop.) Trianglen FCB lige saa stor som Trianglen ADB. Og da nu Parallelogrammet eller Qvadraten GB er dobbelt saa stor (41 Prop.) som Trianglen FCB, thi de staae paa samme Grund Linie FB og imellem samme Parallel-Linier BF, CG; og Parallelogrammet BLKD er dobbelt saa stort som Trianglen ADB, thi de staae paa samme Grund-Linie BD og imellem samme Parallel-Lininier BD, AK: saa er Qvadraten GB lige saa stor (6 Ax.) som Parallelogrammet BLKD. Naar de rette Linier AE, BI blive dragne, saa kand paa samme Maade bevises, at Qvadraten HC er lige saa stor som Parallelogrammet CLKE. Følgelig ere de toe Parallelogrammer BLKD, CLKE tilsammen, det er, den heele Qvadrat BDEC, som er beskreven paa den Side BC, som staaer imod den rette Vinkel BAC, lige saa stor (2 Ax.) som de toe Qvadrater GB, HC, som ere beskrevne paa de toe øvrige Sider af Trianglen ABC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 48 Proposition.

Theorema.

Naar Qvadraten, som bliver beskreven paa een af Siderne af en Triangel er lige saa stor som Qvadraterne, som blive beskrevne paa de øvrige Sider af samme Triangel, saa skal den Vinkel, som indsluttes af bemeldte toe øvrige Sider, være en ret Vinkel.



Exempel. Lad ABC være en Triangel, og lad den Qvadrat, som beskrives paa BC, være lige saa stor som begge de Qvadrater, der beskrives paa de toe øvrige Sider BA, AC. Saa siger jeg, at Vinklen BAC er en ret Vinkel.

Construction. Paa AC opreises udaf Punkten A en Perpendicular-Linie AD (11 Prop.), som giøres (3 Prop.) saa stor som AB. Derneſt drages DC.

Demon-

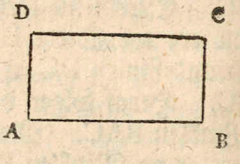
Demonstration. Da nu AD er saa stor som BA (Constr.), saa er og den Qvadrat, som beskrives paa AD, lige saa stor som Qvadraten, som beskrives paa BA. Leg den Qvadrat, som beskrives paa AC, til enhver af dem: Saa ere Qvadraterne, som blive beskrevne paa AD, AC, lige saa store (2 Ax.) som Qvadraterne paa BA, AC. Og da nu Qvadraten paa DC er lige saa stor (47 Prop.) som Qvadraterne paa AD, AC, fordi DAC er en ret Vinkel (efter Constr.); og Qvadraten paa BC er (efter Hyp.) lige saa stor som Qvadraterne paa BA, AC: saa er Qvadraten paa DC lige saa stor (1 Ax.) som Qvadraten paa BC. Men naar Qvadrater ere lige store, saa ere ogsaa deres Sider lige store (8 Ax.); derfore er Siden DC lige saa stor som Siden BC. Efterdi nu DA er lige saa stor som AB, og AC er en fælles Side, saa ere toe Sider DA, AC lige saa store som toe Sider BA, AC, og Grund-Linien DC er tilforn beviist at være saa stor som Grund-Linien BC. Heraf følger da, at Vinklen DAC er lige saa stor (8 Prop.) som Vinklen BAC. Men nu er DAC en ret Vinkel (efter Constr.). Derfore er og Vinklen BAC en ret Vinkel. Hvilket var det, som skulde bevises.

EUCLIDIS ELEMENTER.

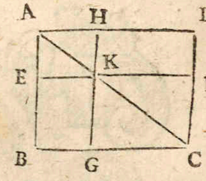
Den Anden Bog.

Definitiones (Forklaringer.)

1 Ethvert ret-vinkelt Parallelogram ABCD (som med et Ord kaldes en Rectangel) siges at være befattet under toe rette Linier DA, AB, som indslutte en ret Vinkel DAB.



2 J ethvert Parallelogram ABCD bliver ethvert af de Parallelogrammer, som ere omkring Tver-Linien, tillige med de tvende Supplementer kaldet en Vinkelhage (Gnomon); nemlig AEKH tillige med BK, KD kaldes en Vinkelhage, og ligeledes kaldes KFCG tillige med BK, KD en Vinkelhage.



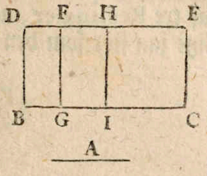
Den I Proposition.

Theorema.

Dersom der ere toe rette Linier og een af dem bliver skaaren i saa mange Stykker, som man behager: saa skal det ret-vinkelte Parallelogram eller den Rectangel, som er befattet under de tvende rette Linier være lige saa stor som alle de Rectangler tilsammen, der ere befattede under den u-skaarne rette Linie og de adskillige Stykker af den skaarne.

Exem-

Exempel. Lad der være toe rette Linier, den eene A, den anden BC; og lad BC blive skaaren efter Behag i Punkterne G, I: Saa siger jeg, at den Rectangel, som er befattet under de tvende rette Linier A og BC, er lige saa stor som de Rectangler tilsammen, der ere befattede under A og BG; under A og GI; og under A og IC.



Construction. Drag (efter 11 Prop. 1 Bog) fra Punkten B paa den rette Linie BC en perpendicular-Linie BD, som giøres (3 Prop. 1) saa stor som den Linie A. Drag derneſt (31. 1) igiennem Punkten D en ret Linie DE Parallel med BC og igiennem C en ret Linie CE Parallel med DB og ligeledes igiennem G og I de rette Linier GF, IH Parallel med BD.

Demonſtration. Rectanglen BE er (13 Ax.) lige saa stor som de Rectangler BF, GH, IE tilsammen. Men Rectanglen BE er befattet under A, BC, thi den er befattet (1 Def. 2) under de rette Linier DB, BC, og DB er (efter Conſtr.) saa stor som A; og Rectanglen BF er befattet under A, BG, thi den er befattet under DB, BG, og DB er saa stor som A; og Rectanglen GH er befattet under A, GI, thi den er befattet under FG, GI, og FG er saa stor (34. 1) som DB, og følgelig ogsaa som A; og ligeledes er den Rectangel IE befattet under A, IC. Følgelig er den Rectangel, som er befattet under A og BC, lige saa stor som de Rectangler tilsammen, der ere befattede under A og BG; under A og GI; og under A og IC. Hvilket var det, som skulde beviſes.

Scholion (Anmerkning.)

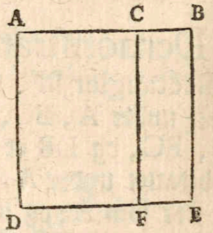
Naar man multiplicerer tvende Tal, som for Exempel, 6 og 8 med hinanden, saa bliver det udkommende Tal 48 kaldet Rectanglen eller Producten af bemeldte tvende Tal. Og naar man multiplicerer et Tal, som for Exempel 8 med sig selv, saa bliver det udkommende Tal 64 kaldet Qvadraten af det samme Tal 8. Hvadsomhelſt nu Euclides beviser i denne Bogs 10 førſte Propoſitioner om Rectangler og Qvadrater, som ere giorde af rette Linier, det samme kand ogsaa hentydes og appliceres paa Rectangler og Qvadrater af Tal, hvilket de hosføyede Exempler klarligen udviſe.

Vil man nu her førſt udi denne 1 Propoſition i Steden for Linierne BC og A tage efter Behag tvende Tal 9 og 7 og multiplicere dem med hinanden, saa udkommer 63, som er Rectanglen af de bemeldte tvende Tal; og dersom man deeler det eene af de samme Tal, for Exempel, 9 i hvad slags Deele man vil, saasom 2, 3, 4, og man multiplicerer enhver af disse Deele med det andet heele Tal 7, saa udkommer deraf tre Rectangler, nemlig 14, 21, 28, hvilke tilsammen giøre den Summa 63, som er lige saa stor som den forhen bemeldte Rectangel af de tvende heele Tal 7 og 9.

Den 2 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren efter Behag: saa skal de Rectangler, som ere befattede under den heele rette Linie og Stykkerne deraf, være tilsammen saa store, som den Qvadrat, der beskrives af den heele rette Linie.



Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren efter Behag i Punkten C: Jeg siger, at den Rectangel, som er befattet under AB, BC, tillige med den Rectangel, som er befattet under AB, AC, er lige saa stor som den Qvadrat, der beskrives af AB.

Construction. Beskriv (46. 1) paa AB en Qvadrat ABED, og drag (31. 1) igiennem C en ret Linie CF Parallel med AD eller med BE.

Demonstration. Den heele Rectangel AE er (13 Ax.) lige saa stor som de Rectangler BF, CD tilsammen. Men AE er Qvadraten af AB; og Rectanglen BF er den, som er befattet under AB, BC, thi den er befattet (1 Def. 2) under EB, BC, af hvilke EB er lige saa stor (30 Def. 1) som AB; og Rectanglen CD er den, som er befattet under AB, AC, thi AD er lige saa stor som AB. Følgelig er den Rectangel, som er befattet under AB, AC, tillige med den Rectangel, som er befattet under AB, BC, lige saa stor som Qvadraten af AB. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

Naar man deeler et Tal, for Exempel: 9 i saa mange slags Deele man vil, saasom i 4, 5, og man multiplicerer det heele Tal 9 med Deelene 4, 5, saa udkomme deraf

deraf toe Rectangler 36 og 45, hvilke tilsammen giøre 81; dersom nu det heele Tal 9 med sig selv multipliceres, saa faaer man den Qvadrat 81, det er lige saa meget, som begge Rectanglerne tilsammen.

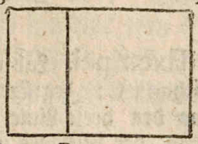
Den 3 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren efter Behag: saa skal den Rectangel, som er befattet under den heele rette Linie og et af Stykkerne, være lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under Stykkerne, tillige med Qvadraten, som beskrives paa det først bemeldte Stykke.

Exempel. Lad den rette Linie AB være skaaren efter Behag i C: jeg siger, at den Rectangel, som er befattet under den heele Linie AB og det eene af Stykkerne AC, er lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under Stykkerne AC, CB, tillige med Qvadraten af det førstbemeldte Stykke AC.

B C A



F D E

Construction. Beskriv (46. 1) paa AC en Qvadrat ACDE, og drag ED ud hen imod F. Derneſt drages (31. 1) igiennem B en ret Linie BF Parallel med CD eller med AE.

Demonstration. Efterdi den rette Linie AE er lige saa stor som AC (30 Def. 1), saa er Rectanglen BE befattet under den heele Linie AB og det Stykke AC; og fordi CD er saa stor som AC, saa er Rectanglen BD befattet under de Stykker AC, CB. Da nu den Rectangel BE er lige saa stor (13 Ax.) som Rectanglen BD og Qvadraten AD tilsammen, saa et det klart, at den Rectangel, som er befattet under AB og AC, er lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under AC og CB, tillige med Qvadraten af AC. Hvilket var det, som skulde bevises.

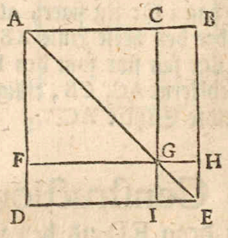
Scholion.

Naar man deeler et Tal, som for Exempel 7 i toe Deele, saasom 3, 4, saa er Rectanglen (21) af det heele Tal 7 og den eene af Deelene 3 lige saa stor som Rectanglen (12) af Deelene 3 og 4 og Qvadraten (9) af den førstbemeldte Deel 3 tilsammentagne.

Den 4 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren efter Behag: saa skal Qvadraten, som beskrives paa den heele rette Linie, være lige saa stor som de Qvadrater, der beskrives paa Stykkerne, tillige med toe Rectangler, som ere befattede under Stykkerne.



Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren efter Behag i C: Jeg siger da, at Qvadraten som beskrives paa den heele Linie AB, er lige saa stor som Qvadraterne, der beskrives paa Stykkerne AC og CB, tillige med toe Rectangler, som ere hver i sær befattede under AC, CB.

Construction. Man beskriver paa AB en Qvadrat ABED (46. 1) og drager Tver-Linien AE. Igiennem Punkten C drager man (31. 1) en ret Linie CI Parallel med AD eller med BE; ligeledes drager man igiennem G en ret Linie FH Parallel med AB eller med DE.

Demonstration. Eftersom nu CI er Parallel med BE, og AE falder paa dem, saa er (29. 1) den udvendige Vinkel CGA lige saa stor som den indvendige BEA. Men Vinklen BEA er lige saa stor (5. 1) som BAE, fordi Siden AB er (30 Def. 1) lige saa stor som BE; Følgelig er ogsaa Vinklen CGA lige saa stor som Vinklen BAE eller CAG: Og derfore er udi Trianglen ACG Siden AC lige saa stor som Siden CG

CG (6. 1). Men nu er AC lige saa stor (34. 1) som sin imodsatte Side FG, og CG saa stor som AF: Følgelig er og FG lige saa stor (1 Ax.) som AF, og altsaa har Parallelogrammet AFGC fire lige store Sider; Og fordi den Vinkel FAC er en ret Vinkel (30 Def. 1), saa har bemeldte Parallelogram AFGC ogsaa fire rette Vinkler (Cor. 29. 1). Heraf følger da, at AFGC er en Qvadrat. Paa samme Maade bevises ogsaa, at GIEH er en Qvadrat. Altsaa er CF Qvadraten af det Stykke AC, og HI Qvadraten af GH eller af det Stykke CB, thi CB og GH ere (34. 1) lige store. Ydermeere ere de tvende Rectangler DG, GB befattede under Stykkerne AC, CB; thi BG er befattet under BC, CG, og CG er lige saa stor som AC, fordi FC er en Qvadrat: Og Rectanglen DG er befattet under FG, GI, hvoraf FG er lige saa stor som AC (34. 1) og IG saa stor som GH, det er, som CB. Eftersom nu ABED, som er Qvadraten af AB, er lige saa stor (13 Ax.) som de toe Qvadrater FC, HI tillige med de toe Rectangler BG, GD. Saa er det klart, at Qvadraten af den heele Linie AB er lige saa stor som Qvadraterne af Stykkerne AC, CB tillige med toe Rectangler, som ere befattede under samme Stykker AC, CB. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium.

Heraf er det klart, at udi enhver Qvadrat ABED de Parallelogrammer AFGC og GIEH, som ere omkring Tver-Linien AE, ere ogsaa Qvadrater.

Scholion.

Naar man deeler et Tal, som for Exempel 5 i toe Deele 3, 2; saa er Qvadraten (25) af det heele Tal 5 lige saa stor som de toe Qvadrater (9 og 4) af Deelene 3 og 2, tillige med toe Rectangler (6 og 6) af Deelene 3, 2. Thi naar man legger de Tal 9, 4, 6, 6 tilsammen, saa faaer man ligeledes 25.

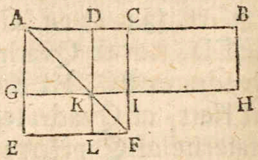
Den

Den 5 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren i Stykker af lige og u-lige Størrelse: saa skal den Rectangel, som er befattet under Stykkerne af u-lige Størrelse, tillige med Qvadraten af den rette Linie, som er imellem Skiærings Punkterne, være saa stor som Qvadraten, der beskrives af den halve rette Linie.

Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren i lige store Stykker i C og i Stykker af u-lige Størrelse i D: Saa siger jeg: at Rectanglen, som er befattet under Stykkerne af u-lige Størrelse, nemlig: under de Stykker AD, DB, tillige med Qvadraten af den rette Linie DC, som ligger imellem Skiærings-Punkterne D og C, er lige saa stor som Qvadraten af den rette Linie AC, som er Halvparten af AB.



Construction. Beskriv (46. 1) paa AC en Qvadrat AEFC, og drag Tver-Linien AF. Igiennem Punkten D drag (31. 1) en ret Linie DL Parallel med AE eller CF, og igiennem K drag en ret Linie GKH Parallel med AC eller EF, og endelig igiennem B drag en ret Linie BH Parallel med AE eller CF.

Demonstration. Supplementet CK er (efter 43. 1) lige saa stort som Supplementet KE. Læg det Parallelogram DG til enhver af dem: saa er det heele Parallelogram CG lige saa stort som det heele Parallelogram DE (2 Ax.). Men nu er CG lige saa stort som Parallelogrammet BI (36. 1), fordi den rette Linie AC er lige saa stor (efter Hyp.) som CB. Folgelig er og DE lige saa stor som BI, og dersom CK lægges til enhver af dem, saa er BK lige saa stor som CK, DE tilsammen. Læg nu IL til dem, saa ere BK, IL tilsammen saa store som CK, DE, IL, og fordi disse tre ere tilsammen saa store (13 Ax.), som den heele Qvadrat AEFC, saa ere ogsaa de toe BK, IL tilsammen saa store som AEFC;

AEFC; Men nu er BK den Rectangel, som er befattet under AD, DB, thi AD er lige saa stor som DK, fordi DG er en Qvadrat (efter Cor. 4 Prop. 2); ligeledes er LI Qvadraten af DC (efter samme Coroll.); og AEFC er Qvadraten af AC (efter Constr.): Følgelig er den Rectangel, som er befattet under AD, DB, tillige med Qvadraten af DC lige saa stor som Qvadraten af AC. Hvilket var det, som skulde bevises.

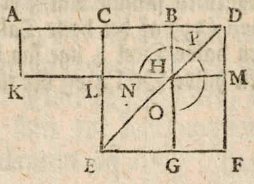
Scholion.

Vil man tage et Tal, for Exempel: 14 og deele det i toe lige store Deele 7 og 7, og i toe Deele af u-lige Størrelse 3 og 11, og derneſt trække den mindste af disse sidste Deele 3 fra den halve 7, saa at Differencen 4 svarer til den Linie DC, thi DC er ogsaa Forskiællen imellem AC og AD. Saa er Rectanglen (33) af de toe ulige Deele 3 og 11 tillige med Qvadraten (16) af den bemeldte Difference 4 lige saa stor som Qvadraten (49) af den halve Deel 7.

Den 6 Proposition.

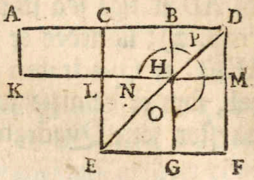
Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren udi toe lige store Deele, og hertil bliver udi lige Linie føyet en anden ret Linie: saa skal den Rectangel, som er befattet under den rette Linie, som er sammensat af den tilføyede og den heele Linie, og den tilføyede Linie, tillige med Qvadraten af den halve Linie være lige saa stor som Qvadraten af den rette Linie, som er sammensat af den halve og tilføyede Linie.



Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren i toe lige store Deele i Punkten C, og lad en anden ret Linie BD være føyet i lige Linie til samme AB: Saa siger jeg, at den Rectangel, som er befattet under AD, DB, tillige med Qvadraten af CB, er lige saa stor som Qvadraten af CD.

Construction. Man beskriver paa CD (efter 46. 1.) en Qvadrat CDFE og drager DE. Derneſt drages (31. 1) igiennem B en ret Linie BG Parallel med CE eller med DF og igiennem H en ret Linie MHK Parallel med AD eller med EF og igiennem A en ret Linie AK Parallel med CE eller med DF.



Demonstration. Efterſom nu AC er lige ſaa ſtor ſom CB (efter Hyp.), ſaa er og Rectanglen AL lige ſaa ſtor ſom Rectanglen CH (efter 36. 1). Men CH er (efter 43. 1) lige ſaa ſtor ſom HF: Følgelig er og AL lige ſaa ſtor ſom HF. Derſom nu CM lægges til enhver af dem: ſaa er den heele Rectangel AM lige ſaa ſtor ſom Vinkelhagen (Gnomon) NPO. Læg LG til begge, ſaa er Rectanglen AM tillige med LG lige ſaa ſtor ſom Vinkelhagen NPO og LG tilſammen, og efterdi Qvadraten CDFE er ſaa ſtor (13 Ax) ſom Vinkelhagen NPO og LG tilſammen, ſaa er Rectanglen AM tillige med LG lige ſaa ſtor ſom Qvadraten CDFE. Men nu er Rectanglen AM den ſom er befattet under AD, DB, thi DM er lige ſaa ſtor ſom DB, fordi BM er en Qvadrat (Cor. 4 Prop. 2); og LG er Qvadraten af CB (efter ſamme Coroll.); og CDFE er Qvadraten af CD (efter Conſtr.): Føigelig er den Rectangel, ſom er befattet under AD, DB, tillige med Qvadraten af CB lige ſaa ſtor ſom Qvadraten af CD. Hvilket var det, ſom ſkulde beviſes.

Scholion.

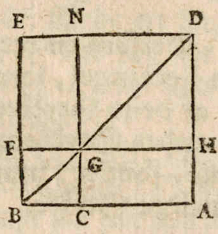
Derſom man deeler et Tal, for Exempel 8 i toe lige ſtore Deele 4 og 4, og lægger til ſamme Tal 8 et andet Tal 3, ſom tilſammen giøre 11. Saa er Rectanglen (33) af det heele Tal 11 og det tillagde Tal 3, tillige med Qvadraten (16) af den halve Deel 4 lige ſaa ſtor ſom Qvadraten 49 af det Tal 7, ſom er Summen af den halve Deel 4 og det tillagde Tal 3.

Den

Den 7 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren efter Behag, saa skal Qvadraten af den heele rette Linie tillige med Qvadraten af et af dens Stykker være lige saa stor, som toe Rectangler, som ere hver for sig befattede under den heele rette Linie og bemeldte Stykke, tillige med Qvadraten af det andet Stykke.



Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren efter Behag udi C: Saa siger jeg, at Qvadraterne, som blive beskrevne af AB og BC, ere tilsammen lige saa store som toe Rectangler, som ere hver for sig befattede under AB, BC, tillige med Qvadraten af CA.

Construction. Beskriv (efter 46. 1) paa AB en Qvadrat ABED, og drag BD. Igiennem C drag (31. 1) en ret Linie CGN Parallel med BE eller AD, og igiennem G drag ligeledes en ret Linie FGH Parallel med BA eller ED.

Demonstration. Nu er ABED (13 Ax.) lige saa stor som EC, CH, HN tilsammen, og dersom man lægger FC til dem, saa ere ABED og FC (2 Ax.) tilsammen lige saa store som EC, FC, GH, HN, eller som EC, FA, HN, thi FC, CH ere (13 Ax.) tilsammen saa store som FA. Da nu ABED er Qvadraten af AB (efter Constr.); og FC er Qvadraten af BC (Cor. 4 Prop. 2); og de tvende Rectangler EC, FA ere befattede under AB, BC, (thi EC er befattet under EB, BC, og EB er saa stor som AB, fordi ABED er en Qvadrat, og FA er befattet under AB, BF, og BF er saa stor som BC, fordi FC er en Qvadrat): og endelig NH er Qvadraten af AC (Cor. 4 Prop. 2): Saa er det klart, at Qvadraterne af AB, BC ere tilsammen saa store som toe Rectangler, der ere befattede under AB, BC, tillige med Qvadraten af AC. Hvilket var det, som skulde bevises.

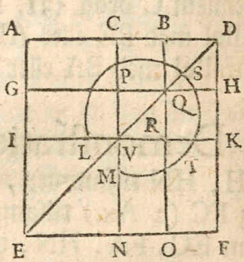
Scholion.

Naar man deeler et Tal, for Exempel: 5 i toe Deele 3 og 2. Saa ere Qvadraterne (25 og 9) af det heele Tal 5 og den eene af Deelene 3 tilsammen saa store som toe Rectangler (15 og 15) af det heele Tal 5 og bemeldte Deel 3, tillige med Qvadraten (4) af den anden Deel 2; thi 25 og 9 tilsammen giøre lige saa meget som 15, 15 og 4.

Den 8 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren efter Behag: saa skal den Rectangel, som er befattet under den heele rette Linie og eet af dens Stykker, fire gange tagen tillige med Qvadraten af det andet Stykke være lige saa stor som Qvadraten af den rette Linie, som er sammensat af den heele rette Linie og dens først bemeldte Stykke.



Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren efter Behag i C: saa siger jeg, at den Rectangel, som er befattet under AB, BC, fire gange tagen, tillige med Qvadraten af AC er saa stor som Qvadraten, der bliver beskreven paa AB, BC, som paa een Linie.

Construction. Drag AB længere ud hen imod D, og giør (efter 3. 1) BD saa stor som BC. Paa AD beskriv (46.1) en Qvadrat AEFD og drag DE. Igiennem B og C drag (31. 1) BO og CN Parallel med AE eller med DF; og igiennem Q og V drag GQH og IVK Parallel med AD eller med EF.

Demonstration. Eftersom CB og BD ere lige store, og PQ er lige saa stor (efter 34. 1) som CB, og QH er saa stor som BD, saa ere og PQ og QH lige store. Af samme Aarsag er og VR og RK lige store. Og eftersom CB er saa stor som BD, og PQ saa stor som QH; saa er (efter

(efter 36. 1) Rectanglen CQ lige saa stor som Rectanglen BH, og Rectanglen PR saa stor som Rectanglen QK. Men CQ er (efter 43. 1) lige saa stor som QK, thi de ere Supplementerne i Parallelogrammet CK. Følgelig er ogsaa BH lige saa stor som PR, og de fire Rectangler CQ, BH, PR, QK ere lige store, og altsaa ere de tilsammen fire gange saa store som CQ.

Fremdeeles, fordi BH, PR ere Qvadrater (efter Cor. 4. 2) og lige store (efter det, som tilforn blev beviist), saa ere ogsaa deres Sider BQ, QR lige store: Folgelig ere ogsaa CP, PV lige store (34. 1). Men VR er ogsaa lige saa stor som RK (som tilforn er beviist). Altsaa ere Rectanglerne AP, GV (efter 36. 1) og ligeledes VO, RF lige store. Eftersom da GV er (efter 43. 1) lige saa stor som VO; thi de ere Supplementerne i Parallelogrammet GO: Saa er og AP lige saa stor som RF, og altsaa ere de fire Rectangler AP, GV, VO, RF lige store med hinanden og folgelig tilsammen fire gange saa store som AP.

Men tilforn blev beviist, at de fire Rectangler CQ, BH, PR, QK ere fire gange saa store som CQ. Folgelig er Vinkelhagen LSTM, som er sammensat af bemeldte otte Rectangler, fire gange saa stor som Rectanglen AQ, og altsaa er Rectanglen AQ fire gange tagen lige saa stor som Vinkelhagen LSTM. Men AQ er befattet under AB, BD; thi BQ er lige saa stor som BD, fordi BH er en Qvadrat. Folgelig skal den Rectangel, som er befattet under AB, BD, fire gange tagen være lige saa stor som Vinkelhagen LSTM. Altsaa, naar IN, som er Qvadraten af AC, lægges til enhver af dem, saa er Rectanglen under AB, BD, fire gange tagen, tillige med Qvadraten af AC lige saa stor, som den Gnomon eller Vinkelhage LSTM tillige med IN. Men nu er Vinkelhagen LSTM tillige med IN (13 Ax.) lige saa stor som Qvadraten AEFD, som er beskreven paa AD: Altsaa er Rectanglen, som er befattet under AB, BD eller under AB, BC, (thi BD, BC ere lige store), fire gange tagen, tillige med Qvadraten af AC lige saa stor som Qvadraten af AD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

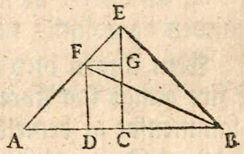
Deel et Tal, for Exempel 6, i tve Deele, 4, 2; naar nu Rectanglen 12, som udkommer af det heele Tal 6 og den eene af Deelene 2 med hinanden multiplicerede, tages fire gange, saa er det udkommende Tal 48, tillige med Qvadraten 16 af den anden Deel 4 lige saa stor som Qvadraten 64 af det Tal 8, som er Summen af det heele Tal 6 og den først bemeldte Deel 2.

Den 9 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren i Stykker af lige og u-lige Størrelse: saa skal Qvadraterne, som beskrives paa de Stykker, som ere af u-lige Størrelse, være dobbelt saa store som Qvadraterne, der beskrives paa den halve rette Linie, og paa den rette Linie, som ligger imellem Skiærings-Punkterne.

Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren i lige store Stykker udi C, og i Stykker af u-lige Størrelse i D: saa siger jeg, at Qvadraterne af AD, DB ere tilsammen dobbelt saa store som Qvadraterne af BC, CD.



Construction. Drag (efter 11. 1.) fra C paa AB en Perpendicular-Linie CE, og giør CE saa stor som AC eller CB og drag EA, EB. Igiennem D drag DF Parallel med CE og igiennem F drag FG Parallel med AC (31. 1) og drag FB.

Demonstration. Eftersom nu CE er lige saa stor som CB, saa er (efter 5.1) Vinklen CEB lige saa stor som CBE; og efterdi ECB er en ret Vinkel, saa ere de øvrige CEB, CBE tilsammen saa store som en ret Vinkel (efter 32. 1) og de ere lige store: Følgelig er enhver af dem Halfparten af en ret Vinkel. Af samme Aarsag er ogsaa enhver af Vinklerne CEA, CAE Halfparten af en ret Vinkel. Derfore er den heele Vinkel AEB en ret Vinkel. Og fordi GEF er Halfparten af en ret Vinkel og FGE er en ret Vinkel, thi den er (efter 29. 1) lige saa stor som den indvendige og modsatte ACE, saa skal og den øvrige EFG være Halfparten af en ret Vinkel. Altsaa er Vinklen GEF lige saa stor som EFG. Følgelig er ogsaa Siden EG lige saa stor (efter 6. 1) som GF. Fordi fremdeeles Vinklen

Vinklen DAF er Halfparten af en ret Vinkel, og ADF er en ret Vinkel, fordi den er lige saa stor (efter 29. 1) som den indvendige og modsatte ACE, saa er og AFD Halfparten af en ret Vinkel. Derfore er Vinklen DAF lige saa stor som AFD, og følgelig er Siden FD (efter 6. 1) lige saa stor som DA.

Efterdi nu CE er lige saa stor som CB (efter Constr.), saa er og Qvadraten af CE lige saa stor som Qvadraten af CB. Følgelig ere Qvadraterne af CE og CB dobbelt saa store som Qvadraten af CB. Men Qvadraten, som beskrives paa EB, er (efter 47. 1) lige saa stor som Qvadraterne af CE og CB. Derfore er og Qvadraten af EB dobbelt saa stor som Qvadraten af CB, Fordi nu fremdeeles EG er lige saa stor som GF, (som tilforn er beviist), saa er Qvadraten af EG lige saa stor som Qvadraten af GF: Og derfore ere Qvadraterne af EG, GF tilsammen dobbelt saa store som Qvadraten af FG. Men Qvadraten, som beskrives af EF, er lige saa stor (efter 47. 1) som Qvadraterne af EG, GF tilsammen: Følgelig er Qvadraten af EF dobbelt saa stor som Qvadraten af FG: Men nu er FG lige saa stor som CD (efter 34. 1). Følgelig er Qvadraten af EF dobbelt saa stor som Qvadraten af CD. Da nu ligeledes Qvadraten af EB er dobbelt saa stor som Qvadraten af CB, (som tilforn er beviist): saa ere Qvadraterne af EB, EF dobbelt saa store som Qvadraterne af BC, CD. Men Qvadraten af FB er lige saa stor (efter 47. 1) som Qvadraterne af EB, EF, fordi FEB er en ret Vinkel (som tilforn er beviist); Følgelig er Qvadraten af FB dobbelt saa stor som Qvadraterne af BC, CD. Men Qvadraterne af FD, DB ere (47. 1) lige saa store som Qvadraten af FB, fordi Vinklen FDB er en ret Vinkel: Følgelig ere Qvadraterne af FD, DB dobbelt saa store som Qvadraterne af BC, CD. Men nu er FD lige saa stor som AD (som tilforn blev beviist); hvorfore Qvadraterne af AD, DB ere tilsammen dobbelt saa store som Qvadraterne af BC, CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

Dersom man deeler et Tal, for Exempel: 14 i toe lige store Deele 7 og 7, og i toe Deele af u-lige Størrelse, saasom: 5 og 9, og man trækker fra den største Deel 9 den halve Deel 7, saa at Differencen 2 svarer til den mellemste Linie DC: saa ere 25 og 81 Qvadraterne af de toe u-lige Deele 5 og 9, og disse giøre tilsammen 106. Fremdeeles er 49 Qvadraten af den halve Deel 7, og 4 er Qvadraten af Differencen 2, og disse toe giøre tilsammen 53, som er ikkuns Halvdeelen af 106.

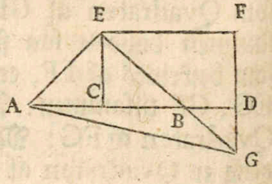
Den

Den 10 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver skaaren i toe lige store Deele, og dertil bliver i lige Linie sat en anden ret Linie: saa skal Qvadraten af den rette Linie, som er sammensat af den heele og tilføyede, og Qvadraten af den tilføyede rette Linie være tilsammen dobbelt saa store som Qvadraten af den halve rette Linie og Qvadraten af den rette Linie, som er sammensat af den halve og tilføyede.

Exempel. Lad en ret Linie AB være skaaren i toe lige store Deele i C, og lad en anden ret Linie BD blive sat i lige Linie med AB: Saa siger jeg, at Qvadraterne af AD, DB ere tilsammen dobbelt saa store som Qvadraterne af AC, CD.



Construction. Drag (efter 11. 1) fra C paa AB en Perpendicular-Linie CE og giør CE saa stor som AC eller CB, og drag AE, EB. Igiennem E drag (31. 1) EF Parallel med AD og igiennem D drag DF Parallel med EC. Og fordi en ret Linie EF falder paa toe Parallel-Linien CE, DF, saa ere de indvendige Vinkler CEF, EFD saa store (29. 1) som toe rette Vinkler: Følgelig ere Vinklerne BEF, EFD tilsammen mindre end toe rette Vinkler. Derfore skal (11 Ax.) de toe rette Linier EB, FD omsider støde sammen, naar de blive immerfort uddragne. Lad dem altsaa blive uddragne, indtil de støde sammen i Punkten G og drag AG.

Demonstration. Fordi nu AC er lige saa stor som CE, saa er Vinklen AEC saa stor (5. 1) som EAC; da nu ACE er en ret Vinkel: saa er enhver af Vinklerne AEC, EAC (32. 1) Halfparten af en ret Vinkel. Af samme Aarsag er enhver af Vinkerne CEB, EBC Halfparten af en ret Vinkel: Følgelig er AEB en ret Vinkel. Og fordi EBC er Halfparten af en ret Vinkel, saa er og DBG (15. 1) Halfparten af en ret Vinkel; Men BDG er en ret Vinkel (29. 1), thi den er lige saa stor

stor som Vexel-Vinklen DCE. Og altsaa er den øvrige DGB ogsaa Halfparten af en ret Vinkel, følgelig er Vinklen DBG lige saa stor som DGB: Hvorfore Siden BD er (6. 1) lige saa stor som Siden GD. Fordi fremdeeles Vinklen EGF er Halfparten af en ret Vinkel, og EFG er en ret Vinkel, thi den er (34. 1) lige saa stor som den imodsatte Vinkel ECD, saa er og FEG Halfparten af en ret Vinkel. Følgelig er Vinklen EGF lige saa stor som FEG, og derfor er (6. 1) Siden GF lige saa stor som EF.

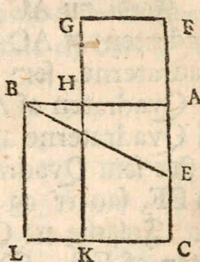
Fordi nu AC og CE ere lige store (efter Constr.), saa er ogsaa Qvadraten af AC lige saa stor som Qvadraten af CE. Følgelig ere Qvadraterne, som beskrives af AC, CE, tilsammen dobbelt saa store som Qvadraten af AC. Men Qvadraten af AE er lige saa stor (47. 1) som Qvadraterne af AC, CE. Følgelig er Qvadraten af AE dobbelt saa stor som Qvadraten af AC. Fordi fremdeeles GF er lige saa stor som EF, saa er og Qvadraten af GF lige saa stor som Qvadraten af EF. Følgelig ere Qvadraterne af GF, EF dobbelt saa store som Qvadraten af EF. Da nu Qvadraten af EG er lige saa stor (47. 1) som Qvadraterne af GF, EF. Saa er og Qvadraten af EG dobbelt saa stor som Qvadraten af EF, det er, af CD, fordi EF og CD ere lige store (34. 1). Men tilforn blev beviist, at Qvadraten af AE er dobbelt saa stor som Qvadraten af AC. Følgelig ere Qvadraterne, som beskrives af AE, EG, tilsammen dobbelt saa store som Qvadraterne af AC, CD. Da nu Qvadraten af AG er (47. 1) lige saa stor som Qvadraterne af AE, EG; Thi Vinklen AEB eller AEG er en ret Vinkel, som tilforn blev beviist: saa er ogsaa Qvadraten af AG dobbelt saa stor som Qvadraterne af AC, CD. Men Qvadraterne af AD, DG ere tilsammen saa store (47. 1) som Qvadraten af AG: Følgelig ere Qvadraterne af AD, DG, det er, Qvadraterne af AD, DB (thi DG er lige saa stor som DB) tilsammen dobbelt saa store som Qvadraterne af AC, CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

Deel et Tal, for Exempel: 10 i toe lige store Deele 5 og 5; og læg til det samme Tal 10 et andet Tal, for Exempel: 3, som giør tilsammen 13, og læg til den halve Deel 5 det samme Tal 3, som giør tilsammen 8, saa ere Qvadraterne 169 og 9 af de Tal 13 og 3, tilsammen dobbelt saa store som Qvadraterne 25 og 64 af de Tal 5 og 8.

Den II Proposition.
Problema.

At skiære en given ret Linie saaledes, at den Rectangel, som er befattet under den heele rette Linie og et af Stykkerne, bliver lige saa stor som Qvadraten, som beskrives af det ander Stykke.



Exempel. Lad AB være en given ret Linie: Man skal skiære AB saaledes, at Rectanglen under den heele Linie AB og et af Stykkerne bliver lige saa stor som Qvadraten af det andet Stykke.

Construction. Man beskriver paa AB (46. 1) en Qvadrat ABLC og deeler AC (10. 1) i toe lige store Deele i E og drager EB. Derneſt forlænges CA til F og EF giøres (31. 1) saa stor som EB. Endelig beskrives (46. 1) paa AF en Qvadrat AFGH og GH drages længere ud til K. Jeg siger da, at AB er bleven saaledes skaaren i H, at Rectanglen under AB, BH er lige saa stor som Qvadraten af AH.

Demonstration. Eftersom AC er skaaren i toe lige store Deele udi Punkten E og til samme er bleven sat i lige Linie en anden ret Linie AF: Saa er (6. 2) Rectanglen under CF, FA tillige med Qvadraten af AE lige saa stor som Qvadraten af EF. Men nu er EF lige saa stor som EB. Følgelig er Rectanglen under CF, FA tillige med Qvadraten af EA lige saa stor som Qvadraten af EB. Da nu Qvadraterne af EA, AB ere (47. 1) lige saa store som Qvadraten af EB, saa er Rectanglen under CF, FA tillige med Qvadraten af EA lige saa stor som Qvadraterne af EA, AB. Dersom nu Qvadraten af EA, som de have tilfælles, trækkes fra dem; saa er Rectanglen, som er befattet under CF, FA, lige saa stor som Qvadraten af AB. Men Rectanglen FK er befattet under CF, FA, thi FG er lige saa stor som FA, fordi AFGH er er en Qvadrat; og AL er Qvadraten af AB: Følgelig er Rectanglen FK lige saa stor som Qvadraten AL. Dersom nu det fælles Stykke AK tages fra enhver af dem: Saa er FH lige saa stor som HL. Men FH er Qvadraten af AH, og HL er den Rectangel, som er befattet under AB, BH; thi AB er lige saa stor som BL. Følgelig er Rectanglen under AB, BH lige saa stor som Qvadraten af AH.

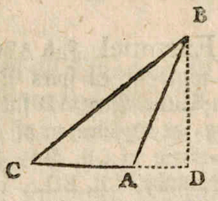
Altsaa er den givne rette Linie AB saaledes skaaren i H, at Rectanglen under den heele rette Linie AB og det eene af Stykkerne BH er saa stor som Qvadraten af det andet Stykke HA. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 12 Proposition.

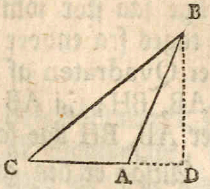
Theorema.

Udi Stump-vinklede Triangler er Qvadraten af den Side, som staaer imod den stumpet Vinkel, saa meget større end Qvadraterne af de Sider, som indslutte samme stumpet Vinkel, som toe Rectangler, der ere hver for sig befattede under een af Siderne, som ere omkring den stumpet Vinkel, (nemlig under den Side, paa hvilken, naar den er uddragen, Perpendicular-Linien falder) og den rette Linie, som er uden for Trianglen, og ligger imellem den stumpet Vinkel og Perpendicular-Linien.

Exempel. Lad ABC være en Stump-vinklet Triangel, som har en stumpet Vinkel BAC, og lad CA blive dragen ud hen imod D og fra Punkten B lad en Perpendicular-Linie BD falde ned paa CD: Saa siger jeg, at Qvadraten af BC er saa meget større end Qvadraterne af CA, AB, som toe Rectangler, der ere hver for sig befattede under CA, AD.



Demonstration. Eftersom CD er skaaren efter Behag i A, saa er (4. 2) Qvadraten af CD lige saa stor som Qvadraterne af CA, AD, tillige med toe Rectangler, som ere hver for sig befattede under CA, AD. Dersom nu Qvadraten af BD lægges til dem, saa ere Qvadraterne af CD, BD lige saa store som Qvadraterne af CA, AD, BD, tillige med toe Rectangler, som ere befattede under CA, AD. Da nu Qvadraten af BC er (47. 1) lige saa stor som Qvadraterne af CD, BD, thi BDC er en ret Vinkel: Og Qvadraten af AB er lige saa stor som Qvadraterne af AD, BD: Saa er Qvadraten af BC lige saa stor som Qvadraterne af CA, AB tillige med toe Rectangler, som ere befattede under CA, AD: Altsaa er Qvadraten af BC saa meget større end Qvadraterne af CA, AB, som toe Rectangler, der ere befattede under CA, AD. Hvilket var det, som skulde bevises.

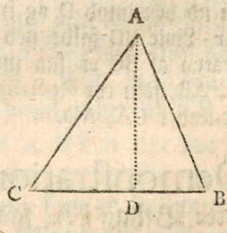


Den 13 Proposition.

Theorema.

I Spits-vinkelte Triangler er Qvadraten af den Side, som staaer imod en spits Vinkel, saa meget mindre end Qvadraterne, der beskrives af de Sider, der indslutte samme spitze Vinkel, som toe Rectangler, der ere befattede under een af Siderne, som ere omkring den spitze Vinkel, (nemlig under den, paa hvilken Perpendicular-Linien falder) og den rette Linie, som ligger inden for Trianglen imellem Perpendicular-Linien og den spitze Vinkel.

Exempel. Lad ABC være en Spits-vinklet Triangel, som har en spits Vinkel CBA, og fra A lad en Perpendicular-Linie AD falde ned paa CB (12. 1): saa siger jeg, at Qvadraten af AC er saa meget mindre end Qvadraterne af CB, BA, som toe Rectangler, der ere befattede under CB, BD.



Demonstration. Eftersom BC er skaaren efter Behag udi D, saa ere (7. 2) Qvadraterne af CB, BD saa store som toe Rectangler, der ere befattede under CB, BD,

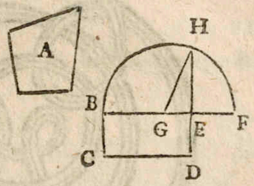
tillige

tillige med Qvadraten af CD. Dersom nu Qvadraten af DA lægges til dem: saa ere Qvadraterne af CB, BD, DA saa store som toe Rectangler under CB, BD, tillige med Qvadraterne af CD, DA. Da nu Qvadraterne af BD, DA ere lige saa store (47. 1) som Qvadraten af AB, fordi Vinklen ADB er en ret Vinkel, og Qvadraterne af CD, DA ere lige saa store som Qvadraten af AC: Saa ere Qvadraterne af CB, BA lige saa store som Qvadraten af AC tillige med toe Rectangler, som ere befattede under CB, BD. Altsaa er Qvadraten af AC saa meget mindre end Qvadraterne af CB, BA, som toe Rectangler, der ere befattede under CB, BD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 14 Proposition.

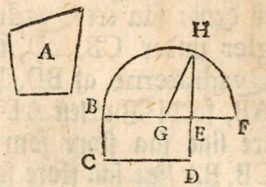
Problema.

At beskrive en Qvadrat, som er saa stor som en given ret-lined Figur.



Exempel. Lad A være den givne ret-linede Figur: Man skal giøre en Qvadrat, som er saa stor som A.

Construction. Man beskriver (45. 1) et ret-vinkelt Parallelogram BD, som er saa stort som A. Dersom nu BE er lige saa stor som ED, saa har man efter Forlangende beskreven en Qvadrat BD, som er saa stor som A: Men dersom BE ey er af samme Størrelse som ED, saa er een af dem større. Lad nu BE være den større og drag den længere ud hen imod F og giør EF saa stor som ED (3. 1) Derneſt deeles BF i toe lige store Deele i G; og af Middelpunkten G udi Længden GB eller GF beskrives en halv Cirkel BHF (3 Post.). Endelig drages DE længere ud hen til H, og fra G til H drages en ret Linie GH.



Demonstration. Eftersom nu den rette Linie BF er deelet i toe lige store Deele i G og i toe Deele af u-lige Størrelse udi E; saa er Rectanglen under BE, EF (5. 2) tillige med Qvadraten af GE lige saa stor som Qvadraten af GF, det er, som Qvadraten af GH, fordi GH og GF ere (15 Def. 1) lige store. Men Qvadraterne af GE, EH ere (47. 1) lige saa store som Qvadraten af GH. Følgelig er Rectanglen under BE, EF tillige med Qvadraten af GE lige saa stor som Qvadraterne af GE, EH. Altsaa, dersom Qvadraten af GE tages fra dem: saa er Rectanglen under BE, EF lige saa stor som Qvadraten af EH. Da nu BD er Rectanglen under BE, EF, thi ED er lige saa stor som EF: saa skal den Qvadrat, som bliver beskreven af EH, være lige saa stor som Rectanglen BD, det er, som den retlinede Figur A, fordi BD er (efter Constr.) lige saa stor som A. Hvilket var det, som skulde giøres.

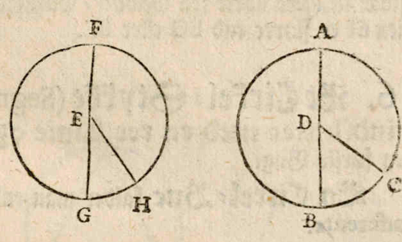
Euclidis

EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Tredie Bog.

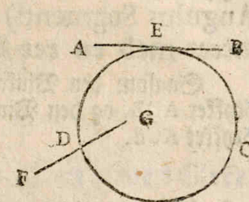
Definitiones (Forklaringer.)

1. Lige store Cirkler (ABC, FGH) kaldes de, hvis Middel-Linier eller Diametrer (AB, FG) ere lige store, eller udi hvilke de rette Linier (DC, EH) ere lige store, som drages fra Cirklernes Middel-Punkter (D, E) til deres Omkredser eller Circumferentzer.



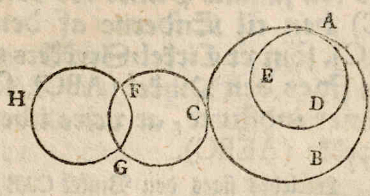
2. En ret Linie (AB) siges at røre en Cirkel (ECD), naar den saaledes rører Cirklen, at, ifald den bliver længere uddragen til begge Sider, den da ikke skiærer Cirklen.

Men den rette Linie FDG skiærer Cirklen ECD.

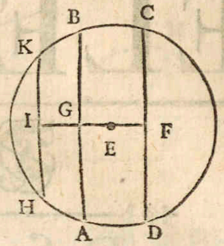


3. Cirkler siges at røre hinanden, naar de saaledes røre hverandre, at den eene ikke skiærer den anden.

Saasom de tve Cirkler ABC, ADE, item de tve ABC, CFG røre hinanden. Men de tve Cirkler CFG, HFG skiære hinanden.



4. Rette Linier (AB, CD) siges at staae lige langt fra Middel-Punkten (E) i en Cirkel(ABCD), naar de Perpendicular-Linier (EG, EF), som drages til dem fra Middel-Punkten (E), ere lige store.



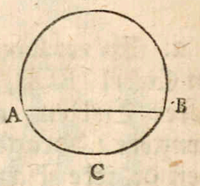
5. Men den rette Linie siges at staae længere borte fra Middel-Punkten, paa hvilken en større Perpendicular-Linie falder.

For Exempel: den rette Linie KH, i den næstforestaaende Cirkel ABCD, siges at staae længere borte fra Middel-Punkten E end AB eller CD, fordi Perpendicular-Linien EI er større end EG eller EF.

6. Et Cirkel-Stykke (Segmentum Circuli) er en Figur, som er indsluttet med en ret Linie og en Cirkel-Bue. See den 19 Def. i den første Bog.

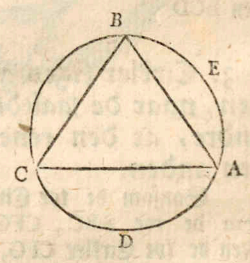
En Cirkel-Bue kalder man enhver Part af en Cirkels Omkreds eller Circumferentz.

7. En Vinkel af et Cirkel-Stykke (Angulus Segmenti) kaldes den, som er indsluttet med en ret Linie og en Cirkel-Bue.



Saasom den Vinkel BAD kaldes Vinklen af Cirkel-Stykket ADB, og den Vinkel BAC kaldes Vinklen af Cirkel-Stykket ACB.

8. Naar man antager en Punkt i Omkredsen af et Cirkel-Stykke (AEBC) og drager fra samme Punkt toe rette Linier (BA, BC) hen til Enderne af den rette Linie (AC), som er Cirkel-Stykkets Grund-Linie, saa siges den Vinkel (ABC), som disse rette Linier indslutte, at være i bemeldte Cirkel-Stykke (AEBC).

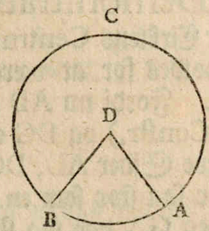


Ligeledes siges den Vinkel CAB at være i Cirkel-Stykket CDAEB, og den Vinkel ACB siges at være i Cirkel-Stykket ADCB.

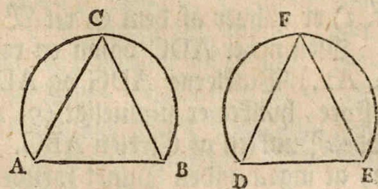
9 Men

9. Men naar de tvende rette Linier (AB, BC), som indslutte Vinklen (ABC), fatte en Cirkel-Bue (ADC) imellem sig, saa siges Vinklen at staae paa samme Cirkel-Bue.

Ligeledes siges den Vinkel CAB at staae paa Cirkel-Buen BC, og Vinklen ACB siges at staae paa Cirkel-Buen AEB.



10. **Et Cirkel-Skaar** (Sector Circuli) er en Figur (ADB), som er indsluttet med toe rette Linier (AD, DB), som støde sammen i en Cirkels Middel-Punkt (D), og med den Cirkel-Bue (AB), som de fatte imellem sig.

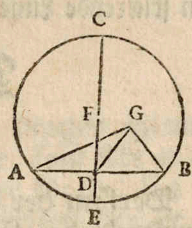


11. **Ligedannede Cirkel-Stykker** (ACB, DFE), kaldes de, som indslutte lige store Vinkler (ACB, DFE), eller i hvilke der ere lige store Vinkler ACB, DFE.

Den I Proposition.

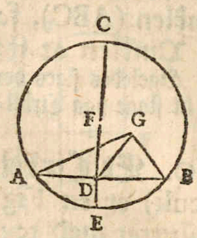
Problema.

At finde Middel-Punkten eller Centrum af en given Cirkel.



Exempel. Lad ABC være en given Cirkel: det begiæres, at man skal finde Middel-Punkten deraf.

Construction. Udi den givne Cirkel ABC drages efter Behag en ret Linie AB, som skiæres (10. 1) udi toe lige store Deele udi D. Paa AB og fra Punkten D opreises (11. 1) en Perpendicular-Linie DC, som bliver draget længere ud hen til E. Endelig deeles CE i toe lige store Deele i F: saa er Punkten F Cirklens Centrum.



Demonstration. Vil man nægte, at F er Cirklens Centrum, saa lad en anden Punkt G holdes for at være det. Og drag GA, GD, GB. Fordi nu AD er lige saa stor som DB (efter Constr.) og DG er en fælles Side; saa ere de toe Sider AD, DG lige saa store som de toe Sider GD, DB, enhver i sær saa stor som en anden. Fremdeeles er ogsaa (15. Def. 1) Grund-Linien GA lige saa stor som Grund-Linien GB, thi de ere begge dragne fra Punkten G, som holdes for at være Cirklens Centrum: Derfore er (8. 1) Vinklen ADG lige saa stor som Vinklen GDB, og følgelig (10 Def. 1) er enhver af dem en ret Vinkel. Altsaa er ADG en ret Vinkel. Men nu er ADC ogsaa en ret Vinkel (efter Constr.): Følgelig ere (10. Ax.) Vinklerne ADG og ADC, nemlig den større og den mindre lige store, hvilket er u-mueligt (9. Ax.). Derfore kand da G ikke være Middel-Punkten af Cirklen ABC. Paa samme Maade kand man beviise, at ingen anden Punkt foruden F kand være det.

Altsaa er F Middel-Punkten af Cirklen ABC. Hvilket var det, som skulde giøres.

Corollarium.

Heraf seer man, at naar udi en Cirkel (ACB) en ret Linie (CE) skiærer en anden ret Linie (AB) i toe lige store Deele og staaer Perpendicular i Skiærings-Punkten (D), da skal Cirklens Middel-Punkt være i den skiærende Linie (CE).

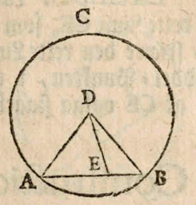
Den 2 Proposition.

Theorema.

Dersom der antages toe Punkter i en Cirkels Circumferentz eller Omkreds saa skal den rette Linie, som sammenføyer samme Punkter, falde inden for Cirklen.

Exem-

Exempel. Lad toe Punkter A og B blive antagne i Omkredsen af den Cirkel ABC: saa siger jeg, at den rette Linie, som bliver dragen fra A til B, skal falde inden for Cirklen ACB.



Construction. Søg (1. 3) Cirklens Middel-Punkt D, og i den rette Linie AB antag en Punkt E efter Behag og drag de rette Linier DA, DE, DB.

Demonstration. Fordi nu AD er (15. Def. 1) lige saa stor som DB, saa er Vinklen DBA (5. 1) lige saa stor som Vinklen DAB. Men nu er (16. 1) udi Trianglen AED den udvendige Vinkel DEB større end den indvendige og imodsatte Vinkel DAB; Følgelig er ogsaa Vinklen DEB større end DBA, og derfore (19. 1) er ogsaa Siden DB større end DE. Men DB er dragen fra Middel-Punkten til Omkredsen. Følgelig naaer DE ikke til Omkredsen, og altsaa falder Punkten E inden for Cirklen. Det samme kand ogsaa beviises om alle andre Punkter, som antages i AB, inden for A og B. Følgelig falder den heele rette Linie AB inden for Cirklen. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium.

Heraf følger da, at en ret Linie ikke kand røre en Cirkel (2. Def. 3) udi meere end een eeneste Punkt.

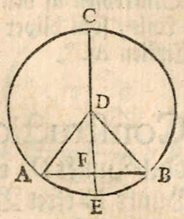
Den 3 Proposition.

Theorema.

Dersom i en Cirkel en ret Linie, som er dragen igiennem Middel-Punkten, skiærer en anden ret Linie, som ikke er dragen igiennem Middel-Punkten, i toe lige store Deele; saa skal den ogsaa være perpendicular paa den: Og dersom den er perpendicular paa den, saa skal den og skiære den i toe lige store Deele.

 Exem-

Exempel. Lad for det første udi Cirklen ABC den rette Linie CE, som er dragen igiennem Middel-Punkten, skiære den rette Linie AB, som ey er dragen igiennem Middel-Punkten, i toe lige store Deele i F: saa siger jeg, at CE ogsaa staaer perpendicular paa AB



Construction. Man søger (1. 3) Cirklens Centrum D og drager de rette Linier DA, DB.

Demonstration. Eftersom nu AF er lige saa stor som FB, og FD er en fælles Side, og Grund-Linien AD er lige saa stor som Grund-Linien DB (15. Def. 1): Saa er og (8. 1) Vinklen AFD lige saa stor som Vinklen DFB. Derfore er (10. Def. 1) den rette Linie CE perpendicular paa AB. Hvilket var det, som skulde bevises.

Lad nu for det andet CE være perpendicular paa AB: saa siger jeg, at den ogsaa skiærer AB i toe lige store Deele.

Thi eftersom AD er lige saa stor som DB (15. Def. 1), saa er ogsaa Vinklen DAB (5. 1) lige saa stor som Vinklen DBA. Men Vinklen AFD er (10. Ax.) lige saa stor som BFD, thi de ere begge rette Vinkler (efter Hypothesin): Følgelig ere udi de tvende Triangler ADF, BDF de toe Vinkler DAF, AFD lige saa store som de toe Vinkler DBF, DFB, hver i sær saa stor som en anden. Ydermeere er FD en fælles Side til begge Trianglerne. Derfore er ogsaa (26. 1) AF lige saa stor som FB. Heraf følger da, at CE deeler AB i toe lige store Deele. Hvilket var det, som skulde bevises.

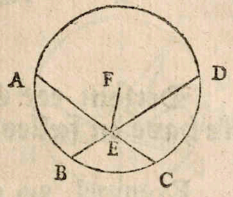
Den 4 Proposition.

Theorema.

Dersom i en Cirkel toe rette Linier, som ikke ere dragne igiennem Middel-Punkten, skiære hinanden, saa kand de ikke skiære hinanden i toe lige store Deele.

Exem-

Exempel. Lad udi Cirklen ADCB de toe rette Linier AC, BD, som ikke ere dragne igiennem Middel-Punkten, skiære hinanden i Punkten E: Saa siger jeg, at de ikke skiære hinanden i toe lige store Deele.



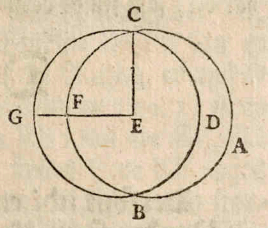
Demonstration. Søg (1. 3) Cirklens Centrum F og drag den rette Linie EF. Dersom nu AC og BD vare skaarne i toe lige store Deele, saa at AE var saa stor som EC og BE saa stor som ED, saa maatte (3. 3) den rette Linie EF være perpendicular baade paa AC og BD, og følgeligen (10. Ax.) skulde de Vinkler BEF og AEF, nemlig den større og den mindre, være lige store: hvilket er u-mueligt (9. Ax.). Altsaa kand de rette Linier AC, BD ikke skiære hinanden i toe lige store Deele. Hvilket var det, som skulde beviises.

Den 5 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Cirkler skiære hverandre, saa kand de ikke have en fælles Middel-Punkt.

Exempel. Lad de toe Cirkler ABC, CDG skiære hinanden i Punkterne C, B, saa siger jeg, at de ey kand have en tilfælles Middel-Punkt.



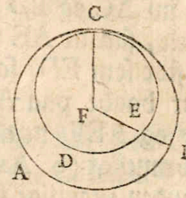
Demonstration. Dersom det var mueligt, at de toe Cirkler ABC og CDG kunde have een og den samme Middel-Punkt, for Exempel: E; saa vilde deraf følge, at, naar der bliver draget en ret Linie EC fra E til C, og en anden ret Linie EFG efter Behag, saa skulde EG være saa stor som EC, fordi E er Middel-Punkten af Cirklen CDG, og EF skulde ogsaa være saa stor som den samme EC, fordi E er tillige ogsaa Middel-Punkten af Cirklen ABC, følgelig skulde (1. Ax.) EG og EF, nemlig det heele og en deel deraf, være lige store: hvilket er u-mueligt (9 Ax.) Altsaa kand de toe Cirkler ABC og CDG ikke have en tilfælles Middel-Punkt. Hvilket var det, som skulde beviises.

Den 6 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Cirkler røre hinanden inden til, saa kand de ikke have en fælles Middel-Punkt.

Exempel. Lad de toe Cirkler ABC, DEC røre hinanden inden til i Punkten C: saa siger jeg, at de kand ikke have en fælles Middel-Punkt.



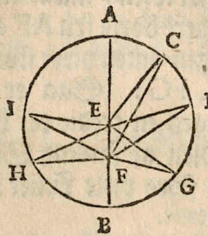
Demonstration. Dersom det var mueligt at de kunde have en fælles Middel-Punkt, for Exempel: F, saa vilde deraf følge, at, naar der bliver draget en ret Linie FC fra F til C og en anden ret Linie FEB efter Behag, saa skulde FB være saa stor som FC, fordi F er Centrum af Cirklen ABC; og FE skulde ogsaa være saa stor som den samme FC, fordi F er Centrum af Cirklen DEC: Følgelig skulde (1 Ax.) FB være saa stor som FE, nemlig det heele skulde være lige saa stort som en Deel deraf; som er umueligt (9 Ax.). Derfore kand da de tvende Cirkler ABC, DEC ikke have en fælles Middel-Punkt. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 7 Proposition.

Theorema.

Dersom udi en Cirkels Diameter eller Middel-Linie antages en Punkt, som ikke er Cirklens Centrum, og fra samme Punkt drages adskillige rette Linier hen til Omkredsen: Saa skal iblant disse rette Linier den være den største, udi hvilken Middel-Punkten findes, og den øvrige skal være den mindste, men af de andre skal altid den, som er nærmere ved den største, være større end den, som er længere borte derfra: og der kand ey falde fleere end toe lige store rette Linier fra samme Punkt til Omkredsen paa begge Sider af den største eller mindste.

Exem-

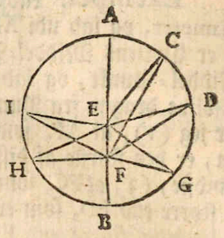


Exempel. Lad ADBI være en Cirkel, og AB dens Diameter, og lad udi AB en Punkt F blive antaget, som ey er Cirklens Middel-Punkt, men lad E være Cirklens Middel-Punkt, og lad nogle rette Linier FC, FD, FG, FI blive dragne fra Punkten F til Omkredsen. Saa siger jeg (1), at AF, som gaaer igiennem Middel-Punkten, er den største af disse rette Linier, (2) at FB er den mindste, (3) at FC, som er nærmere ved den største FA, er større end FD, som er længere borte derfra, og at FD er ligeledes større end FG. Og endelig (4) at der ey kand drages fleere end toe lige store rette Linier fra samme Punkt til Omkredsen, nemlig een paa den eene Side, og en anden paa den anden Side af den mindste FB eller største FA.

Construction. Man drager fra Middel-Punkten E de rette Linier EC, ED, EG.

Demonstration. Efterdi E er Middel-Punkten, saa er (15. Def. 1) EA lige saa stor som EC; Følgelig er (2 Ax.) FA lige saa stor som FE, EC tilsammen. Da nu FE, EC ere tilsammen større end FC (20. 1), saa er ogsaa FA større end FC. Fremdeeles, fordi EC er lige saa stor som ED, og EF er en fælles Side til de toe Triangler CEF, DEF, saa ere de toe Sider EC, EF lige saa store som de toe Sider ED, EF. Og da nu Vinklen CEF er større end Vinklen DEF: saa er (24. 1) Grund-Linien FC større end FD: Af samme Aarsag er og FD større end FG. Eftersom fremdeeles EF, FG ere tilsammen (20. 1) større end EG, og EG er lige saa stor (15 Def 1) som EB: saa ere EF, FG tilsammen større end EB. Derfore, dersom den fælles Linie EF tages fra dem, saa er FG større end FB. Heraf følger da, at FA er den største, FB den mindste, og at FC er større end FD, og FD større end FG. Hvilket var det første, andet og tredie, som skulde bevises.

4. Dersom man afsætter (23. 1) paa EF og udi Punkten E en Vinkel HEF saa stor som Vinklen FEG, og drager FH, saa faaer man toe Triangler FEG, FEH, udi hvilke de toe Sider HE, EF ere saa store som de toe Sider GE, EF, enhver for sig saa stor som en anden, og Vinklen HEF er lige saa stor som GEF. Følgelig er HF lige saa stor (4. 1) som FG. Da nu alle de andre rette Linier, som drages fra F til Om-

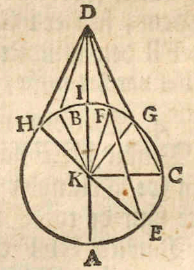


Omkredsen, maae enten være nærmere ved eller længere borte fra AF end HF eller GF, og maae følgeligen enten være større eller mindre end de samme HF, FG: Saa er det klart, at der ey kand drages en tredie ret Linie fra Punkten F til Omkredsen af samme Størrelse, som een af de toe lige store rette Linier FG og FH. Hvilket (4) var at bevise.

Den 8 Proposition.

Theorema.

Dersom der antages en Punkt uden for en Cirkel, og fra samme Punkt drages nogle rette Linier hen til Cirklen, saaledes at een bliver draget igiennem Middel-Punkten, men de andre efter Behag: saa er iblant dem, som falde inden til paa Omkredsen, den, som gaaer igiennem Middel-Punkten, den største, og af de øvrige er den, som er nærmere ved den største, større end den, som er længere borte derfra. Men iblant de rette Linier, som falde uden til paa Omkredsen, er den den mindste, som ligger imellem Punkten og Middel-Linien eller Diameter, Og af de øvrige er den, som er nærmere ved den mindste, mindre end den, som er længere derfra; og fra samme Punkt kand der ikke falde fleere end toe lige store rette Linier til Omkredsen paa begge Sider af den mindste.



Exempel. Lad uden for Cirklen ACB en Punkt D blive antagen efter Behag, og lad fra samme Punkt D nogle rette Linier DA, DE, DC blive dragne hen til Cirklen, saaledes, at een af dem, saasom DA, gaaer igiennem Cirklens Middel-Punkt: Saa siger jeg (1) at iblant dem, som falde inden til paa Omkredsen, er DA, som gaaer igiennem Middel-Punkten, den største, og at DE, som er nærmere ved den største DA, er større end DC, som er længere borte derfra. Og (2) at iblant dem, som falde uden til paa Circumferentzen er DI, som ligger imellem

Punkten

Punkten D og Middel-Linien IA, den mindste, og DB, som er nærmere ved den mindste, er mindre end DH, som er længere borte derfra. Og (3) at der ey kand falde fleere end toe lige store rette Linier fra Punkten D til Omkredsen paa begge Sider af den mindste.

Construction. Søg Cirklens Centrum K (1. 3) og drag de rette Linier KE, KC, KB, KH.

Demonstration. KE er (15. Def. 1) lige saa stor som KA. Læg DK til enhver af dem, saa er DA lige saa stor som DK, KE. Men DK, KE ere (20. 1) større end DE. Følgelig er DA større end DE. Og fordi KE er lige saa stor som KC, og DK er en fælles Side til de toe Triangler DKC, DKE, saa ere DK, KE lige saa store som DK, KC; men Vinklen DKE er større end DKC. Følgelig er Grund-Linien DE (24. 1) større end Grund-Linien DC. Derfor er da DA den største, og DE er større end DC. Hvilket var det første, som skulde beviises.

2. Efterdi DB, BK ere tilsammen større end DK, (20. 1) og BK er lige saa stor som IK (15 Def. 1), saa er og den øvrige DB større end DI, og derfore er DI mindre end DB. Og fordi de twende rette Linier DB, BK støde sammen inden for Trianglen DHK fra Enderne D, K af den Side DK, saa ere (21. 1) disse DB, BK tilsammen mindre end DH, HK. Og da nu BK er lige saa stor som HK, saa er (3 Ax.) den øvrige DB mindre end DH. Altsaa er DI den mindste og DB mindre end DH. Hvilket (2) var at bevise.

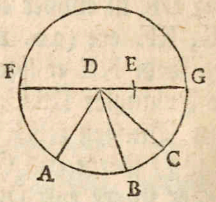
3. Dersom man afsætter (23. 1) paa den rette Linie DK og udi Punkten K en Vinkel DKF, saa stor som Vinklen DKB, og drager DF, saa ere udi Trianglen DBK de toe Sider BK, KD lige saa store som de toe Sider FK, KD udi den anden Triangel DFK, og ydermeere er Vinklen DKB lige saa stor som Vinklen DKF. Følgelig (4 1) er DB lige saa stor som DF. Efterdi nu alle andre rette Linier, som falde fra D til Omkredsen, ere enten nærmere ved eller længere borte fra den mindste DI end DB eller DF, og ere altsaa (efter det som nyelig er beviist) enten mindre eller større end DB eller DF: saa er det klart, at der ey kand drages fleere end toe lige store rette Linier fra Punkten D til Omkredsen paa begge Sider af den mindste. Hvilket var det, som (3) skulde bevises.

Den 9 Proposition.

Theorema.

Dersom der kand drages fleere end toe lige store rette Linier fra en Punkt, som er antagen inden for en Cirkel, hen til Cirklens Omkreds: saa skal samme Punkt være Cirklens Centrum.

Exempel. Lad i Cirklen AGF en Punkt D være antagen, fra hvilken der kand drages tre lige store rette Linier DA, DB, DC: Saa siger jeg, at Punkten D er Middel-Punkten af Cirklen AGF.



Demonstration. Hvis D ey er Centrum af Cirklen AGF, saa lad en anden Punkt for Exempel: E holdes for at være det. Drag DE og træk den længere ud til F og G: Saa er FG Cirklens Diameter, udi hvilken der er antagen en Punkt D, som ikke er Cirklens Centrum. Derfore skal (7. 3) DG være den største, fordi den gaaer igiennem Middel-Punkten E, og DC skal være større end DB, og DB større end DA; hvilket er umueligt, thi DA, DB, DC ere lige store (efter Hyp.). Følgelig skal D være Cirklens Centrum. Hvilket var det, som skulde bevises.

Anderledes.

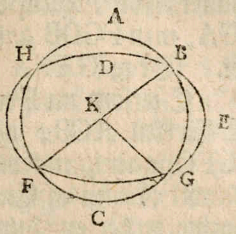
Dersom D ikke var Cirklens Centrum, saa ville deraf følge, at der i en Cirkel kunde drages fleere end toe lige store rette Linier fra en Punkt, som ikke er Cirklens Centrum, hen til Omkredsen; hvilket er umueligt (7. 3) Derfore er da D Cirklens Centrum. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 10 Proposition.

Theorema.

En Cirkel kand ikke skiære en anden Cirkel i fleere end toe Punkter.

Demon-



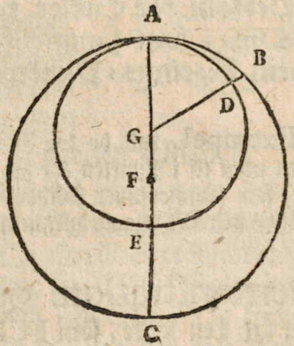
Demonstration. Vil man sige, at saadant kand være muelig, saa lad Cirklen ABC skiære Cirklen DEF udi fleere end toe Punkter, saasom i de tre Punkter F, G, B, og søg (1. 3) Middel-Punkten K af Cirklen ABC, og drag de rette Linier KF, KG, KB, saa skal disse være lige store (15 Def. 1). Fordi nu Punkten K er inden for Cirklen DEF og fra samme Punkt falde fleere end toe lige store rette Linier hen til Omkredsen, nemlig: de tre lige store rette Linier KF, KG, KB; saa er (9. 3) K Middel-Punkten af Cirklen DEF; Men den er og Middel-Punkten af Cirklen ABC (efter Constr.). Folgelig skulde toe Cirkler, som skiære hinanden, have en fælles Middel-Punkt, hvilket er umueligt (5. 3)

Derfore kand en Cirkel ikke skiære en anden i fleere end toe Punkter. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den II Proposition.

Theorema.

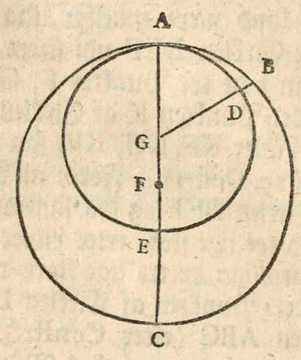
Dersom twende Cirkler røre hinanden inden til, og deres Middel-Punkter blive tagne, saa skal den rette Linie, som sammenføyer Middel-Punkterne, saa fremt den bliver længere uddragen, falde i Rørings-Punkten.



Exempel. Lad de tvende Cirkler ACB, AED røre hverandre inden til udi Punkten A, og lad F være Middel-Punkten af Cirklen ACB, og G Middel-Punkten af Cirklen AED; Saa siger jeg, at dersom den rette Linie, som drages fra F til G bliver længere uddragen, saa skal den falde i Rørings-Punkten A.

Demonstration. Vil nogen nægte, at naar FG bliver længere uddragen, den da falder i Rørings-Punkten A, saa lad den falde hen til en anden Punkt,

Punkt, for Exempel B, saa at ikke FGA, men FGDB ansees som en ret Linie. Drag GA.



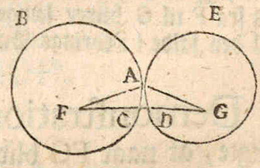
Eftersom nu F er Middel-Punkten af Cirklen ACB, og den rette Linie BGFC gaaer igiennem den, saa er BGFC Middel-Linien af Cirklen ACB; Og i samme er der en Punkt G, som ikke er den bemeldte Cirkels Middel-Punkt. Folgelig skal (7. 3) GC være den største, fordi den gaaer igiennem Middel-Punkten F, og den øvrige GB skal være den mindste. Derfore er da GB mindre end GA. Men GA er lige saa stor som GD, fordi G er Middel-Punklen af Cirklen AED. Altsaa er GB ogsaa mindre end GD, nemlig det heele er mindre end en Deel deraf, som er u-rimeligt (9 Ax.). Følgelig maae den rette Linie, som sammenføyer Middel-Punkterne F, G, nødvendigen falde i Rørings-Punkten A. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 12 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Cirkler røre hinanden uden til, saa skal den rette Linie, som sammenføyer deres Middel-Punkter, gaae igiennem Rørings-Punkten.

Exempel. Lad de toe Cirkler ABC, ADE røre hinanden uden til i Punkten A; saa siger jeg, at den rette Linie, som sammenføyer Middel-Punkterne af begge de Cirkler ABC, AED, gaaer igiennem Rørings-Punkten A.



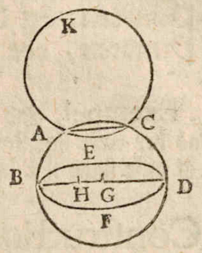
Demonstration. Vil nogen nægte dette, saa lad den falde, som FCDG,, og lad F holdes for at være Middel-Punkten af Cirklen ABC og G at være Middel-Punkten af Cirklen AED og drag de rette Linier FA, GA.

Eftersom nu F er Middel-Punkten af Cirklen ABC, saa er FA lige saa stor som FC. Ligeledes, fordi G er Middel-Punkten af Cirklen AEC, saa er GA lige saa stor som GD. Følgelig er FA, AG tilsammen (2 Ax.) saa store som FC, DG. Altsaa skulde den heele rette Linie FG være større end FA, AG tilsammen, som er umueligt, thi den er mindre (efter 20. 1). Følgelig maae den rette Linie, som sammenføyer Middel-Punkterne F, G, nødvendig gaae igiennem Rørings-Punkten A. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 13 Proposition.

Theorema.

En Cirkel kand ey røre en anden udi meere end en eeneste Punkt, enten de røre hinanden uden eller inden til.

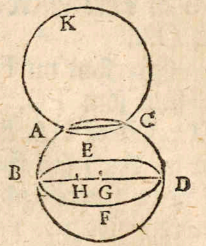


Demonstration. Hvis nogen siger, at saadant kand være mueligt, saa lad en Cirkel ABDC røre en anden EBFD, først inden til i fleere Punkter end i een, nemlig i de toe Punkter B og D.

Efterdi nu de tvende Cirkler røre hinanden, saa maae hver af dem have sit eget Centrum (6. 3). Søg derfore (1. 3) Middel-Punkterne af bemeldte Cirkler, og lad H være Middel-Punkten af Cirklen ABDC, og G Middel-Punkten af Cirklen EBFD.

Saa skal den rette Linie, som drages fra H til G, naar den bliver dragen længere ud til begge Sider, falde i Rørings-Punkterne B, D, (11. 3) saa som den rette Linie BHGD. Og efterdi H er Middel-Punkten af Cirklen ABDC, saa er BH lige saa stor som HD. Følgelig er BG større end HD, og altsaa er BG ogsaa større end GD. Og fordi G er Middel-Punkten af Cirklen EBFD, saa er BG lige saa stor som GD.

Men den er og tillige større, som tilforn blev beviist, som er urimeligt. Følgelig kand en Cirkel ey røre en anden inden til i meer end een Punkt Hvilket (1) var at bevise.



Lad for det andet, om mueligt er, en Cirkel ABDC røre en anden AKC uden til i fleere Punkter end i een, nemlig i A og C, og drag den rette Linie AC. Saa skal denne rette Linie AC (2. 3) falde inden for begge Cirklerne, følgelig skulde de Cirkler ABDC og AKC skiære hinanden, hvilket er imod Hypothesin, thi man har antaget, at de skal røre hinanden (efter 3. Def. 3)

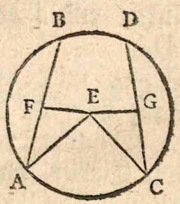
Altsaa kand ikke heller en Cirkel røre en anden uden til i fleere Punkter end i een. Hvilket (2) var at bevise.

Den 14 Proposition.

Theorema.

I en Cirkel staae lige store rette Linier lige langt fra Middel-Punkten; og de rette Linier, som staae lige langt fra Middel-Punkten, ere lige store.

Exempel. Lad ABDC være en Cirkel, og i samme lad der være lige store rette Linier AB, CD: saa siger jeg, at disse staae lige langt fra Middel-Punkten.



Construction. Man søger (1. 3) Cirklens Centrum C. Fra E drager man Perpendicular-Linier EF, EG hen paa AB og CD (12. 1) Endelig drager man de rette Linier EA og EC

Demonstration. Eftersom EF er dragen fra Middel-Punkten E og er perpendicular paa AB (efter Constr.), saa er (3. 3) AF lige saa stor som FB. Følgelig er AB dobbelt saa stor som AF. Af samme

Aarsag

Aarsag er og CD dobbelt saa stor som CG. Men nu er AB lige saa stor som CD (efter Hypoth.): Følgelig er og AF (6 Ax.) lige saa stor som CG. Følgelig skal Qvadraten, som beskrives paa AF, være lige saa stor som Qvadraten, som beskrives paa CG. Og fordi AE er lige saa stor som CE, saa er og Qvadraten af AE lige saa stor som Qvadraten af CE. Men Qvadraten af AE er lige saa stor (47. 1) som Qvadraterne af AF, FE, thi EFA er en ret Vinkel (efter Constr.), og Qvadraten af CE er lige saa stor som Qvadraterne af CG, GE, thi EGC er en ret Vinkel. Følgelig ere Qvadraterne af AF, FE lige saa store som Qvadraterne af CG, GE, men Qvadraten af AF er lige saa stor som Qvadraten af CG (som tilforn er beviist). Følgelig er (3 Ax.) Qvadraten af EF lige saa stor som Qvadraten af EG. Og altsaa er ogsaa EF saa stor som EG. Men (4 Def. 3) rette Linier siges i en Cirkel at staae lige langt fra Middel-Punkten, naar Perpendicular-Linierne, som falde ned paa dem fra Middel-Punkten, ere lige store. Altsaa staae AB, DC lige langt fra Middel-Punkten E. Hvilket var det, som (1) skulde bevises.

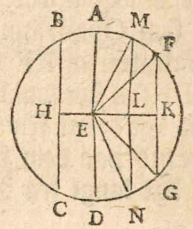
Lad nu fremdeeles de rette Linier AB, CD staae lige langt fra Middel-Punkten E, det er: Lad Perpendicular-Linierne EF, EG være lige store: Saa siger jeg, at AB er lige saa stor som CD. Thi man kand paa selv samme Maade, som tilforn, beviise, at AB er dobbelt saa stor som AF, og CD dobbelt saa stor som CG. Og, fordi AE er lige saa stor som CE, saa er ogsaa Qvadraten af AE lige saa stor som Qvadraten af CE. Men Qvadraten af AE er lige saa stor som Qvadraterne af AF, FE (47. 1.), thi EFA er en ret Vinkel, og Qvadraten af CE er lige saa stor som Qvadraterne af CG, GE, fordi EGC er en ret Vinkel. Følgelig ere Qvadraterne af AF, FE tilsammen lige saa store som Qvadraterne af CG, GE, og af disse er Qvadraten af EF lige saa stor som Qvadraten af EG, fordi EF er lige saa stor som EG (efter Hyp.); Følgelig er og Qvadraten af AF lige saa stor som Qvadraten af CG (3 Ax.); Altsaa er AF lige saa stor som CG. Men AB er dobbelt saa stor som AF, og CD er dobbelt saa stor som CG. Følgelig er og AB lige saa stor som CD (6. Ax.). Hvilket var det, som (2) skulde bevises.

Den 15 Proposition.

Theorema.

I en Cirkel er af alle rette Linier Middel-Linien eller Diameter den største. Men af de andre er den, som er nærmere ved Middel-Punkten, større end den, der er længere derfra.

Exempel. Lad ABCF være en Cirkel og AD dens Diameter og E dens Middel-Punkt, og lad BC være nærmere ved Middel-Punkten end FG: Saa siger jeg, at AD er den største, og at BC er større end FG.



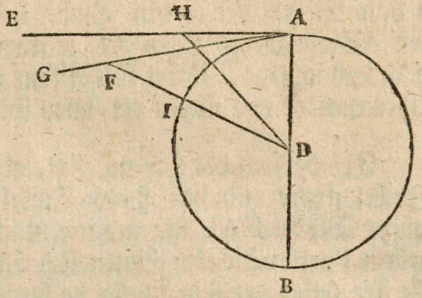
Construction. Fra E drages (12. 1) Perpendicular-Linier EH, EK hen paa BC, FG. Og fordi BC er nærmere ved Middel-Punkten E end FG, saa er (5. Def. 3) HE mindre end EK; Giør altsaa EL saa stor som HE (3. 1). Dernæst opreises paa EK udaf Punkten L en Perpendicular-Linie LM, som trækkes længere ud hen til N, endelig drages de rette Linier EM, EF, EG, EN.

Demonstration. Eftersom EH er lige saa stor som EL, saa er BC lige saa stor som MN (efter 14. 3), og fordi AE er lige saa stor som EM, og ED er saa stor som EN; saa er (2 Ax.) AD lige saa stor som EM, EN tilsammen. Men EM, EN ere tilsammen større end MN (20. 1). Derfore er og AD større end MN eller BC. Og eftersom de toe Sider EM, EN ere lige saa store som de toe Sider EF, EG, og Vinklen MEN er større end Vinklen FEG, saa er og (24. 1) MN større end FG. Men MN er lige saa stor som BC. Følgelig er BC større end FG. Altsaa er AD den største og BC større end FG, Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Den 16 Proposition.
Theorema.

En ret Linie, som er sat perpendicular paa den yderste Ende af en Cirkels Middel-Linie, falder uden for Cirklen: Og imellem den samme rette Linie og Omkredsen kand ingen anden ret Linie drages; Og Vinklen af en halv Cirkel er større end nogen ret-lined spids Vinkel; Men den øvrige Vinkel er mindre end nogen ret-lined spids Vinkel.



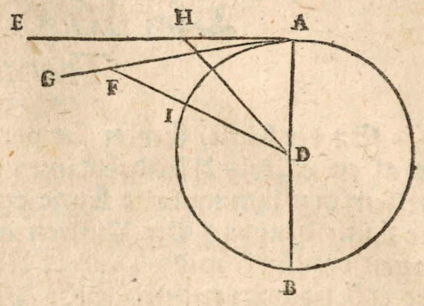
Exempel. Lad ABI være en Cirkel og AB dens Middel-Linie og D dens Middel-Punkt: Jeg siger (1) at den rette AE, som drages fra Punkten A perpendicular paa AB, falder uden for Cirklen.

Demonstration. Dersom i den rette Linie AE antages en Punkt H, og fra Middel-Punkten D drages en ret Linie DH, saa faaer man den Triangel DAH, udi hvilken den Vinkel DAH er en ret Vinkel, og folgelig (17. 1) storre end den Vinkel DHA; og derfore er ogsaa den Side DH storre end den Side DA. Altsaa falder den Punkt H uden for Cirklen ABI. Paa samme Maade kand man bevise, at alle Punkter i AE falde uden for Cirklen ABI. Derfore falder da den heele rette Linie AE uden for den bemeldte Cirkel ABI. Hvilket (1) var at bevise.

Jeg siger (2) at der kand ikke drages nogen ret Linie fra Punkten A imellem bemeldte Perpendicular-Linie AE og Omkredsen AIB. Thi dersom saadant kand være mueligt, saa lad en ret Linie AG falde imellem EA og Circumferentzen AIB, og drag fra Middel-Punkten D paa GA en Perpendicular-Linie DF (12. 1).

Fordi nu DFA er en ret Vinkel og FAD er mindre end en ret Vinkel, saa er (19. 1) AD storre end FD. Men AD er lige saa stor som DI.

 Folge-



Følgelig er ID større end FD, en Deel større end det heele, som er u=mueligt (9 Ax.). Altsaa kand der ikke drages nogen ret Linie fra A imellem AE og Omkredsen AIB. Men alle rette Linier, som drages udaf A neden for AE, skal skiære Cirklen. Hvilket (2) var at bevise.

Jeg siger (3) at Vinklen af en halv Cirkel, det er den Vinkel BAI, som er indsluttet af Middel=Linien AB og Cirkel=Buen AI, er større end nogen ret=lined spids Vinkel, og at den øvrige Vinkel EAI, som er indsluttet af EA og Cirkel=Buen AI, er mindre end nogen ret=lined spids Vinkel.

Thi dersom det var mueligt, at man kunde giøre en ret=lined spids Vinkel større end den Halv=Cirkel=Vinkel BAI eller mindre end den øvrige Vinkel EAI, saa maatte man kunde drage en ret Linie fra A imellem Perpendicular-Linien EA og Cirkel=Buen AI. Men dette kand ikke skee (efter det som nyelig er beviist), derfor er den Vinkel BAI større end nogen ret=lined spids Vinkel, og den øvrige Vinkel EAI er mindre end nogen ret=lined spids Vinkel. Hvilket var det, som (3) skulde bevises.

Corollarium.

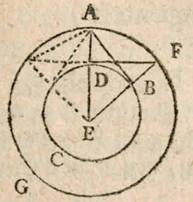
Heraf følger, at en ret Linie, som er sat perpendicular paa den yderste Ende af en Cirkels Diameter, rører Cirklen (2 Def. 3).

Den 17 Proposition.

Problema.

Fra en given Punkt at drage en ret Linie, som rører en given Cirkel.

Exem-



Exempel. Lad A være den givne Punkt og BCD den givne Cirkel. Man skal drage en ret Linie fra Punkten A, som rører Cirklen BCD.

Construction. Man søger (1. 3) Cirklens Middel-Punkt E og drager AE. Af Middel-Punkten E og udi Distancen EA beskrives en Cirkel AFG (3. Post.). Fra D opreises en Perpendicular-Linie DF paa AE (11. 1), og endelig drages de rette Linier EBF og AB: Jeg siger nu, at den rette Linie AB rører Cirklen BCD.

Demonstration. Eftersom E er Middel-Punkten af Cirklerne BCD, AFG; saa er EA lige saa stor som EF, og ED saa stor som EB. Altsaa ere de toe rette Linier EA, EB udi den Triangel AEB lige saa store som de toe EF, ED udi den Triangel FED, og de indslutte den fælles Vinkel AEF. Følgelig er (4. 1) Vinklen ABE lige saa stor som Vinklen FDE. Men FDE er en ret Vinkel (efter Constr.); følgelig er og ABE en ret Vinkel og den rette Linie EB er dragen fra Middel-Punkten E. Men en ret Linie, som er sat perpendicular paa Enden af en Cirkels Middel-Linie, rører Cirklen (Cor. 16. 3). Følgelig rører den rette Linie AB Cirklen BCD, og er dragen fra den givne Punkt A. Hvilket var det, som skulde giøres.

Scholion.

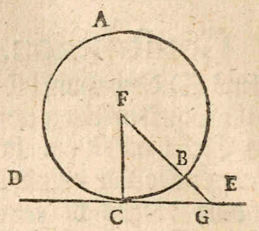
Vil man drage en ret Linie, som rører en given Cirkel BCD i en Punkt D, som er i den givne Cirkels Omkreds; saa søger man Cirklens Middel-Punkt E og drager Middel-Linien ED og udaf D drager man (11. 1) en ret Linie DF perpendicular paa ED, saa rører DF Cirklen i den givne Punkt D (Cor. 16. 3).

Den 18 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie rører en Cirkel og der bliver dragen en ret Linie fra Cirklens Middel-Punkt til Rørings-Punkten:

Saa skal samme være perpendicular paa den rørende Linie (Tangenten.)



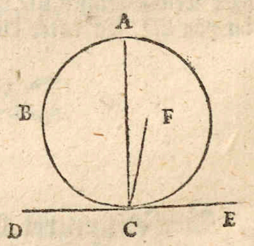
Exempel. Lad den rette Linie DE røre Cirklen ABC i Punkten C og lad F være Cirklens Middel-Punkt og lad en ret Linie FC blive dragen fra F til C: Saa siger jeg, at samme FC er perpendicular paa DE.

Demonstration. Vil man nægte, at FC er perpendicular paa DE, saa lad fra Punkten F en anden ret Linie FG blive dragen perpendicular ned paa DE (12. 1): Saa er den Vinkel FGC en ret Vinkel og altsaa (17. 1) større end Vinklen FCG. Og derfore er ogsaa FC større end FG (19. 1). Men nu er FB lige saa stor som FC (15 Def. 1); følgelig er FB større end FG, nemlig en Deel er større end det heele, som er u-mueligt (9 Ax.). Derfore er da FC perpendicular paa DE. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 19 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie rører en Cirkel, og der drages en ret Linie fra Rørings-Punkten perpendicular paa den rørende Linie (Tangenten): Saa skal Cirklens Middel-Punkt være i samme rette Linie.



Exempel. Lad en ret Linie DE røre Cirklen ABC i Punkten C, og lad fra C en ret Linie CA blive dragen perpendicular paa Tangenten eller den rørende Linie DE: Saa siger jeg, at Cirklens Middel-Punkt er i AC.

Demonstration. Vil man nægte dette, saa lad en Punkt, for Exempel: F, som er uden for AC, være Cirklens Middel-Punkt og drag FC.

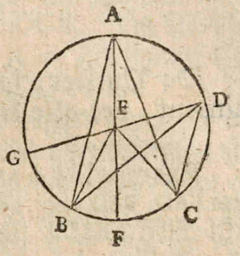
Fordi

Fordi nu DE rører Cirklen og FC er dragen fra Middel-Punkten til Rørings-Punkten C, saa skal (18. 3) FC være perpendicular paa DE: Følgelig er FCE en ret Vinkel: men ACE er og en ret Vinkel (efter Hyp.): Følgelig er den Vinkel ACE lige saa stor (10 Ax.) som FCE, nemlig den større er saa stor som den mindre, som er u-mueligt. Altsaa kand F ikke være Middel-Punkten af Cirklen ABC. Paa samme Maade bevises ogsaa, at ingen anden Punkt, som er uden for AC, kand være Cirklens Middel-Punkt; Følgelig maae Middel-Punkten af Cirklen ABC være i den rette Linie AC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 20 Proposition.
Theorema.

I en Cirkel er Vinklen ved Middel-Punkten dobbelt saa stor som Vinklen ved Circumferentzen eller Omkredsen, naar de staae begge paa een og den samme Cirkel-Bue.

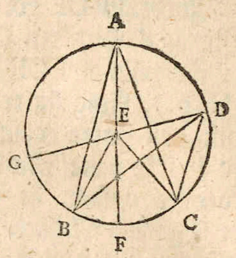
Exempel. Lad ABC være en Cirkel, og lad Vinklen BEC være ved Cirklens Middel-Punkt E, og BAC ved dens Omkreds, og lad dem begge staae paa een og den samme Cirkel-Bue BC: Saa siger jeg, at Vinklen BEC er dobbelt saa stor som Vinklen BAC.



Construction. Fra A til E drages en ret Linie AE, som trækkes længere ud hen til F.

Demonstration. Fordi AE er lige saa stor som EB, saa er (5. 1) Vinklen EBA lige saa stor som Vinklen EAB. Følgelig ere Vinklerne EBA, EAB tilsammen dobbelt saa store som Vinklen EAB. Men Vinklen BEF er (32. 1) lige saa stor som Vinklerne EAB, EBA tilsammen. Altsaa er BEF ogsaa dobbelt saa stor som EAB. Paa samme Maade bevises og, at Vinklen FEC er dobbelt saa stor som Vinklen EAC: Følgelig er den heele Vinkel BEC dobbelt saa stor som den heele Vinkel BAC.

Lad en anden Vinkel BDC være ved Circumferentzen: saa siger jeg, at Vinklen BEC er ogsaa dobbelt saa stor som BDC.



Thi drag DE og træk den længere ud hen til G. Saa kand paa samme Maade, som tilforn, bevises, at Vinklen GEC er dobbelt saa stor som GDC, og GEB dobbelt saa stor som GDB. Derfore, efterdi den heele Vinkel GEC er dobbelt saa stor som den heele Vinkel GDC, og den fratagne Part GEB er dobbelt saa stor som den fratagne Part GDB, saa er ogsaa den øvrige Vinkel BEC dobbelt saa stor som den øvrige BDC (efter 14 Ax.).

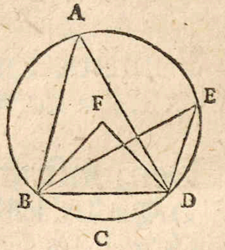
Derfore er Vinklen ved Middel-Punkten i en Cirkel dobbelt saa stor som Vinklen ved Circumferentzen, naar de staae begge paa een og den samme Cirkel-Bue. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 21 Proposition.

Theorema.

De Vinkler, som ere i et og det samme Cirkel-Stykke eller Segment, ere alle lige store.

Exempel. Lad ABCD være en Cirkel og lad Vinklerne BAD, BED være i samme Stykke deraf, nemlig i Cirkel-Stykket BAED: saa siger jeg, at de ere lige store.



Construction. Søg (1. 3) Cirklens Centrum F, og drag FB, FD.

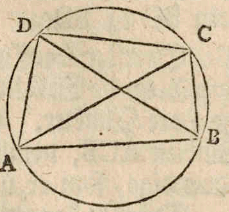
Demonstration. Eftersom Vinklen BFD er ved Middel-Punkten og Vinklen BAD ved Circumferentzen, og de staae begge paa samme Cirkel-Bue BCD: Saa er (20. 3) den Vinkel BFD dobbelt saa stor som BAD. Af samme Aarsag er BFD dobbelt saa stor som BED. Følgelig er (7 Ax.) Vinklen BAD lige saa stor som BED. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Den 22 Proposition.

Theorema.

J Fiirkanter, som ere indskrivne i en Cirkel, ere de imodsatte Vinkler saa store som toe rette Vinkler.



Exempel. Lad ABCD være en Cirkel og ABCD en Fiirkant, som er indskreven i samme Cirkel: Jeg siger da, at de hinanden imodsatte Vinkler i den bemeldte Fiirkant ere saa store som toe rette Vinkler.

Demonstration. Eftersom de tre Vinkler i enhver Triangel ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler (32. 1): Saa ere udi Trianglen ACB de tre Vinkler ACB, CBA, BAC saa store som toe rette Vinkler. Men Vinklen ADB er (21. 3) lige saa stor som Vinklen ACB, thi de ere begge i et og det samme Cirkel-Stykke ADCB. Og Vinklen BDC er lige saa stor som BAC, thi de ere begge i et og det samme Cirkel-Stykke BADC. Følgelig er den heele Vinkel ADC (2 Ax.) lige saa stor som de toe Vinkler ACB, BAC tilsammen. Lægger man nu den Vinkel CBA til dem, saa ere de Vinkler ADC, CBA tilsammen saa store som de tre Vinkler ACB, CBA, BAC tilsammen. Men disse tre ere saa store som toe rette Vinkler; Følgelig ere og Vinklerne ADC, CBA (som i Fiirkanten ABCD ere hinanden imodsatte) saa store som toe rette Vinkler. Paa samme Maade kand bevises, at de hinanden imodsatte Vinkler BAD, DCB ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Hvilket var det, som skulde bevises.

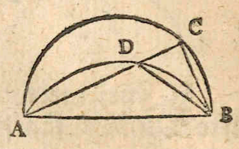
Den 23 Proposition.

Theorema.

Paa een og den samme rette Linie og paa samme Side deraf kand der ikke sættes toe Cirkel-Stykker eller Segmenter, som ere lige dannede og af u-lige Størrelse.

Exem-

Demonstration. Dersom saadant holdes for at være muligt, saa lad paa den rette Linie AB og paa samme Side deraf toe Cirkel-Stykker ACB, ADB være satte, som ere lige dannede, men af u-lige Størrelse, saa at de ikke passe sig paa hinanden, men det eene ADB ligger inden for det andet ACB. Drag den rette Linie ADC, item BC og BD.



Eftersom de Cirkel-Stykker ACB og ADB ere lige dannede (efter Hyp.), og de Cirkel-Stykker kaldes (11. Def. 3) lige dannede, som have lige store Vinkler. Saa skulde den Vinkel ADB være lige saa stor som Vinklen ACB, nemlig den udvendige skulde være lige saa stor som den indvendige, som er u-muligt (efter 16. 1).

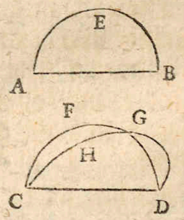
Derfore kand der ikke sættes paa en og den samme rette Linie og paa samme Side deraf toe Cirkel-Stykker, som ere lige dannede, men af u-lige Størrelse. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 24 Proposition.

Theorema.

De Cirkel-Stykker eller Segmenter, som ere lige dannede og staae paa lige store rette Linier, ere lige store.

Exempel. Lad de Segmenter AEB, CFD være lige dannede og satte paa lige store rette Linier AB, CD: Saa siger jeg, at Segmentet AEB er lige saa stort som Segmentet CFD.



Demonstration. Naar Segmentet AEB bliver lagt oven paa Segmentet CFD, saaledes: at Punkten A falder i C og den Linie AB paa CD, saa skal ogsaa B falde i D, fordi AB er lige saa stor som CD (efter Hyp.). Efterdi da AB passer sig paa CD, saa skal og Segmentet AEB passe sig paa Segmentet

mentet CFD; Thi hvis ikke, saa maae Segmentet AEB enten falde gandske inden for eller gandske uden for eller til Deels inden for og til Deels uden for CFD. Men det kand ikke falde gandske hverken inden eller uden for, thi ellers maatte der kunde sættes toe Segmenter, som ere lige dannede og af u-lige Størrelse, paa en og den samme rette Linier og paa samme Side deraf, som ey kand skee (23. 3); Jkke heller kand Segmentet AEB falde til Deels inden for og til Deels uden for CFD, som CHGD, thi ellers maatte en Cirkel kunde skiære en anden i fleere end toe Punkter, nemlig i de Punkter C, G, D, som er u-muligt (10. 3).

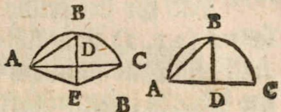
Derfore maae Cirkel-Stykket AEB passe sig paa Cirkel-Stykket CFD, og folgelig ere de (8 Ax.) lige store med hinanden. Hvilket var det, som skulde bevises

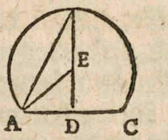
Den 25 Proposition.

Problema.

Naar et Cirkel-Stykke eller et Segment bliver given, at beskrive den Cirkel, hvoraf det er et Stykke.

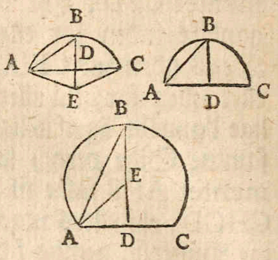
Exempel. Lad ABC være et Cirkel-Stykke. Det begiæres, at beskrive den Cirkel, hvoraf ABC er et Stykke.





Construction. Man deeler AC i toe lige store Deele i D (10. 1). Paa AC udaf Punkten D opreiser man (11. 1) en Perpendicular-Linie DB og drager AB: Saa er Vinklen ABD enten større end Vinklen BAD eller lige saa stor eller mindre. Lad den for det første være større, og da afsættes paa AB og ved Punkten A deri en Vinkel (23. 1) BAE saa stor som den Vinkel ABE, dernæst trækker man BD hen ud til E og drager EC.

Demonstration. Eftersom nu Vinklen ABE er lige saa stor som BAE, saa er AE (6. 1) lige saa stor som EB. Og fordi AD er lige saa stor som DC, og DE er en fælles Side og Vinklen ADE er lige saa stor som EDC, thi de ere begge rette Vinkler, saa er ogsaa AE lige saa stor som EC (efter 4. 1). Men AE er og lige saa stor som EB (som allereede er beviist). Følgelig er og EB lige saa stor som EC, og altsaa ere de tre rette Linier AE, EB, EC lige store: Følgelig skal den Cirkel, som



(3 Post.) beskrives af Middel-Punkten E udi een af de tre Distancer AE, EB, EC, gaae igiennem de øvrige Punkter og følgeligen være den forlangte Cirkel. Man seer og tillige heraf, at Cirkel-Stykket ABC er mindre end en halv Cirkel, fordi Middel-Punkten falder uden for det.

Lad for det andet den Vinkel ABD være lige saa stor som BAD, saa er ogsaa (6. 1) AD lige saa stor som BD. Men AD er ogsaa lige saa stor som DC (efter Constr.): Følgelig er DC lige saa stor som DB, og altsaa ere de tre rette Linier AD, DB, DC, som falde fra D til Omkredsen, lige store, og følgelig er D (9. 3) Middel-Punkten af den forlangte Cirkel, og Segmentet ABC er en halv Cirkel.

Lad for det tredie Vinklen ABD være mindre end BAD, og da afsættes (23. 1) paa AB og ved Punkten A en Vinkel BAE saa stor som ABE; Naar man nu drager en ret Linie fra E til C, saa kand paa samme Maade, som tilforn, bevises, at Punkten E, som er inden for Cirkel-Stykket ABC i den rette Linie BD, er den forlangte Cirkels Middel-Punkt; Og Segmentet ABC er større end en halv Cirkel, fordi Middel-Punkten falder inden for Segmentet.

Altsaa har man beskreven den Cirkel, hvoraf ABC er et Stykke. Hvilket var det, som skulde giøres.

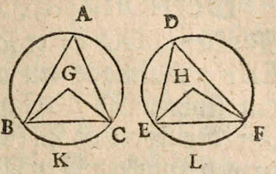
Den 26 Proposition.

Theorema.

Udi lige store Cirkler staae lige store Vinkler paa lige store Cirkel-Buer, enten de staae ved Middel-Punkterne eller ved Omkredserne.

Exem-

Exempel. Lad ABC, DEF være lige store Cirkler og lad Vinklerne BGC, EHF, som ere ved Middel-Punkterne G, H; eller og de Vinkler BAC, EDF, som ere ved Omkredserne, være lige store: Saa siger jeg, at Cirkel-Buerne BKC og ELF, som de lige store Vinkler staae paa, ere ogsaa lige store.



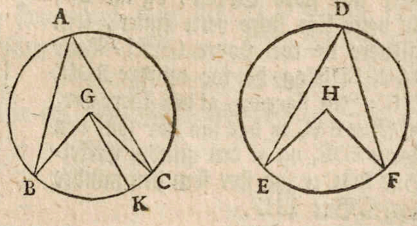
Demonstration. Naar man drager BC, EF, saa faaer man toe Triangler GBC og HEF, udi hvilke (1 Def. 3) de toe Sider GB, GC ere lige saa store som EH, HF (thi Cirklerne ABC, DEF ere lige store efter Hypothesin) og Vinklen BGC er lige saa stor som Vinklen EHF (Hyp.). Følgelig er og (4. 1) BC lige saa stor som EF. Og fordi Vinklen BAC er lige saa stor som Vinklen EDF (efter Hyp.), saa ere Cirkel-Stykkerne BAC, EDF lige dannede (11. Def. 3), og de ere satte paa lige store rette Linier BC, EF: Men Cirkel-Stykker, som ere lige dannede, og satte paa lige store rette Linier, ere lige store (24. 3). Følgelig er Cirkel-Stykket BAC lige saa stort som Cirkel-Stykket EDF. Men den heele Cirkel ABC er lige saa stor som den heele Cirkel DEF (efter Hyp.). Derfore er og (3 Ax.) det øvrige Cirkel-Stykke BKC lige saa stort som det øvrige Cirkel-Stykke ELF; Følgelig er Cirkel-Buen BKC lige saa stor som Cirkel-Buen ELF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 27 Proposition.

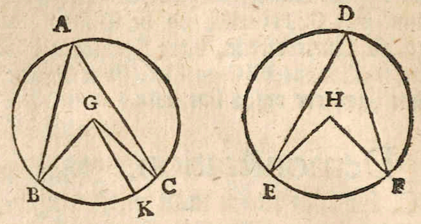
Theorema.

I lige store Cirkler ere de Vinkler lige store, som staae paa lige store Cirkel-Buer, enten de staae ved Middel-Punkterne eller ved Omkredserne.

Exempel. Lad udi de lige store Cirkler ABC, DEF de Vinkler BGC, EHF, som staae ved Middel-Punkterne G, H, eller de Vinkler BAC, EDF, som staae ved Omkredserne, staae paa lige store Cirkel-Buer BC, EF; saa siger jeg, at Vinklen BGC er lige saa stor som Vinklen EHF, og ligeledes Vinklen BAC saa stor som Vinklen EDF.



Demonstration. Hvis Vinklen BGC ey er saa stor som EHF; saa maae een af dem være den større. Lad BGC holdes for at være den større, og sæt (23. 1) paa BG og ved Punkten G en Vinkel BGK, saa stor som EHF: Saa skal Cirkel-Buen BK (26. 3) være lige saa stor som Cirkel-Buen EF. Men



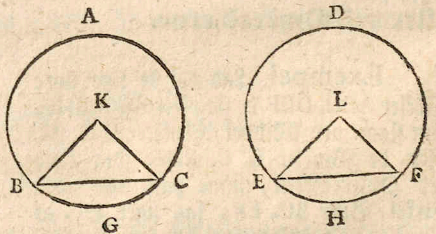
Cirkel-Buen BC er lige saa stor som Cirkel-Buen EF. Følgelig skal Cirkel-Buen BC være lige saa stor som Cirkel-Buen BK, nemlig det heele skal være lige saa stort som en Deel deraf, som er u-mueligt (9 Ax.). Altsaa kand Vinklerne BGC, EHF ikke være af u-lige Størrelse, og følgelig ere de lige store. Men Vinklerne BAC, EDF ere halv saa store som Vinklerne BGC, EHF (20. 3). Følgelig ere og Vinklerne BAC, EDF lige store. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 28 Proposition.

Theorema.

J lige store Cirkler afskiære lige store rette Linier lige store Cirkel-Buer, saa at den større Cirkel-Bue bliver lige saa stor som den større, og den mindre saa stor som den mindre.

Exempel. Lad ABC, DEF være lige store Cirkler, og lad BC, EF være lige store rette Linier, som afskiære de toe større Cirkel-Buer BAC, EDF og de toe mindre BGC, EHF: Jeg siger da, at den større Cirkel-Bue BAC er lige saa stor som den større EDF, og at den mindre Cirkel-Bue BGC er saa stor som den mindre Cirkel-Bue EHF.



Demon-

Demonstration. Naar man (1. 3) søger Middel-Punkterne K, L, og drager de rette Linier KB, KC, LE, LF, saa faaer man toe Triangler KBC, LEF, udi hvilke de toe Sider KB, KC ere lige saa store (1 Def. 3) som EL, LF (thi Cirklerne ABC, DEF ere lige store), og BC er lige saa stor som EF (efter Hyp.). Følgelig er (8. 1) Vinklen BKC lige saa stor som Vinklen ELF, og altsaa er (26. 3) Cirkel-Buen BGC lige saa stor som Cirkel-Buen EHF. Men den heele Cirkel ABC er lige saa stor som den heele DEF; Følgelig er og (3. Ax.) den øvrige Cirkel-Bue BAC lige saa stor som den øvrige EDF. Hvilket var det, som skulde beviises.

Den 29 Proposition.
Theorema.

Udi lige store Cirkler ere de rette Linier lige store, som overspende lige store Cirkel-Buer.

Exempel. Lad ABC, DEF (see den nest foregaaende Figur) være lige store Cirkler, og BGC, EHF lige store Buer af dem, og drag de rette Linier BC, EF: Jeg siger da, at den rette Linie BC er lige saa stor som den rette Linie EF.

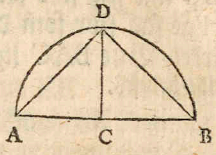
Construction. Søg (1. 3) Middel-Punkterne K, L og drag BK, KC, EL, LF.

Demonstration. Eftersom Cirklerne ABC, EDF ere lige store (efter Hyp.), saa ere BK, KC lige saa store som EL, LF; Og fordi Cirkel-Buen BGC er lige saa stor som Cirkel-Buen EHF, saa ere (27. 3) Vinklerne BKC, ELF lige store. Følgelig er og den rette Linie BC saa stor (4. 1) som EF. Hvilket var det, som skulde beviises.

Den 30 Proposition.

Problema.

At deele en given Cirkel-Bue i toe lige store Deele.



Exempel. Lad ADB være en given Cirkel-Bue: Man skal deele den i toe lige store Deele.

Construction. Man drager den rette Linie AB og deeler den (10. 1) i toe lige store Deele i C. Paa samme AB og fra Punkten C opreises (11. 1) en Perpendicular-Linie CD. Endelig drager man de rette Linier AD og DB.

Demonstration. Fordi nu AC er lige saa stor som CB, og CD er en fælles Side, og Vinklen ACD er lige saa stor som Vinklen BCD; thi begge ere rette Vinkler: Saa er (4. 1) AD lige saa stor som DB. Men lige store rette Linier afskiære lige store Cirkel-Buer (28. 3). Følgelig er Cirkel-Buen AD lige saa stor som Cirkel-Buen DB.

Altsaa er den givne Cirkel-Bue ADB deelt i toe lige store Deele. Hvilket var det, som skulde giøres.

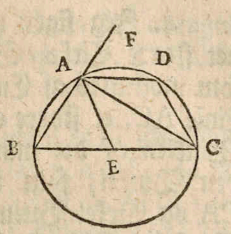
Den 31 Proposition.

Theorema.

I en Cirkel er den Vinkel, som er i en halv Cirkel, en ret Vinkel, men den Vinkel, som er udi et større Cirkel-Stykke, er mindre end en ret Vinkel, og den Vinkel, som er udi et mindre Cirkel-Stykke, er større end en ret Vinkel. Ydermeere er Vinklen af et større Cirkel-Stykke større end en ret Vinkel, og af et mindre, mindre end en ret Vinkel.

Exem-

Exempel. Lad ABC være en Cirkel og BC dens Middel-Linie og E dens Middel-Punkt, og lad de rette Linier BA, AD, DC, AC blive dragne: Saa siger jeg (1) at den Vinkel BAC, som er i halv-Cirklen BADC, er en ret Vinkel, (2) at den Vinkel ABC, der er i Cirkel-Stykket ABC, som er større end en halv Cirkel, er mindre end en ret Vinkel. Og (3) at den Vinkel ADC, som er i Cirkel-Stykket ADC, der er mindre end en halv Cirkel, er større end en ret Vinkel.



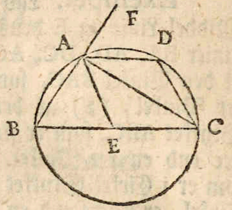
Construction. Drag AE og træk BA ud hen imod F.

Demonstration. Eftersom BE er (15 Def. 1) saa stor som EA, saa er Vinklen EAB lige saa stor (5. 1) som EBA. Og fordi EA er lige saa stor som EC, saa er ogsaa Vinklen EAC lige saa stor som ECA. Følgelig er (2 Ax.) den heele Vinkel BAC lige saa stor som de toe Vinkler ABC, ACB tilsammen. Men den udvendige Vinkel CAF er ogsaa lige saa stor (32. 1) som de samme toe Vinkler ABC, ACB. Følgelig (1 Ax.) ere de Vinkler BAC, CAF lige store, og derfore (10 Def. 1) er enhver af dem en ret Vinkel. Følgelig skal den Vinkel BAC, som er i en halv Cirkel BADC, være en ret Vinkel. Hvilket (1) var at bevise.

2. Og fordi (17. 1) toe Vinkler i en Triangel ere tilsammen mindre end toe rette Vinkler, og BAC er en ret Vinkel, saa er ABC mindre end en ret Vinkel. Altsaa er en Vinkel ABC, der er i et Cirkel-Stykke ABC, som er større end en halv Cirkel, mindre end en ret Vinkel. Hvilket (2) var at bevise

3. Fordi fremdeeles Fiirkanten BADC er indskreven i Cirklen ABC, og de imodsatte Vinkler i Fiirkanter, som ere indskrevne i Cirkler, ere (22. 3) saa store som toe rette Vinkler, saa ere de Vinkler ABC, ADC tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Men ABC er mindre end en ret Vinkel, som allereede er beviist. Følgelig er den øvrige ADC større end en ret Vinkel. Altsaa er en Vinkel ADC, som er i et Cirkel-Stykke ADC, der er mindre end en halv Cirkel, større end en ret Vinkel. Hvilket (3) var at bevise.

4. Jeg

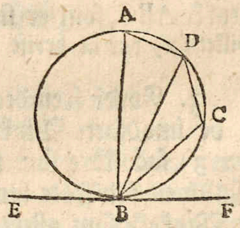


4. Jeg siger ydermeere (1) at Vinklen af det større Cirkel-Stykke, nemlig den Vinkel, som indsluttes af Cirkel-Buen BA og den rette Linie AC, er større end en ret Vinkel, og (2) at Vinklen af det mindre Cirkel-Stykke, nemlig den Vinkel, som indsluttes af den rette Linie CA og Cirkel-Buen AD, er mindre end en ret Vinkel. Thi eftersom den Vinkel, som er indsluttet af de rette Linier CA, AB, er en ret Vinkel (som tilforn blev beviist), saa er det klart, at den Vinkel, som er indsluttet af Cirkel-Buen BA og den rette Linie AC, er større end en ret Vinkel. Og fordi den Vinkel CAF er en ret Vinkel, saa er den Vinkel, som er indsluttet af den rette Linie CA og Cirkel-Buen AD, mindre end en ret Vinkel. Hvilket (4) var at bevise.

Den 32 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie rører en Cirkel og fra Rørings-Punkten bliver dragen en ret Linie, som skiærer Cirklen: Saa skal de Vinkler, som denne giør med den rørende Linie, være lige saa store som de Vinkler, der ere udi Cirklens Vexel-Stykker.



Exempel. Lad den rette Linie EBF røre Cirklen ABC i Punkten B, og fra B lad en ret Linie BD blive dragen, som skiærer Cirklen i de toe Stykker eller Segmenter BAD og DCB: Saa siger jeg, at de Vinkler EBD, DBF, som DB giør med EF, ere lige saa store, som de Vinkler, der ere udi Cirklens Vexel-Stykker, det er, at den Vinkel EBD er lige saa stor som en Vinkel, der beskrives udi Cirkel-Stykket DCB, og at Vinklen DBF er lige saa stor som en Vinkel, der beskrives i Cirkel-Stykket BAD.

Construction. Paa den rette Linie EF og fra Punkten B opreises

reises (11. 1) en Perpendicular-Linie BA. I Cirkel-Buen DB antages en Punkt C efter Behag. Endelig drages de rette Linier AD, DC, CB.

Demonstration. Efterdi nu EF rører Cirklen ABC i Punkten B, og udaf B er dragen en ret Linie BA perpendicular paa EF, saa er (19. 3) Cirklens Middel-Punkt i BA. Følgelig er Vinklen ADB i en halv Cirkel ADCB, og er derfore (31. 3) en ret Vinkel; Altsaa ere (3 Cor. 32. 1) de øvrige Vinkler DAB, ABD tilsammen saa store som en ret Vinkel. Men ABF er ogsaa en ret Vinkel (efter Constr.): Følgelig er Vinklen ABF lige saa stor som de toe Vinkler DAB, ABD tilsammen. Derfore, dersom den fælles Vinkel ABD tages fra dem, saa er Vinklen DBF lige saa stor som den Vinkel DAB, der er i Cirkel-Stykket BAD.

Fordi fremdeeles Fiirkanten ADCB er indskreven i Cirklen, saa ere (22. 3) dens imodsatte Vinkler DCB, DAB tilsammen saa store som toe rette Vinkler. Følgelig ere de Vinkler EBD, DBF, som ogsaa ere (13. 1) tilsammen saa store som toe rette Vinkler, lige saa store som de toe Vinkler DAB, DCB tilsammen. Men af disse er DBF lige saa stor som DAB (som tilforn blev beviist). Derfore er (3 Ax.) den Vinkel EBD lige saa stor som den Vinkel DCB, der er i Cirkel-Stykket DCB.

Heraf er det klart, at de Vinkler EBD, DBF ere saa store som Vinklerne i Cirklens Vexel-Stykker. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

Det Cirkel-Stykke BAD kaldes Vexel-Stykket alleeneste i henseende til den Vinkel DBF, som staaer paa den anden Side af den skiærende Linie BD. Ligeledes bliver det andet Cirkel-Stykke DCB kaldet Vexel-Stykket i henseende til den Vinkel EBD.

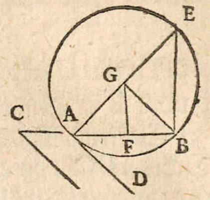
Den 33 Proposition.

Problema.

Paa en given ret Linie at beskrive et Cirkel-Stykke, som indslutter en Vinkel, der er saa stor som en given ret-lined Vinkel.

 Exem-

Exempel. Lad AB være den givne rette Linie, og C den givne ret-linede Vinkel; Man skal beskrive paa AB et Cirkel-Stykke, som indslutter en Vinkel af samme Størrelse, som den givne Vinkel C. Nu er C enten en spids eller en ret eller en stumpet Vinkel.

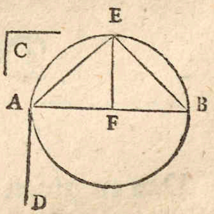


1. Lad C være en spids Vinkel.

Construction. Paa AB udi Punkten A afsættes (23. 1) en Vinkel BAD saa stor som Vinklen C. Dernest opreises (11. 1) paa AD fra A en Perpendicular-Linie AE. Siden afsættes paa AB udi Punkten B en Vinkel ABG saa stor som Vinklen GAB, og den rette Linie BG drages ud, indtil den skiærer AE udi G. Derefter beskrives udaf Middel-Punkten G i Længden GA en Cirkel ABE. Endelig drages den rette Linie EB.

Demonstration. Fordi Vinklerne ABG, GAB ere lige store, saa ere ogsaa (6. 1) Siderne GA og GB lige store; og derfore skal Cirklen ABE, som er beskreven af Middel-Punkten G udi Længden GA, ogsaa gaae igiennem Punkten B. Heraf følger da, at den rette Linie AB skiærer Cirklen ABE udi Punkterne A og B. Men den rette Linie AD rører bemeldte Cirkel ABE (Cor. 16. 3), thi den staaer perpendicular paa den yderste Ende af Middel-Linien AE. Følgelig er Vinklen BAD (32. 3) lige saa stor som Vinklen AEB, som er i Cirkel-Stykket BEA. Men Vinklen BAD er lige saa stor som C (efter Constr.). Følgelig er og Vinklen AEB lige saa stor som C. Og er da paa den rette Linie AB beskrevet et Cirkel-Stykke BEA, som fatter en Vinkel, der er saa stor som den givne Spids-Vinkel C.

2. Lad den givne Vinkel C være en ret Vinkel.

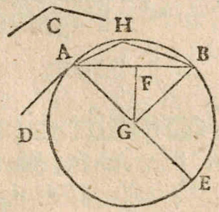


Construction. Paa AB og ved Punkten A deri afsættes en Vinkel DAB saa stor som C (23. 1). Dernest deeles AB i toe lige store Deele i F (10. 1) og af Middel-Punkten F udi Distancen AF beskrives en Cirkel ABE.

Demon-

Demonstration. Efterdi AD er perpendicular paa den yderste Ende af Middel-Linien AB: saa rører AD Cirklen ABE (Cor. 16. 3). Følgelig (32. 1) er Vinklen DAB lige saa stor som Vinklen i Cirkel-Stykket AEB. Da nu Vinklen C er lige saa stor som DAB. Saa fatter det beskrevne Cirkel-Stykke AEB en Vinkel af samme Størrelse, som den givne rette Vinkel C.

3 Lad C være en stumpet Vinkel.



Construction. Paa AB og i Punkten A afsættes (23. 1) en Vinkel BAD saa stor som C. Derneſt opreiser man paa AD udaf A en Perpendicular-Linie AE (11. 1). Siden afsætter man paa AB og i Punkten B en Vinkel ABG, saa stor som Vinklen BAG; saa er (6. 1) den rette Linie AG lige saa stor som GB, og følgelig skal den Cirkel, som bliver beskreven af Middel-Punkten G udi Distancen GA eller GB, gaae igiennem Punkterne A og B. Beskriv altsaa en Cirkel BAE: saa skal AHB være det forlangte Cirkel-Stykke.

Demonstration. Eftersom DA er perpendicular paa den yderste Ende A af Middel-Linien AE, saa skal DA røre Cirklen BAE (efter Cor. 16. 3). Men AB skiærer Cirklen fra Rørings-Punkten A; Følgelig er (32. 3) Vinklen DAB lige saa stor som Vinklen AHB; Men DAB er lige saa stor som Vinklen C. Følgelig er ogsaa Vinklen AHB lige saa stor som C.

Altsaa har man beskreven paa AB et Cirkel-Stykke AHB, som indslutter en Vinkel, saa stor som den givne stumpet Vinkel C. Hvilket var det, som skulde giøres.

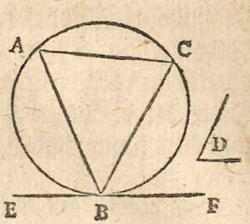
Den 34 Proposition.

Problema.

Fra en given Cirkel at skiære et Stykke, som indslutter en Vinkel, der er saa stor, som en given ret-lined Vinkel.

P 2 Exem-

Exempel. Lad ABC være den givne Cirkel, og D den givne Vinkel: Man skal skiære et Stykke fra Cirklen ABC, som indslutter en Vinkel, der er saa stor som D.



Construction. Man drager (17. 3) en ret Linie EF, som rører Cirklen i B. Paa BF og i Punkten B afsættes en Vinkel CBF saa stor som D (23. 1).

Demonstration. Eftersom nu EF rører Cirklen ABC, og BC, som er dragen fra Rørings-Punkten B, skiærer samme Cirkel, saa er (32. 3) Vinklen CBF lige saa stor som den Vinkel BAC, der er i Cirklens Vexel-Stykke BAC. Da nu Vinklen CBF er saa stor som D (efter Constr.); saa er ogsaa (1. Ax.) den Vinkel BAC saa stor som D.

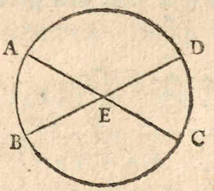
Derfore er da fra Cirklen ABC skaaret et Stykke BAC, som indslutter en Vinkel saa stor som den givne Vinkel D. Hvilket var det, som skulde giøres.

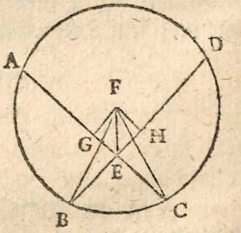
Den 35 Proposition.

Theorema.

Dersom i en Cirkel toe rette Linier skiære hverandre, saa skal den Rectangel, som er befattet under Stykkerne af den eene, være lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under Stykkerne af den anden.

Exempel. Lad i Cirklen ABCD toe rette Linier AC, BD skiære hinanden i Punkten E: Saa siger jeg, at Rectanglen, som er befattet under AE, EC, er lige saa stor som Rectanglen, der er befattet under BE, ED.





Demon-

Demonstration. Dersom de rette Linier AC, BD gaae igiennem Middel-Punkten, saa at E er Middel-Punkten af Cirklen ABCD, da er det klart, at Rectanglen under AE, EC er lige saa stor som Rectanglen under BE, ED, thi da ere AE, EC, BE, ED lige store.

Men hvis AC, BD ikke gaae igiennem Middel-Punkten, da søger man Cirklens Middel-Punkt F (1. 3), og derfra drages Perpendicular-Linier FG, FH ned paa AC, BD (12. 1). Endelig drager man de rette Linier FB, FE, FC.

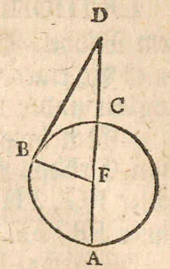
Eftersom FG er dragen fra Middel-Punkten perpendicular paa AC, saa deeler den (3. 3) AC i toe lige store Deele i G. Og fordi den rette Linie AC er skaaren i toe lige store Deele i G og i toe Deele af ulige Størrelse i E; Saa er (5. 2) Rectanglen under AE, EC tillige med Qvadraten af GE saa stor som Qvadraten af GC. Læg Qvadraten af GF til dem: saa er Rectanglen under AE, EC tillige med Qvadraterne af GE, GF, det er (47. 1), tillige med Qvadraten af FE lige saa stor som Qvadraterne af GC, GF, det er (47. 1) som Qvadraten af FC, fordi Vinklen FGC er en ret Vinkel. Paa samme Maade bevises ogsaa, at Rectanglen under BE, ED tillige med Qvadraten af FE er lige saa stor som Qvadraten af FB. Men Qvadraten af FB er lige saa stor som Qvadraten af FC, fordi FB er (15 Def. 1) saa stor som FC. Følgelig er Rectanglen under AE, EC tillige med Qvadraten af FE lige saa stor som Rectanglen under BE, ED tillige med Qvadraten af FE. Naar man altsaa tager Qvadraten af FE fra dem, saa er Rectanglen under AE, EC lige saa stor som Rectanglen under BE, ED. *Hvilket var det, som skulde bevises.*

Den 36 Proposition.

Theorema.

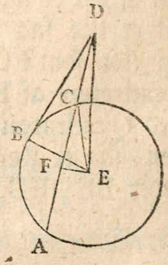
Dersom der antages en Punkt uden for en Cirkel, og der falde fra samme Punkt toe rette Linier, af hvilke den eene skiærer, men den anden rører Cirklen; saa skal den Rectangel, som er befattet under den heele skiærende Linie og det Stykke deraf, som er uden for Cirklen imellem Punkten og Circumferentzen, være lige saa stor som Qvadraten, der bliver beskreven paa den rørende Linie.

Exempel. Lad uden for den Cirkel ACB en Punkt D blive antagen efter Behag, og lad toe rette Linier DA, DB saaledes blive dragne fra Punkten D, at den eene af dem DA skiærer, men den anden DB rører Cirklen ACB: Saa siger jeg, at Rectanglen under DA, DC er lige saa stor som Qvadraten af DB.



Demonstration. Lad for det første DA gaae igiennem Middel-Punkten F, og drag BF, saa er FBD (18. 3) en ret Vinkel. Fordi nu AC er skaaren i toe lige store Deele i F, og til samme AC er sat en anden ret Linie DC, saa er (6. 2) Rectanglen under AD, DC tillige med Qvadraten af FC lige saa stor som Qvadraten af DF. Men Qvadraterne af DB, BF ere ogsaa (47. 1) lige saa store som Qvadraten af DF. Følgelig er Rectanglen under DA, DC tillige med Qvadraten af FC lige saa stor som Qvadraterne af DB, FB. Men nu er Qvadraten af FC lige saa stor som Qvadraten af FB, fordi FC og FB ere lige store. Følgelig er (3 Ax.) Rectanglen under DA, DC lige saa stor som Qvadraten af DB.

2. Lad DA ikke gaae igiennem Middel-Punkten E og drag fra E paa AC en Perpendicular-Linie EF og drag de rette Linier EC, EB, ED.



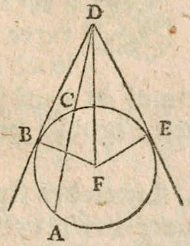
Eftersom EF er dragen fra Middel-Punkten E og er perpendicular paa AC, saa er AC (3. 3) deelt i toe lige store Deele i F, og dertil er sat en anden ret Linie DC; Derfore er (6. 2) Rectanglen under DA, DC tillige med Qvadraten af CF lige saa stor som Qvadraten af DF. Læg Qvadraten af FE til; saa er Rectanglen under AD, DC tillige med Qvadraterne af CF, FE, det er (47. 1), tillige med Qvadraten af CE lige saa stor som Qvadraterne af DF, FE, det er (47. 1), som Qvadraten af DE. Men Qvadraten af DE er (47. 1) saa stor som Qvadraterne af DB, BE, fordi Vinklen DBE er (18. 3) en ret Vinkel. Følgelig er Rectanglen under DA, DC tillige med Qvadraten af CE lige saa stor som Qvadraterne af DB, BE. Men Qvadraten af CE er lige saa stor som Qvadraten af BE. Følgelig er (3 Ax.) Rectanglen under DA, DC lige saa stor som Qvadraten af DB. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Den 37 Proposition.
Theorema.

Dersom der antages en Punkt uden for en Cirkel, og der falder fra samme Punkt toe rette Linier, hvoraf den eene skiærer Cirklen, men den anden falder kuns uden paa den, og dersom fremdeeles Rectanglen under den heele skiærende Linie og det Stykke deraf, som er uden for Cirklen, er saa stor som Qvadraten af den anden rette Linie: saa skal denne rette Linie røre Cirklen.

Exempel. Lad uden for Cirklen ABE en Punkt D blive antagen efter Behag, og lad fra samme Punkt toe rette Linier DA, DB blive dragne saaledes, at den eene af dem DA skiærer Cirklen, men den anden DB falder uden paa den, og lad Rectanglen under DA, DC være saa stor som Qvadraten af DB: saa siger jeg, at DB rører Cirklen.



Construction. Drag (17. 1) fra Punkten D en ret Linie DE som rører Cirklen ABE i Punkten E og søg (1. 3) Cirklens Centrum F, og drag FB, FD, FE.

Demonstration. Fordi DE rører Cirklen, men DA skiærer den, saa er Rectanglen under DA, DC (36. 3) lige saa stor som Qvadraten af DE. Men Rectanglen under DA, DC er ogsaa saa stor som Qvadraten af DB (efter Hyp.). Følgelig er Qvadraten af DE lige saa stor som Qvadraten af DB, og altsaa er den rette Linie DE lige saa stor som DB. Men den rette Linie EF er ogsaa lige saa stor som BF. Altsaa ere de toe Sider DE, EF lige saa store som de toe Sider DB, BF, men DF er en fælles Side. Følgelig er (8. 1) Vinklen DEF lige saa stor som Vinklen DBF. Men DEF er (18. 3) en ret Vinkel; fordi FE er dragen fra Middel-Punkten F til Rørings-Punkten E. Følgelig er og DBF en ret Vinkel; og dersom BF bliver længere uddragen, saa er den Cirklens Middel-Linie. Men en ret Linie, som er dragen perpendicular fra Middel-Liniens yderste Ende, rører Cirklen (16. 3) Følgelig rører den rette Linie DB Cirklen ABE. Hvilket var det, som skulde bevises.

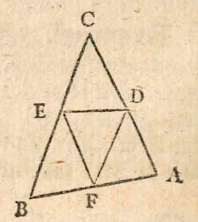
Euclidis

EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Fierde Bog.

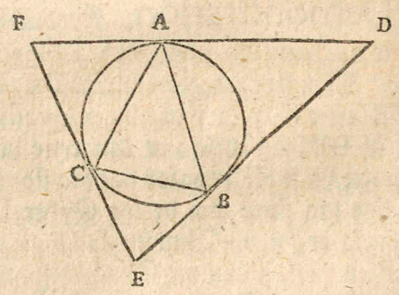
Definitiones (Forklaringer.)

1. En ret-lined Figur DEF siges at være indskreven i en anden ret-lined Figur ACB, naar alle Vinklerne af den indskrevne røre alle Siderne af den Figur, i hvilken den er indskreven.



2. Ligeledes siges en ret-lined Figur ACB at være beskreven omkring en anden ret-lined Figur DEF, naar alle Siderne af den omskrevne Figur røre alle Vinklerne af den Figur, om hvilken den er beskreven.

3. En ret-lined Figur ABC siges at være indskreven i en Cirkel ABC, naar alle Vinkler af den indskrevne Figur røre Cirklens Circumferentz eller Omkreds.



4. En ret-lined Figur DEF siges at være beskreven omkring en Cirkel ABC, naar alle Sider af den omskrevne Figur røre Cirklens Circumferentz.

5. Ligeledes siges en Cirkel ABC at være indskreven i en ret-lined

lined Figur DEF, naar Cirklens Circumferentz rører alle Siderne af den Figur, i hvilken Cirklen er indskreven.

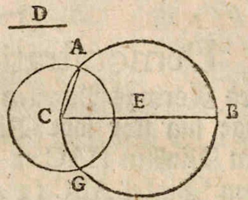
6. En Cirkel ABC siges at være beskreven omkring en ret-lined Figur ABC, naar Cirklens Circumferentz rører alle Vinkler af den Figur, som Cirklen er beskreven omkring.

7. En ret Linie siges at være afpasset i en Cirkel, naar Enderne deraf ere i Cirklens Circumferentz.

Den I Proposition.

Problema.

I en given Cirkel at afpasse en ret Linie, som er saa stor som en given ret Linie, der ey bør være større end den givne Cirkels Middel-Linie.



Exempel. Lad ABC være den givne Cirkel og D den givne rette Linie, som ey bør være større end Cirklens Middel-Linie (efter 15. 3). Man skal afpasse i Cirklen ABC en ret Linie, som er saa stor som D.

Construction. Drag Cirklens Middel-Linie CB: I fald nu CB er lige saa stor som D, saa er det skeet, som man forlangte. Thi saa er der afpasset (7. Def. 4) en ret Linie CB i Cirklen ABC, som er saa stor som D. Men hvis ikke, saa er CB større end D (efter Hyp.). Gior derfor (3. 1) CE saa stor som D, og beskriv af Middel-Punkten C udi Længden CE en Cirkel AEG og drag den rette Linie CA.

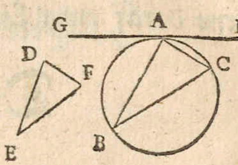
Demonstration. Fordi nu C er Middel-Punkten af Cirklen AEG, saa er CA saa stor som CE. Men CE er saa stor som D. Folgelig er og AC saa stor som D, og den er afpasset i Cirklen ABC (7. Def. 4). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 2 Proposition.

Problema.

I en given Cirkel at indskrive en Triangel, som har saa store Vinkler, som en given Triangel.

Exempel. Lad ABC være en given Cirkel og DEF en given Triangel: I denne Cirkel skal man indskrive en Triangel, som har lige saa store Vinkler som Trianglen DEF.



Construction. Man drager (17. 3) en ret Linie GH, som rører Cirklen i en Punkt A. Derneſt afsættes (23. 1) paa HA udi Punkten A en Vinkel HAC saa stor som Vinklen DEF; ligeledes afsættes paa GA udi Punkten A en Vinkel GAB saa stor som EFD. Endelig drages den rette Linie BC.

Demonstration. Eftersom GH rører Cirklen og AC er dragen fra Rørings-Punkten A og skiærer Cirklen, saa er (32. 3) Vinklen HAC lige saa stor som Vinklen ABC, som er i Cirkel-Stykket ABC. Da nu Vinklen HAC er saa stor som DEF (efter Constr.); saa er ogsaa den Vinkel ABC (1 Ax.) saa stor som DEF. Af samme Aarsag er ogsaa Vinklen ACB saa stor som EFD. Følgelig er og den øvrige Vinkel BAC saa stor som den øvrige Vinkel EDF (2 Coroll. 32. 1). Altsaa har Trianglen ABC saa store Vinkler som Trianglen DEF og er indskreven (3. Def. 4) i Cirklen ABC. Hvilket var det, som skulde giøres.

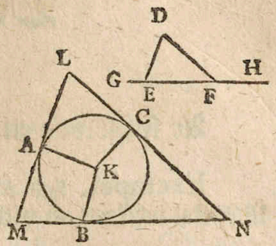
Den 3 Proposition.

Problema.

Omkring en given Cirkel at beskrive en Triangel, som har saa store Vinkler, som en given Triangel.

Exem-

Exempel. Lad ABC være en given Cirkel og DEF en given Triangel: Man skal beskrive en Triangel omkring Cirklen ABC, som har saa store Vinkler som Triangelen DEF.



Construction. Man drager EF længere ud paa begge Sider til G og H (2 Post.). Dernest søger man (1. 3) Cirklens Middel-Punkt K og drager en ret Linie KB efter Behag. Siden afsætter man (23. 1) paa KB og ved Punkten K en Vinkel BKA saa stor som Vinklen GED og en anden Vinkel BKC saa stor som DFH. Endelig drager man (17. 3) rette Linier MAL, LCN, NBM, som røre Cirklen ABC i de Punkter A, B, C.

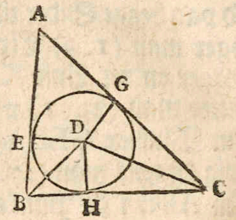
Demonstration. Fordi nu de rette Linier KA, KB, KC falde fra Middel-Punkten K til Rørings-Punkterne A, B, C; Saa ere (18. 3) de Vinkler ved A, B, C rette Vinkler. Og fordi de fire Vinkler i Fiirkanten AMBK ere saa store (32. 1) som fire rette Vinkler (thi enhver Fiirkant kand ved en Tver-Linie deeles i toe Triangler, og i enhver af disse Triangler ere Vinklerne tilsammen saa store som toe rette Vinkler), og toe af dem, nemlig de Vinkler MAK, MBK ere rette Vinkler, saa ere de toe øvrige Vinkler AMB, AKB tilsammen saa store som toe rette Vinkler: Men de Vinkler GED, DEF ere og (13. 1) saa store som toe rette Vinkler. Følgelig ere de Vinkler AMB, AKB saa store som de Vinkler GED, DEF, og af disse er Vinklen AKB saa stor som GED (efter Constr.). Derfore er den øvrige Vinkel AMB saa stor (3 Ax.) som den øvrige DEF. Paa samme Maade bevises ogsaa at Vinklen LNM er saa stor som Vinklen DFE. Følgelig er ogsaa den øvrige Vinkel MLN saa stor (2 Cor. 32. 1) som den øvrige Vinkel EDF. Altsaa har Triangelen LMN saa store Vinkler som Triangelen DEF og er (4 Def. 4) beskreven omkring den givne Cirkel ABC. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 4 Proposition.

Problema.

At indskrive en Cirkel i en given Triangel.

Exempel. Lad ABC være en given Triangel: Man skal indskrive en Cirkel i den givne Triangel ABC.



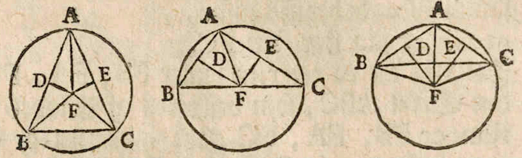
Construction. Man deeler (9.1) toe Vinkler, hvilke man vil, saasom de toe Vinkler ABC, ACB i toe lige store Deele ved de rette Linier BD, CD, som drages ud, indtil de stode sammen i D; fra D drages Perpendicular-Linier DE, DG, DH ned paa AB, AC, CB (12. 1).

Demonstration. Eftersom Vinklen ABD er saa stor som den Vinkel CBD (thi den Vinkel ABC er deelt i toe lige store Deele ved BD,) og Vinklen DEB er saa stor som DHB (10 Ax.), thi de ere begge rette; saa ere de toe Vinkler EBD, DEB udi Trianglen EBD saa store som de toe Vinkler DBH, BHD udi Trianglen DBH; Ydermeere er den Side DB, som staaer imod een af de lige store Vinkler, tilfælles for begge Trianglerne: Folgelig er (26. 1) Siden DE saa stor som Siden DH. Paa samme Maade bevises ogsaa, at DG er saa stor som DH; folgelig ere de tre rette Linier DE, DH, DG lige store. Heraf folger da, at dersom man beskriver en Cirkel EGH af Middel-Punkten D udi een af de Distancer DE, DG, DH; saa skal samme Cirkel gaae igiennem Punkterne E, G, H; Og fordi Trianglens Sider AB, BC, CA staae perpendicular paa Enderne E, G, H af de rette Linier ED, DH, DG, som ere Cirklens halve Middel-Linier, saa skal samme Sider AB, BC, CA røre bemeldte Cirkel EHG (efter Coroll. 16. 3). Derfore skal da Cirklen EHG være indskreven i den givne Triangel ABC (5. Def. 4). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 5 Proposition.
Problema.

At beskrive en Cirkel omkring en given Triangel.

Exempel. Lad ABC være en given Triangel: det begiæres, at man skal beskrive en Cirkel omkring Trianglen ABC.



Construction.

Man deeler (10. 1) toe Sider AB, AC i toe lige store Deele i D, E. Paa samme Linier AB, AC og udaf Deelings-Punkterne D og E opreises (11. 1) Perpendicular-Linier DF, FE; saa skal den Punkt F, hvor FD, FE stode sammen, enten være inden for Trianglen ABC eller i den rette Linie BC eller uden for Trianglen.

1. Lad den være inden for Trianglen og drag FA, FB, FC.

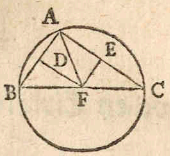
Demonstration. Eftersom nu AD er saa stor som DB (efter Constr.) og DF er tilfælles for de toe Triangler ADF og BDF og giør rette Vinkler ved D (efter Constr.); saa er (4. 1) FA saa stor som FB. Af samme Aarsag er og FC saa stor som FA: Folgelig ere de tre rette Linier FB, FA, FC lige store. Derfore skal den Cirkel, som beskrives af Middel-Punkten F udi een af de Distancer FB, FA, FC gaae igiennem A, B, C, og folgelig være beskreven omkring Trianglen ABC (6. Def. 4).

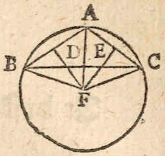
2. Lad Punkten F være i den rette Linie BC, saa kand paa samme Maade, som tilforn, bevises, at F er Middel-Punkten af den Cirkel ABC, som man vil beskrive omkring Trianglen ABC.

3. Lad Punkten F være uden for Trianglen ABC og drag FA, FB, FC.

 Fordi

Fordi nu AD er saa stor som DB (efter Constr.), og DB er tilfælles for begge Trianglerne ADF, BDF, og gior rette Vinkler ved D (efter Constr.), saa er (4. 1) FA saa stor som FB. Paa samme Maade bevises ogsaa, at AF er saa stor som FC.





Følgelig ere de tre rette Linier FB, FA, FC lige store. Derfore skal da den Cirkel ABC, som beskrives af Middel-Punkten F udi een af de Distancer FB, FA, FC gaae igiennem de Punkter B, A, C, og altsaa være beskreven (6 Def. 4) omkring Trianglen ABC. Hvilket var det, som skulde giøres.

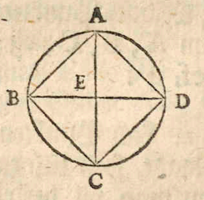
Corollarium.

Af denne og den 31 Proposition i den 3 Bog følger, at, dersom Trianglen ABC er spits-vinkelt, saa falder Cirklens Middel-Punkt F inden for Trianglen; og dersom den er ret-vinkelt, saa er Middel-Punkten i den Side BC, som staaer imod den rette Vinkel; og dersom den er stump-vinkelt, saa falder Middel-Punkten uden for Trianglen.

Den 6 Proposition.

Problema.

At indskrive en Qvadrat i en given Cirkel.



Exempel. Lad ABCD være en given Cirkel: Det begiæres, at indskrive en Qvadrat i Cirklen ABCD.

Construction. Man drager (11. 1) udi Cirklen ABCD toe Diametrer AC, BD saaledes, at de giøre rette Vinkler omkring Middel-Punkten E; derneſt drager man de rette Linier AB, BC, CD, DA.

Demon-

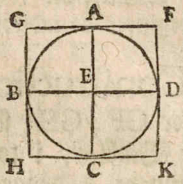
Demonstration. Fordi Vinklerne ved E ere lige store (10. Ax.), saa ere og de Cirkel-Buer AB, BC, CD, DA, som bemeldte Vinkler staae paa, lige store (26. 3), og følgelig ere ogsaa de rette Linier AB, BC, CD, DA, som overspende de lige store Cirkel-Buer, lige store (29. 3): Derfore har da Fiirkanten ABCD lige store Sider. Og fordi BD er en Diameter, saa er BAD en halv Cirkel (18. Def. 1): Følgelig er Vinklen BAD en ret Vinkel (31. 3). Af samme Aarsag ere de øvrige Vinkler ADC, DCB, CBA rette Vinkler. Følgelig er ABCD en Qvadrat (30. Def. 1) og den er indskreven i Cirklen ABCD (3 Def. 4). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 7 Proposition.

Problema.

At beskrive en Qvadrat omkring en given Cirkel.

Exempel. Lad ABCD være en given Cirkel: det begiæres at beskrive en Qvadrat omkring Cirklen ABCD.

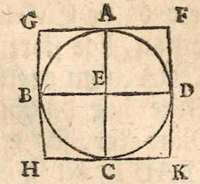


Construction. Man drager (11. 1) tvende Diametrer AC, BD, saaledes, at de giøre rette Vinkler ved Middel-Punkten E. Dernæst drager man (17. 3) rette Linier FG, GH, HK, KF, som røre Cirklen ABCD i de Punkter A, B, C, D.

Demonstration. Efterdi EA, EB, EC, ED falde fra Middel-Punkten E til Rørings-Punkterne A, B, C, D, saa skal (18. 3) Vinklerne ved samme Punkter A, B, C, D være rette Vinkler. Efterdi nu de Vinkler AEB, EBG ere toe rette Vinkler, saa er den rette Linie GH parallel (28. 1) med AC. Af samme Aarsag er og FK parallel med AC: Følgelig er GH (30. 1) parallel med FK. Paa samme Maade kand man bevise, at GF og HK ere Parallele med hverandre. Altsaa ere GK, GC, AK, FB, BK Parallelogrammer: og følgelig er GF saa

stor

stor som HK, og GH saa stor som FK (34. 1). Og fordi AC, BD ere lige store, og GF, HK ere hver i sær saa store som BD, og ligeledes GH, FK ere hver i sær saa store som AC, saa ere de fire rette Lininer GH, HK, KF, FG i Fiirkanten GHKF lige store og Vinklerne F, G, H, K ere rette, fordi de ere (34. 1) saa store som deres imodsatte Vinkler, som ere omkring Punkten E. Altsaa er GHKF en Qvadrat og er beskreven omkring Cirklen ABCD. Hvilket var det, som skulde giøres.

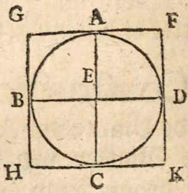


Den 8 Proposition.

Problema.

At indskrive en Cirkel i en given Qvadrat.

Exempel. Lad GHKF være en given Qvadrat: det begiæres at indskrive en Cirkel i Qvadraten GHKF.



Construction. Man deeler (10. 1) toe Sider GF, GH, som indslutte een af Qvadratens Vinkler, i toe lige store Deele i A og B; Igiennem A drager man (31. 1) AC Parallel med GH eller med FK, og igiennem B drager man BD Parallel med GF eller med HK.

Demonstration. Af Constructionen seer man, at GE, AD, DC, CB ere Parallelogrammer; følgelig ere (34. 1) CE, EA, BE, ED hver i sær saa store som deres imodsatte Sider HB, BG, GA, AF (34. 1). Men HB, BG, GA, AF ere lige store, thi de rette Linier GH, GF ere lige store, og de ere ogsaa deelte i toe lige store Deele i Punkterne B og A; følgelig ere og CE, EB, EA, ED lige store. Derfore skal den Cirkel ABCD, som man beskriver af E udi een af de Distancer EA, EB, EC, ED gaae igiennem Punkterne A, B, C, D. Og fordi Vinklerne ved

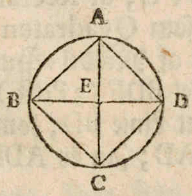
ved A, B, C, D ere rette, saa skal samme Cirkel ogsaa røre Siderne GH, HK, KF, FG (Cor. 16. 3) og følgelig være indskreven i Qvadraten GHKF (5 Def. 4). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 9 Proposition.

Problema.

At beskrive en Cirkel omkring en given Qvadrat.

Exempel. Lad ABCD være en given Qvadrat: det begiæres at beskrive en Cirkel omkring Qvadraten ABCD.

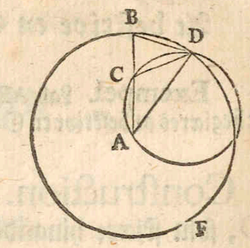


Construction. Drag Tver-Linierne AC, BD, som skiære hinanden i E.

Demonstration. Fordi AB er saa stor som AD (30 Def. 1), og AC er en fælles Side til de toe Triangler ABC, ADC, og Grund-Linien BC er saa stor som DC, saa er (8. 1) Vinklen BAC lige saa stor som Vinklen CAD, og altsaa er Vinklen BAD deelt i toe lige store Deele ved den rette Linie AC. Ligeledes kand bevises, at Vinklerne ADC, DCB, CBA ere deelte i toe lige store Deele ved de rette Linier AC, BD. Efterdi nu Vinklerne DAB, ABC ere lige store (thi de ere begge rette) og EAB, EBA ere de halve Deele af dem; saa ere ogsaa (7 Ax.) Vinklerne EAB, EBA lige store; følgelig er (6. 1) Siden EA lige saa stor som Siden EB. Paa samme Maade bevises ogsaa, at ED er lige saa stor som EA, og EC saa stor som EB: Følgelig ere de fire rette Linier EA, EB, EC, ED lige store. Derfore skal den Cirkel, som beskrives af Middel-Punkten E udi een af de Distancer EA, EB, EC, ED, gaae igiennem de Punkter A, B, C, D, og altsaa være beskreven omkring Qvadraten ABCD (6 Def. 3). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 10 Proposition.
Problema.

At beskrive en lige-beened Triangel, udi hvilken enhver af de tvende Vinkler, som ere inden ved Grund-Linien, er dobbelt saa stor som den tredie Vinkel.



Construction. Man antager efter Behag en ret Linie AB, og skiærer den (11. 2) saaledes i C, at Rectanglen under AB, BC er saa stor som Qvadraten af AC. Derneſt beskriver man af Middel-Punkten A udi Længden AB en Cirkel BDF (3 Post.); og deri afpasser man (1. 4) en ret Linie BD, som er saa stor som AC og drager AD; saa er ADB den forlangte Triangel.

Demonstration. For at bevise dette, saa drager man den rette Linie CD, og beskriver (5. 4) omkring Trianglen ACD en Cirkel DAC. Eftersom nu Punkten B er uden for Cirklen ADC og fra samme Punkt B falde toe rette Linier BA, BD, hvoraf BA skiærer Cirklen ADC, men BD falder uden paa den, og fordi fremdeeles Rectanglen under BA, BC er lige saa stor som Qvadraten af BD (thi den er saa stor (Constr.) som Qvadraten af AC, og AC er saa stor som som BD), saa skal (37. 3) den rette Linie BD røre Cirklen ADC. Da nu den rette Linie DC er dragen fra Rørings-Punkten D og skiærer Cirklen ADC; saa er Vinklen BDC lige saa stor som Vinklen DAC udi Cirklens Vexel-Stykke CAD (32. 3). Altsaa, naar den Vinkel CDA lægges til enhver af dem, saa er (2 Ax.) den heele Vinkel BDA lige saa stor som de tvende Vinkler CDA, DAC tilsammen. Men nu er ligeledes (32. 1) den udvendige Vinkel BCD lige saa stor som de toe Vinkler CDA, DAC; følgelig er Vinklen BDA lige saa stor som BCD. Efterdi nu Vinklen BDA er (5. 1) lige saa stor som DBA, fordi AB (15. 1) er lige saa stor som AD; saa er og Vinklen DBA lige saa stor som BCD. Altsaa ere de tre Vinkler BDA, DBA, BCD lige store. Og fordi Vinklen DBA eller DBC er lige saa stor som BCD, saa er er (6. 1) DC lige saa stor som DB. Men DB er lige saa stor som AC (Constr.); følgelig er DC lige saa stor som AC: Hvorfore og Vinklen CDA er lige saa stor som Vinklen DAC (5. 1); følgelig ere de Vinkler CDA, DAC tilsammen dobbelt saa store som Vinklen DAC. Men Vinklen BCD er ogsaa lige saa stor som CDA, DAC tilsammen. Følgelig er BCD dobbelt saa stor som DAC. Da nu BCD er lige saa stor som enhver af de tvende Vinkler BDA, DBA; saa er og enhver af disse dobbelt saa stor som Vinklen DAB.

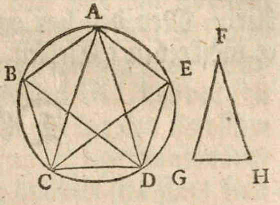
Altsaa har man beskrevet en lige=benet Triangel ADB, hvori enhver af de tvende Vinkler BDA, DBA, som ere ved Grund=Linien BD, er dobbelt saa stor som den øvrige Vinkel DAB. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den II Proposition.

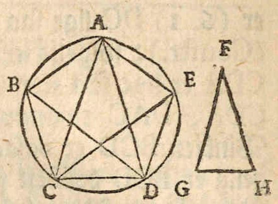
Problema.

I en given Cirkel at indskrive en Femkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.

Exempel. Lad ABCDE være en given Cirkel: Man skal indskrive en Femkant deri, som har lige store Sider og lige store Vinkler.



Construction. Man beskriver (10. 4) en lige=beened Triangel FGH, hvori enhver af de Vinkler G og H er dobbelt saa stor som Vinklen F. Dernæst indskriver man (2. 4) i Cirklen ABCDE en Triangel ACD, som har saa store Vinkler, som Trianglen FGH; saa at Vinklen CAD bliver saa stor som Vinklen F og enhver af de toe Vinkler ACD, ADC bliver saa stor som den Vinkel G eller H: Saa skal enhver af bemeldte Vinkler ACD, ADC være dobbelt saa stor som Vinklen CAD. Siden deeler man (9. 1) enhver af de toe Vinkler ACD, ADC i toe lige store Deele ved Linierne CE, DB. Endelig drager man de rette Linier AB, BC, DE, EA.

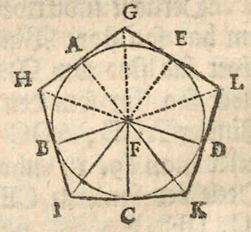


Demonstration. Fordi nu enhver af de toe Vinkler ACD, ADC er dobbelt saa stor som den Vinkel CAD og er ogsaa deelt i toe lige store Deele ved de Linier CE, DB (efter Constr.); saa ere de fem Vinkler DAC, ACE, ECD, CDB, BDA lige store. Men lige store Vinkler staae paa lige store Cirkel-Buer (26. 3): Følgelig ere de fem Cirkel-Buer AB, BC, CD, DE, EA lige store. Men de rette Linier, som overspende lige store Cirkel-Buer, ere lige store (29. 3): Følgelig ere de fem rette Linier AB, BC, CD, DE, EA lige store. Altsaa har Femkanten ABCDE lige store Sider. Jeg siger ydermeere, at den ogsaa har lige store Vinkler. Thi eftersom Cirkel-Buen AB er lige saa stor som Cirkel-Buen ED, saa læg den fælles Cirkel-Bue BCD til enhver af dem: Og da er (2 Ax.) den heele Cirkel-Bue ABCD lige saa stor som Cirkel-Buen EDCB. Men nu staaer Vinklen AED paa Cirkel-Buen ABCD og Vinklen BAE paa Cirkel-Buen EDCB: Følgelig er og Vinklen BAE lige saa stor som Vinklen AED (27. 3). Paa samme Maade kand bevises, at enhver af de øvrige Vinkler ABC, BCD, CDE er saa stor som een af bemeldte tvende Vinkler BAE, AED: Følgelig har Femkanten ABCDE lige store Vinkler. Men den har ogsaa lige store Sider, som tilforn blev beviist, og er indskreven i Cirklen ABCDE. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 12 Proposition.

Problema.

Omkring en given Cirkel at beskrive en Femkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.



Exempel. Lad ABCDE være en given Cirkel: Man skal omkring Cirklen ABCDE beskrive en Femkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.

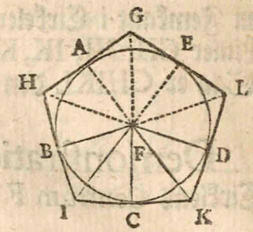
Construction. Man deeler Circumferencen af Cirklen ABCDE i fem lige store Deele i Punkterne A, B, C, D, E ved at indskrive (11. 4)

en

en Femkant i Cirkelen ABCDE. Dernæst drager man (17. 3) rette Linier GH, HI, IK, KL, LG, som røre Cirklen i Punkterne A, B, C, D, E: Saa er GHIKL den forlangte Femkant.

Demonstration. For at beviise dette, saa søger man (1. 3) Cirklens Centrum F og drager de rette Linier FB, FI, FC, FK, FD.

Eftersom nu HI rører Cirklen i Punkten B, og FB er dragen fra Middel-Punkten F til Rørings-Punkten B, saa ere (18. 3) de Vinkler ved B rette Vinkler. Paa samme Maade beviises ogsaa, at Vinklerne ved C og D ere rette. Altsaa (47. 1) ere Qvadraterne af FB, BI lige saa store som Qvadraten af FI, og Qvadraterne af FC, CI ere ogsaa saa store som Qvadraten af FI; Følgelig (1 Ax.) ere Qvadraterne af FB, BI lige saa store som Qvadraterne af FC, CI; og fordi Qvadraten af FB er lige saa stor som Qvadraten af FC, thi FB, FC ere lige store (15 Def. 1); saa er og (3 Ax.) den øvrige Qvadrat af BI lige saa stor som den øvrige Qvadrat af IC: Følgelig er ogsaa den rette Linie BI lige saa stor som IC. Og fordi de to Sider BF, FI ere saa store som de to Sider CF, FI, og BI er lige saa stor som IC; saa er (8. 1) Vinklen BFI lige saa stor som Vinklen IFC, og Vinklen BIF lige saa stor som Vinklen FIC: Altsaa er Vinklen BFC dobbelt saa stor som IFC og Vinklen HIK dobbelt saa stor som Vinklen FIC. Af samme Aarsag er og Vinklen CFD dobbelt saa stor som Vinklen CFK og Vinklen IKL dobbelt saa stor som Vinklen CKF. Og fordi Cirkel-Buen BC er lige saa stor som Cirkel-Buen CD (efter Constr.), saa er Vinklen BFC (27. 3) lige saa stor som Vinklen CFD. Men Vinklerne BFC, CFD ere dobbelt saa store som de Vinkler IFC, CFK (som tilforn er beviist). Følgelig er Vinklen IFC lige saa stor som Vinklen CFK (7 Ax.). Men nu er desforuden ogsaa Vinklerne ved C lige store, og FC er fælles for begge Trianglerne FCI og FCK; Derfor (26. 1) er Siden IC lige saa stor som CK og Vinklen FIC lige saa stor, som Vinklen FKC. Og fordi IC er lige saa stor som CK, saa er IK dobbelt saa stort som IC. Paa samme Maade beviises ogsaa, at HI er dobbelt saa stor som BI. Men BI er lige saa stor som IC (som tilforn blev beviist); Følgelig er og HI lige saa stor som IK (6 Ax.). Paa samme Maade beviises ogsaa at enhver af de øvrige Sider KL, LG, GH er lige saa stor som en af de toe HI, IK. Altsaa har Femkanten HIKLG lige store Sider. Jeg siger ogsaa, at den har lige store Vinkler. Thi eftersom Vinklen FIC er lige saa stor som FKC, og Vinklen HIK er dobbelt saa stor som FIC og Vinklen IKL er dobbelt saa stor som FKC, saa er Vinklen HIK lige saa stor som IKL (6 Ax.). Paa samme Maade kand og beviises at de ovrige Vinkler KLG, LGH, GHI ere lige saa store som een af de tvende Vinkler HIK, IKL. Altsaa har Femkanten HIKLG ogsaa lige store Vinkler, og er beskreven omkring Cirklen ABCDE. Hvilket var det, som skulde giøres.

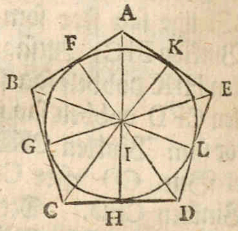


Den 13 Proposition.

Problema.

At indskrive en Cirkel i en given Femkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.

Exempel. Lad ABCDE være den givne Femkant, som skal have lige store Sider og lige store Vinkler: Man skal indskrive en Cirkel i bemældte Femkant ABCDE.



Construction. Man deeler (9. 1) de tvende Vinkler BCD, CDE i toe lige store Deele formedelst de rette Linier CI, DI, og fra Punkten I, hvor CI, DI stoder sammen, drager man de rette Linier IB, IA, IE.

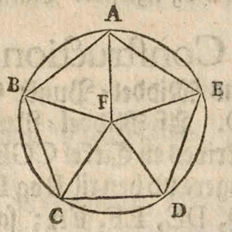
Demonstration. Fordi nu BC er saa stor som CD (efter Hyp.) og CI er en fælles Side, saa ere de toe Sider BC, CI saa store som de toe Sider CD, CI og desuden er (efter Constr.) Vinklen BCI lige saa stor som DCI. Følgelig (4. 1) er Vinklen CBI lige saa stor som CDI. Da nu den Vinkel CDE er dobbelt saa stor som Vinklen CDI, og CDE er (efter

(efter Hyp.) ligesaa stor som Vinklen ABC, og Vinklen CDI er saa stor som CBI; Saa er og Vinklen ABC dobbelt saa stor som Vinklen CBI og følgelig er CBI lige saa stor som Vinklen IBA: Altsaa er Vinklen ABC deelt i toe lige store Deele ved den rette Linie IB. Paa samme Maade kand og beviises, at de øvrige Vinkler BAE, AED ere deelte i toe lige store Deele ved de rette Linier IA, IE. Drag derfore (12. 1) fra Punkten I de rette Linier IF, IG, IH, IL, IK perpendicular paa AB, BC, CD, DE, EA. Fordi nu den Vinkel GCI er saa stor som Vinklen HCI, og IGC er saa stor IHC, thi de ere begge rette Vinkler; Saa har de tvende Triangler ICG, ICH toe Vinkler GCI, IGC lige saa store som toe Vinkler HCI, IHC; ydermeere er den Side IC tilfælles for begge Trianglerne: Følgelig er (26. 1) Siden IG lige saa stor som IH. Paa samme Maade beviises, at de øvrige rette Linier IF, IK, IL ere saa store som een af de toe IG, IH: Følgelig ere alle fem rette Linier IF, IG, IH, IL, IK lige store. Derfor skal den Cirkel, som bliver beskreven af Middel-Punkten I udi een af de fem bemelte Distancer, gaae igiennem Punkterne F, G, H, L, K og (Cor. 16. 1) røre Siderne AB, BC, CD, DE, EA i bemeldte Punkter, fordi Vinklerne ved samme Punkter ere rette, og følgelig skal samme Cirkel være indskreven i den give Femkant (5. Def. 4.). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 14 Proposition.
Problema.

At beskrive en Cirkel omkring en given Femkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.

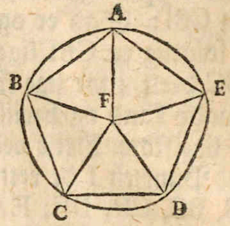
Exempel. Lad ABCDE være en given Femkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler; det begiæres, at beskrive en Cirkel omkring Femkanten ABCDE.



Construction. Man deeler (9. 1) de toe Vinkler BCD, CDE i to lige store Deele ved de rette Linier FC, FD og fra Punkten F, hvor FC, FD støde sammen, drager man de rette Linier FB, FA, FE.

De-

Demonstration. Det kand paa samme Maade som i foregaaende 13 Proposition bevises, at enhver af de øvrige Vinkler CBA, BAE, AED er deelt i toe lige store Deele ved de rette Linier FB, FA, FE. Fordi altsaa Vinklen BCD er saa stor som CDE (efter Hyp.) og Vinklen FCD er halvparten af BCD, og FDC halvparten af CDE; saa ere ogsaa de Vinkler FCD, FDC lige store (7 Ax.). Og derfore er ogsaa (6. 1) FC saa stor som FD. Paa samme Maade beviser man ogsaa, at enhver af de rette Linier FB, FA, FE er saa stor som een af de toe FC, FD: Altsaa ere de fem rette Linier FA, FB, FC, FD, FE lige store. Derfore skal den Cirkel, som beskrives omkring Middel-Punkten F udi een af de Distancer FA, FB, FC, FD, FE, gaae igiennem Punkterne A, B, C, D, E og følgelig være beskreven (6 Def. 4.) omkring den givne Femkant ABCDE. Hvilket var det, som skulde giøres.

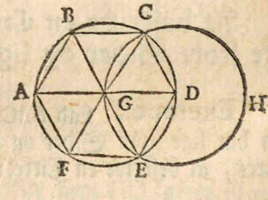


Den 15 Proposition.

Problema.

J en given Cirkel at indskrive en Sexkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.

Exempel. Lad Cirkelen ABCDEF være given: Udi hvilken man skal indskrive en Sexkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.



Construction. Man søger (1. 3) Cirkelens Middel-Punkt G og drager Middel-Linien AD. Af Middel-Punkten D udi Længden DG beskrives en Cirkel CGEH. Dernæst drager man EG, CG og trækker dem længere ud hen til B og F. Endelig drager man de rette Linier AB, BC, CD, DE, EF, FA; saa er ABCDEF den forlangte Sexkant.

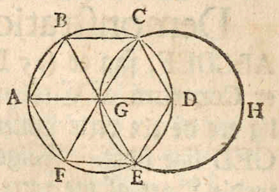
De-

Demonstration. Eftersom G er Middel-Punkten af Cirklen ABCDEF, saa er (15 Def. 1) GD lige saa stor som GE. Og fordi D er Centrum af Cirklen CGEH, saa er DG lige saa stor som DE: følgelig ere de tre rette Linier DG, GE, ED lige store og altsaa er Triangelen GED lige sidet. Følgelig (Cor. 6. 1. og 32. 1) er den Vinkel DGE en tredie Part af toe rette Vinkler. Ligeledes kand beviises, at Vinklen DGC er en tredie Part af toe rette Vinkler; Og fordi (13. 1) de tvende Vinkler EGC, CGB ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler; saa er CGB ogsaa en tredie Part af toe rette Vinkler; følgelig ere de tre Vinkler EGD, DGC, CGB lige store. Men (15. 1) den Vinkel BGA er saa stor som EGD, og den Vinkel AGF er saa stor som DGC, og Vinklen FGE er saa stor som CGB; følgelig ere de sex Vinkler EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE lige store. Men lige store Vinkler staae paa lige store Cirkel-Buer (26. 3). Følgelig ere de sex Cirkel-Buer AB, BC, CD, DE, EF, FA lige store. Da nu ogsaa (29. 3) de rette Linier, som overspende lige store Cirkel-Buer, ere lige store, saa ere de sex rette Linier AB, BC, CD, DE, EF, FA lige store og altsaa har Sexkanten ABCDEF lige store Sider. Jeg siger, at den ogsaa har lige store Vinkler. Thi Cirkel-Buen AF er lige saa stor som Cirkel-Buen ED; naar man altsaa legger den Cirkel-Bue ABCD til enhver af dem, da er (2 Ax.) den heele Cirkel-Bue FABCD lige saa stor som Cirkel-Buen EDCBA. Men nu staar Vinklen AFE paa Cirkel-Buen EDCBA og Vinklen FED staaer paa Cirkel-Buen FABCD: Altsaa er (27. 3) Vinklen AFE lige saa stor som Vinklen FED. Ligeledes kand beviises, at de øvrige Vinkler af Sexkanten ere, hver for sig, saa store som een af de toe lige store Vinkler AFE, FED; Altsaa har Sexkanten ABCDEF lige store Vinkler. Men den har ogsaa lige store Sider, som tilforn blev beviist, og er indskreven i Cirkelen ABCDEF. Hvilket var det som skulde giøres.

Corollarium.

Heraf seer man, at Siden af en Sexkant, som er indskreven i en Cirkel, er lige saa stor som Cirklens halve Diameter.

Vil man beskrive omkring Cirklen ABCDEF en Sexkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler, saa drager man (17. 3) rette Li-

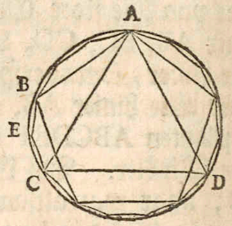


nier, som røre Cirklen i Punkterne A, B, C, D, E, F. Og ligeledes, dersom man vil beskrive en Cirkel i en Sexkant eller omkring en Sexkant, saa deeler man toe Vinkler ABC, BCD i toe lige store Deele. Hvilket altsammen er klart af det, som i den 12, 13 og 14 Proposition blev beviist om Femkanter.

Den 16 Proposition.

Problema.

I en given Cirkel at indskrive en Femtenkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.



Exempel. Lad ABCD være den givne Cirkel: Man skal deri indskrive en Femtenkant, som har lige store Sider og lige store Vinkler.

Construction og Demonstration.

Lad AC være Siden af ⅓ en i Cirklen ABCD indskreven lige-sidet Triangel og AB Siden af en Femkant. Dersom man nu forestiller sig den heele Omkreds eller Circumferentz at være deelt i femten lige store Deele, saa skal Cirkel-Buen ABC (som er den tredie Deel af den heele Circumferentz) indeholde fem saadanne Deele, af hvilke den heele Circumferentz ABCD holder femten, og Cirkel-Buen AB (som er den femte Deel af den heele Omkreds) skal indbefatte tre af samme Deele: Følgelig skal den øvrige Cirkel-Bue BC indeholde toe af bemeldte Deele. Deel derfore (30. 3) Cirkel-Buen BC i toe lige store Deele i E: saa skal enhver af de toe Deele BE, EC være den femtende Part af den heele Circumferentz. Dersom man altsaa drager de rette Linier BE, EC og afpasser rundt omkring udi Cirklen ABCD rette Linier af lige Størrelse med BE eller EC, saa skal den forlangte Femtenkant være indskreven i Cirklen ABCD. Hvilket var det som skulde giøres.

Dersom man vil beskrive en Femtenkant omkring en Cirkel eller en Cirkel i eller omkring en Femtenkant, saa giør man det paa samme Maade, som i den 12te 13de og 14 Proposition blev viist om Femkanter.

Eucli-

EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Femte Bog.

Definitiones (Forklaringer.)

1. En mindre Størrelse kaldes en Deel af en større, naar den mindre gaaer just net op i den større, saa at intet bliver tilovers

2. En større Størrelse kaldes en Mangefold (Multiplex) af en mindre, naar den mindre gaaer just net op i den større.

For Exempel: Den rette Linie C kaldes en Deel af den rette Linie AB, fordi den gaaer tre gange op i AB; og AB derimod kaldes en Mangefold af C. Ligeledes kaldes F en Deel af DE og DE igien en Mangefold af F. Ligesaa kaldes det tal 4 en Deel af 8, og 8 en Mangefold af 4. Men det Tal 3 kand ikke (efter 1 Def.) kaldes en Deel af 8, fordi 3 gaaer ikke just op i 8, og derfore kand 8 ikke heller kaldes en Mangefold af 3.

Naar fremdeles to eller flere Størrelser gaae just lige mange gange op i lige saa mange større Størrelser, saa blive de sidste kaldet Lige Mangefold (Æquemultiplices) af de første; som for Exempel: De to rette Linier AB og DE kaldes Lige Mangefold af de to andre C og F, fordi C gaaer just tre gange op i AB og ligeledes gaaer F tre gange op i DE. Ligeledes kaldes disse Tal 6, 15, 27 Lige Mangefold af de Tal 2, 5, 9, fordi 2 gaaer lige saa mange gange op i 6, som 5 udi 15 og som 9 udi 27.

3. En Forhold (Ratio) er den Relation eller Beskaffenhed, som to Størrelser af samme slags have til hverandre i henseende til deres Storhed.

For Exempel: Archimedes har beviist, at enhver Cirkels Circumferentz indeholder dens Diameter tre gange og næsten en syvende Deel deraf. Denne Relation nu, som Circumferentzen og Diameter have til hverandre, kaldes deres Forhold eller Ratio. Ligeledes naar en Linie er sex Alne lang og en anden Linie tre Alne, saa indbefattes den mindre Linie toe gange i den større, og denne Relation eller Beskaffenhed, de have til hinanden, kaldes deres Forhold.

4. De Størrelser siges at have en Forhold til hinanden, hvilke kand overgaae hinanden, naar de blive nogle gange tagne.

Euclides har i den foregaaende 3 Definition sagt, at en Forhold er en Relation imellem tvende Størrelser af samme slags. I denne 4 Definition viser han, hvad for Størrelser siges at være af samme slags og følgeligen at have en Forhold til hinanden, neml. naar af toe Størrelser den mindre nogle gange tagen kand overgaae den større, saa siges disse toe Størrelser at være af samme slags. For Exempel: En Cirkels Diameter og Circumferentz, endskiønt den første er en ret og den anden en krum Linie (efter 17 og 15 Def. 1), saa ere de dog efter denne Definition af samme slags, fordi naar Diameter tages fire gange, saa er den større end Circumferentzen. Altsaa kand en Cirkels Diameter og Circumferentz have en Forhold til hinanden.

5. Størrelser siges at have samme Forhold til hinanden, den første til den anden, som den tredie til den fierde, naar de lige mangefold af den første og tredie ere, altid begge tillige, enten større eller lige saa store eller mindre end de lige mangefold af den anden og fierde, i hvad for lige mangefold der end tages, naar ikkuns de lignes sammen, som svare til hinanden.

Udi denne Definition er dette Meeningen: Naar man har fire Størrelser, som for Exempel fire Linier A, B, C, D, saa skal man tage hvad for lige mangefold man vil af den første A og tredie C (det er, man skal tage toe Størrelser, saasom her toe Linier, som hver i sær indbefatte A og C enten toe eller tre eller fire &c. gange) saasom E og G, og ligne dem imod hvad for lige mangefold man vil af den anden B og fierde D, saasom imod F og H. Befindes det da, at, naar E, som er den mangefold af den første A, er større end F, som er den mangefold af den anden B, da er ogsaa G, som er den mangefold af den tredie C, større end H, som er den mangefold af den fierde D, eller naar E er lige saa stor som F, da er G ogsaa lige saa stor som H, eller naar E er mindre end F, da er G ogsaa mindre end H; saa siges den første A at have samme

For-

Forhold til den anden B, som den tredie C har til den fierde D, eller A siges da at forholde sig til B ligesom C forholder sig til D.

Altsaa har disse fire Tal 5, 4, 10, 8 samme Forhold til hinanden, neml. det første Tal 5 har samme Forhold til det andet 4, som det tredie 10 har til det fierde 8. Thi man seer udi den hosstaaende Tavles første Rad, at de tvende Tal, som ere tre gange saa store som det første Tal 5 og det tredie 10, nemlig 15 og 30 ere begge tillige større end de tvende Tal, som ere tre gange saa store som det andet Tal 4 og det fierde 8, nemlig 12 og 24. Og udi den anden Rad seer man, at de tvende Tal, som ere fire gange saa store som 5 og 10, nemlig 20 og 40 ere begge tillige lige saa store, som de tvende Tal, der ere fem gange saa store som 4 og 8, nemlig 20 og 40. Og udi den tredie Rad finder man, at de tvende Tal, som ere fem gange saa store som 5 og 10, nemlig 25 og 50 ere begge tillige mindre end de tvende Tal, som ere syv gange saa store som 4 og 8, nemlig 28 og 56. Iligemaade ere alle andre lige mangefold af 5 og 10 saaledes beskafne imod alle andre lige mangefold af 4 og 8, at de første ere enten begge tillige større eller begge tillige saa store eller begge tillige mindre end de sidste.

Første	Rad		
15	5	4	12
30	10	8	24
Anden	Rad		
20	5	4	20
40	10	8	40
Tredie	Rad		
25	5	4	28
50	10	8	56

Af toe Størrelser, som have en Forhold til hinanden bliver altid den, som er først sat, kaldet den Foregaaende (Antecedens), og den anden kaldes den Efterfølgende (Consequens); saasom udi førstbemeldte Exempel kaldes A den foregaaende og B den efterfølgende og ligeledes kaldes C den foregaaende og D den efterfølgende.

6. De Størrelser, som have samme Forhold til hinanden, kaldes proportionale.

Naar Størrelser siges at være proportionale, saa forstaaes derved, at de skal have samme Forhold til hinanden, det er (efter 5 Def. 5), at de lige mangefold af den første og tredie skal begge tillige være større eller lige saa store eller mindre end de lige mangefold af den anden og fierde.

7. Men dersom af de lige mangefold, den Mangefold af den første Størrelse er større end den Mangefold af den anden, men den Mangefold af den tredie er ikke større end den Mangefold af den fierde, da siges den første at have en større Forhold til den anden end den tredie har til den fierde.

For Exempel: Det Tal 3 siges at have en større Forhold til 2, end 5 til 4. Thi 9 og 15 ere lige mangefold af det første Tal 3 og det tredie 5, ligeledes ere 8 og 16 lige mangefold af det andet Tal 2 og det fierde 4. Og 9 er større end 8, men 15 er ikke større end 16.

9	3	2	8
15	5	4	16

8. Naar Størrelser have samme Forhold til hinanden, saa bliver den Lighed, som er imellem deres Forhold, kaldet en Proportion.

Naar Størrelser siges at have en Proportion, saa forstaaes derved intet andet, end det, som allerede i den 5 Definition er forklaret; saa at disse tre Talemaader: at have samme Forhold til hinanden, at være proportional, at have en Proportion, betyde et og det samme.

9. En Proportion bestaaer i det mindste af tre Størrelser; af hvilke den mellemste staaer i steden for toe, som kand sees af den 7 prop. 5 og 11 prop. 6.

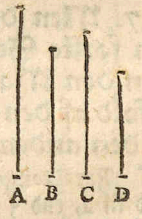
Det giøres ikke fornødent, at Begyndere nu strax læse de tre næstfølgende Definitioner, fordi ingen af dem bruges i denne femte Bog og de bliver siden videre forklarede i de følgende Bøger.

10. Dersom tre Størrelser ere proportionale, saa siges den første at have til den tredie en dupleret Forhold (Rationem duplicatam) imod den, som den har til den anden.

11. Dersom fire Størrelser ere proportionale, saa siges den første at have til den fierde en tripleret Forhold (triplicatam rationem) imod den, som den har til den anden.

12. De foregaaende siges at være Lige i Forhold (Homologæ eller similes ratione) med de foregaaende og de efterfølgende med de efterfølgende.

For Exempel: Naar Størrelser A, B, C, D ere proportionale, saa at A har samme Forhold til B som C har til D, saa kaldes A og C lige i Forhold, fordi de ere begge de foregaaende, og ligeledes kaldes B og D lige i Forhold, fordi de ere begge de efterfølgende.



13. En Skifte-Viis tagen Forhold, (Ratio alterna) er, naar man tager den foregaaende imod den foregaaende og den efterfølgende imod den efterfølgende.

For

For Exempel: Det bevises i denne Bogs 16 Prop., at naar A forholder sig til B som til D, saa forholder sig ogsaa Skifte-Viis (alternando) A til C, den foregaaende til den foregaaende, som B til D, den efterfølgende til den efterfølgende.

som	A til B
saa	C til D
som	A til C
saa	B til D

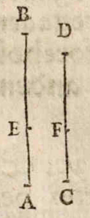
14. **En omvendt Forhold** (Ratio inversa) er, naar man i Ligningen sætter den efterfølgende i den foregaaendes Sted og den foregaaende i den efterfølgendes Sted.

For Exempel: Udi Cor. 4. 5 bliver beviist, at, naar A forholder sig til B som C til D, saa forholder sig ogsaa ved Omvending (invertendo) den efterfølgende B til den foregaaende A, som den efterfølgende D til den foregaaende C.

som	A til B
saa	C til D
som	B til A
saa	D til C

15. **En Forholds Sammensætning** (Compositio Rationis) er, naar den foregaaende og efterfølgende som een Størrelse tages imod den efterfølgende.

For Exempel: J den 18 Prop. 5 bevises, at naar AE forholder sig til EB, som CF til FD: saa forholder sig ogsaa ved Sammensætning (Componendo) den foregaaende AE og efterfølgende EB tilsammen, det er, den heele AB til den efterfølgende EB, som den heele CD til FD.



16. **En Forholds Deeling** (Divisio rationis) er, naar den Størrelse, som bliver tilovers, efterat den efterfølgende er taget fra den foregaaende, tages imod den efterfølgende.

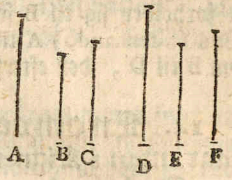
For Exempel: J den 17 Prop. 5 bevises, at naar AB (see Figuren til den 15 Def.) forholder sig til BE som CD til DF, saa forholder sig ogsaa AE (som er den Størrelse, der bliver til overs, naar man tager den efterfølgende BE fra den foregaaende AB) til den efterfølgende BE, som CF til FD.

17. **En Forholds Omsætning** (Conversio rationis) er, naar man tager den foregaaende imod den Størrelse, der bliver til overs, efterat den efterfølgende er tagen fra den foregaaende.

For Exempel: Udi Cor. 19. 5 bliver beviist, at naar AB (see Fig. til 15 Def.) forholder sig til BE som CD til DF, saa forholder sig ogsaa ved Omsætning (Convertendo) den foregaaende AB til AE (som bliver tilovers naar den efterfølgende BE tages fra den foregaaende AB) som CD til CF.

18. En

18. En jevntagen Forhold (Ratio ex æqualitate) er, naar der ere fleere end toe Størrelser A, B, C og lige saa mange andre D, E, F, og den første A af de første Størrelser forholder sig til den sidste C, som den første D af de andre Størrelser forholder sig til den sidste F.

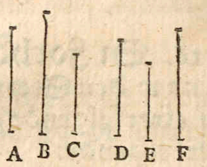


Anderledes.

En jevntagen Forhold er, naar man udelader de mellemste og tager de yderste imod hinanden.

19. En ordentlig Proportion (Proportio ordinata) er, naar den foregaaende A foreholder sig til den efterfølgende B, som den foregaaende D til den efterfølgende E, og den efterfølgende B foreholder sig til en anden C, som den efterfølgende E til en anden F. See Figuren til den 18. Def.

20. En U-ordentlig Proportion (Proportio perturbata) er, naar der ere tre Størrelser A, B, C og lige saa mange andre D, E, F og den foregaaende A af de første tre forholder sig til den efterfølgende B, som den foregaaende E af de andre tre til den efterfølgende F, og den efterfølgende B af de første tre forholder sig til en anden C, som en anden D forholder sig til den foregaaende E af de andre tre.



Man merke herved, at fordi rette Linier ere blant alle Størrelser de simpelste og kand lettest deeles og giøres mindre og større, saa bruges de i de følgende Propositioner som Exempler og staae i steden for alle Størrelser, saasom alle slags Linier, Figurer &c. saa at alt hvad som i denne femte Bog bevises om rette Linier, det samme maae ogsaa forstaaes om alle Størrelser i Almindelighed.

Den I Proposition.
Theorema.

Dersom Størrelser, i hvor mange de end ere, ere hver for sig lige mangefold af lige saa mange andre Størrelser: Saa skal alle de første tilsammen være lige saa Mangefold af alle de sidste, som een af de første er af een af de sidste.

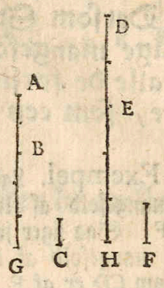
Exempel. Lad de Størrelser AB og CD være lige mangefold af lige saa mange andre Størrelser E og F: Saa siger jeg, at AB og CD tilsammen ere lige saa mangefold af E og F tilsammen, som AB er af E eller som CD er af F.

Demonstration. Eftersom AB er lige saa mangefold af E, som CD er af F; saa maae der være lige saa mange Deele i AB saa store som E, som der ere Deele i CD saa store som F. Lad nu AG, GB være Deelene af AB, som ere saa store som E; Ligeledes lad CH, HD være Deelene af CD, som ere saa store som F. Efterdi da AG er saa stor som E og CH er saa stor som F, saa ere ogsaa (efter 2 Ax.) AG og CH tilsammen lige saa store som E og F tilsammen. Af samme Aarsag ere ogsaa GB, HD tilsammen lige saa store, som E og F tilsammen. Følgelig ere der saa mange Deele i AB og CD tilsammen, der ere saa store som E og F tilsammen, som der ere Deele i AB saa store som E. Derfore ere AB og CD tilsammen lige saa mangefold af E og F tilsammen, som AB er af E. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 2 Proposition.
Theorema.

Dersom der ere sex Størrelser, af hvilken den første og tredie ere lige mangefold af den anden og fierde, og den femte te og siette ere ogsaa lige mangefold af den anden og fierde: Saa skal ogsaa den Størrelse, som er sammensat af den første og femte være lige saa mangefold af den anden, som den Størrelse, der er sammensat af den tredie og siette, er af den fierde.

Exempel. Lad der være sex Størrelser AB, C, DE, F, BG, EH, og lad den første AB være ligesaa mangefold af den anden C, som den tredie DE er af den fierde F, og lad ogsaa den femte BG være ligesaa mangefold af den anden C, som den siette EH er af den fierde F: Saa siger jeg, at AG, som er sammensat af den første AB og femte BG, er lige saa mangefold af den fierde C, som DH, der er sammensat af den tredie DE og siette EH, er af den fierde F.



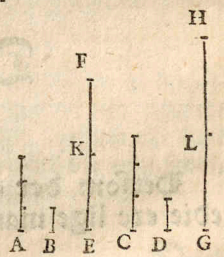
Demonstration. Eftersom AB og DE ere lige mangefold af C og F, saa ere der lige saa mange Deele i AB saa store som C, som der ere Deele i DE saa store som F. Af samme Aarsag ere der ogsaa lige saa mange Deele i BG saa store som C, som der ere Deele i EH saa store som F. Altsaa ere der lige saa mange Deele i den heele AG af samme Størrelse som C, som der ere Deele i den heele DH saa store som F. Følgelig er AG lige saa mangefold af C, som DH er af F. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 3 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Størrelse ere lige mangefold af toe andre, og der tages lige mangefold af de toe første, saa skal ogsaa disse være lige mangefold af de toe andre.

Exempel. Lad de tvende Størrelser A og C være lige mangefold af de toe B og D; lad fremdeles EF og GH være lige mangefold af de toe første A og C: Saa siger jeg, at disse EF og GH ere ogsaa lige mangefold af de toe andre B og D.



Demonstration. Eftersom EF og GH

ere

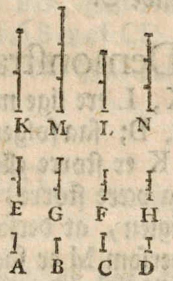
ere (efter Hyp.) lige mangefold af A og C, saa maae der være saa mange Deele i EF, der ere saa store som A, som der ere Deele i GH saa store som C. Lad EK, KF være de bemeldte Deele af EF, og lad GL, LH være de bemeldte Deele af GH. Fordi nu A og C ere lige mangefold af B og D (efter Hyp.), og EK er saa stor som A, og GL saa stor som C, saa ere og EK og GL lige mangefold af B og D. Ligeledes kand bevises, at KF og LH ere lige mangefold af B og D. Altsaa har man sex Størrelser EK, B, GL, D, KF og LH, af hvilke den første EK og tredie GL ere lige mangefold af den anden B og fierde D, og den femte KF og siette LH ere ogsaa lige mangefold af den anden B og fierde D: Følgelig skal (2 Prop. 5) EF (som er sammensat af den første EK og femte KF) og GH (som er sammensat af den tredie GL og siette KH) være lige Mangefold af B og D. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 4 Proposition.

Theorema.

Dersom den første har samme Forhold til den anden, som den tredie har til den fierde: Saa skal ogsaa de lige mangefold af den første og tredie have samme Forhold til de lige mangefold af den anden og fierde, i hvad for lige mangefold der end tages, naar man ikkuns ligner dem sammen, som svare til hinanden.

Exempel. Lad af de fire Størrelser A, B, C, D den første A have samme Forhold til den anden B, som den tredie C har til den fierde F, og lad E og F være hvad for lige mangefold man vil af den første A og tredie C (det er, lad de Størrelser E og F være hver i sær enten toe, eller tre, eller fire &c. gange saa store som A og C), og lad ligeledes G og H være hvad for lige mangefold man vil af den anden B og fierde D: Saa siger jeg, at E har samme Forhold til G som F har til H.



Construction. Man tager hvad for lige mangefold man vil af

E og F, saasom K og L, og ligeledes hvad for lige mangefold man vil af G og H, saasom M og N.

Demonstration. Fordi nu E og F ere lige mangefold af A og C (efter Hyp.) og K, L ere lige mangefold af de første E og F, saa ere (3. 5) K, L ogsaa lige mangefold af A og C. Ligeledes kand bevises, at M og N ere lige mangefold af B, D. Eftersom da (efter Hyp.) A forholder sig til B, som C til D, og K, L ere lige mangefold af den første A og den tredie C, og M, N ere lige mangefold af den anden B og fierde D: saa følger (5 Def. 5) at dersom K er større end M, saa er L ogsaa større end N, og dersom K er lige saa stor som M, saa er L ogsaa lige saa stor som N, og dersom K er mindre end M, saa er L ogsaa mindre end N. Men nu ere K, L lige mangefold af E og F, og M, N ere lige mangefold af G, H. Følgelig forholder sig E til G, som F til H (efter 5 Def. 5). Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium.

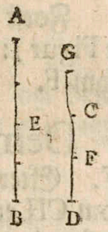
Dersom fire Størrelser (A, B, C, D) ere proportionale eller have samme Forhold til hinanden, saa skal de ogsaa ved Omvending (invertendo) være proportionale, det er (14 Def. 5), den efterfølgende B skal forholde sig til den foregaaende A, som den efterfølgende D til den foregaaende C.

Demonstration. Eftersom A forholder sig til B som C til D, og K, L ere lige mangefold af A og C, og M, N ere lige mangefold af B, D; saa følger af den 5 Def. 5 (som ogsaa tilforn er viist), at dersom K er større eller lige saa stor, eller mindre end M, saa skal L tillige ogsaa være større, eller lige saa stor, eller mindre end N. Heraf følger igien, at dersom M er større end K, saa er ogsaa N større end L, og dersom M er saa stor som K, da er ogsaa N saa stor som L, og dersom M er mindre end K, da er ogsaa N mindre end L. Derfore forholder sig ogsaa (5 Def. 5) B til A, som D til C. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 5 Proposition.
Theorema.

Dersom en Størrelse er lige saa Mangefold af en anden Størrelse, som en fratagen er af en fratagen: Saa skal og saa den øvrige være lige saa mangefold af den øvrige som den heele er af den heele.

Exempel. Lad en Størrelse AB være lige saa mangefold af en anden Størrelse CD, som en fratagen Størrelse AE er af en fratagen CF: Saa siger jeg, at den øvrige EB er lige saa mangefold af den øvrige FD, som den heele AB er af den heele CD.



Demonstration. Thi lad EB være lige saa mangefold af GC, som AE er af CF: saa skal ogsaa (1. 5) EB og AE tilsammen, det er, den heele AB være lige saa mangefold af GC og CF tilsammen, det er, af den heele GF, som AE er af CF. Da nu AB ogsaa er lige saa mangefold af CD, som AE er af CF: saa er AB lige saa mangefold af CD som af GF, (det er, AB indbefatter GF og CD lige mange gange) og derfore (7 Ax.) er GF saa stor som CD. Følgelig dersom CF tages fra enhver af dem, saa er den øvrige GC lige saa stor som den øvrige FD. Fordi altsaa EB er lige saa mangefold af GC, som AE er af CF, og GC er saa stor som FD; saa er EB lige saa mangefold af FD, som AE er af CF. Men nu er AE lige saa mangefold af CF, som AB er af CD. Følgelig skal EB være lige saa mangefold af FD, som den heele AB er af den heele CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 6 Proposition.
Theorema.

Dersom toe Sørrelser ere lige mangefold af toe andre, og igien toe andre Størrelser, som ere tagne fra de første, ere

 lige

lige mangefold af de samme toe: Saa skal de øvrige af de første enten være lige saa store som de samme toe eller lige mangefold af dem.

Exempel. Lad toe Størrelser AB og CD være lige mangefold af toe andre E og F, og lad de fratagne AG og CH være lige mangefold af de samme E og F: saa siger jeg, at de øvrige GB og HD ere enten lige saa store som E og F eller ogsaa lige Mangefold af E og F.

Først Lad GB være lige saa stor som E (see den 1 Figur): saa siger jeg at HD er ogsaa lige saa stor som F.

Demonstration. Lad CK være saa stor som F. Eftersom da AG er lige saa mangefold af E, som CH er af F, og GB er lige saa stor som E og KC som F; saa er ogsaa (2. 5) AB lige saa mangefold af E, som KH er af F. Men AB er lige saa mangefold af E, som CD er af F; følgelig er KH lige saa mangefold af F, som CD er af F. Fordi altsaa KH og CD ere lige mangefold af een og den samme F, saa er KH lige saa stor som CD (efter 6 Ax.), og naar den fælles Størrelse CH bliver tagen fra begge, saa er KC lige saa stor som HD. Men KC er lige saa stor som F; følgelig er og HD lige saa stor som F. Derfore, naar GB er saa stor som E, saa er og HD saa stor som F.

Paa samme Maade kand og bevises (efter den anden Figur) at naar GB er mangefold af E; saa er HD lige saa mangefold af F. Hvilket var det, som skulde bevises.

Anderledes.

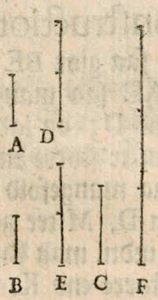
Eftersom AB og CD ere lige mangefold af E og F, saa maae der være saa mange Deele i AB saa store som E, som der ere Deele i CD, saa store som F; og fordi AG, CH ere lige mangefold af E og F, saa maae der ligeledes være saa mange Deele i AG, saa store som E, som der ere i CH, CH, saa store som F. Følgelig (3 Ax.) maae der ogsaa være saa mange Deele i den øvrige GB, saa store som E, som der ere i den øvrige HD saa store som F. Derfore, dersom GB indbefatter E engang, det er, dersom GB er saa stor som E, saa er og HD saa stor som F, og hvis GB indbefatter E nogle gange, saa skal HD indbefatte F lige saa mange gange. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 7 Proposition.

Theorema.

Lige store Størrelser have samme Forhold til een og den samme Størrelse, og een og den samme Størrelse har een og den samme Forhold til lige store Størrelser.

Exempel. Lad A og B være lige store Størrelser, og lad C være en anden Størrelse; saa siger jeg, at A har samme Forhold til C, som B har til C, og at C har samme Forhold til begge de Størrelser A og B.



Construction. Man tager hvad for lige mangefold man vil af A og B, saasom D og E, og man tager efter Behag en mangefold af C, saasom F.

Demonstration. Eftersom D er lige saa mangefold af A, som E er af B, og A er saa stor som B, saa er ogsaa D saa stor som E (6 Ax.). Derfore, naar D er større end F, saa er og E større end F og naar D er lige saa stor som F, saa er og E lige saa stor som F, og naar D er mindre end F, saa er og E mindre end F. Men D, E ere lige mangefold af A, B, og F er en anden mangefold af C; Følgelig har (5 Def.) A samme Forhold til C, som B har til C.

Og heraf følger videre (efer Cor. 4. 5) at C har ogsaa samme Forhold til A, som C har til B. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Den 8 Proposition.
Theorema.

Den større af toe u-lige Størrelser har en større Forhold til een og den samme Størrelse, end den mindre: Og een og den samme Størrelse har en større Forhold til den mindre end til den større.

Exempel. Lad AB og C være toe Størrelser, som ey ere lige store, og lad AB være den største af dem, men lad D være en tredie Størrelse: Saa siger jeg (1) at AB har en større Forhold til D, end C har til den samme D: og (2) at D har en større Forhold til den mindre C end samme D har til den større AB.

Construction. Eftersom AB er større end C, saa gior BE saa stor som C, og tag den øvrige AE saa mange gange, indtil den bliver større end D; og lad FG være den mangefold af AE, som er større end D. Tag fremdeles GH saa mangefold af EB, og K saa mangefold af C som FG er af AE: og tag L toe gange saa stor som D, M tre gange saa stor, N fire gange saa stor, og saa fremdeles, indtil man faaer saadan en mangefold af D, som er den første, der er større end K. Lad da N være den mangefold af D, som er den første, der er større end K.

Demonstration. Eftersom N er den første der er større end K, saa er M ikke større end K, og følgelig er K ermindre end M. Og fordi FG er lige saa mangefold af AE, som GH er af EB, saa er (1. 5) FG lige saa mangefold af AE, som FH er af AB. Da nu FG ogsaa er lige saa mangefold af AE, som K er af C (efter Constr.); saa er FH lige saa mangefold af AB, som K er af C; følgelig ere FH og K lige mangefold af AB og C. Fordi Fremdeles GH er lige saa mangefold af EB, som K er af C, og EB er lige saa stor som C; saa er og GH

GH lige saa stor som K (6 Ax:). Da nu K er ikke mindre end M, saa er ey heller GH mindre end M. Ydermere er GF større end D (efter Constr.); følgelig er den heele Størrelse HF større end D og M tilsammen. Men D og M ere tilsammen lige saa store som N; Følgelig er HF større end N. Efterdi nu HF er større end N, men K er ikke større end N; og HF og K ere lige mangefold af den første AB og den tredie C, og N er en mangefold af D; saa følger (7 Def. 5), at AB har en større Forhold til D end C har til D. Hvilket (1) var at bevise.

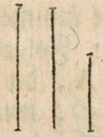
2. Eftersom N er vel større (som tilforn blev beviist) end K, men ikke større end HF; og N er en mangefold af D, og K, HF ere lige mangefold af C og BA: saa har (7 Def. 5) D en større Forhold til C end D har til BA. Hvilket (2) var at bevise.

Den 9 Proposition.

Theorema.

De Størrelser, som have samme Forhold til en og den samme Størrelse, ere lige store: Og de Størrelser, til hvilke en og den samme Størrelse har en og den samme Forhold, ere lige store.

Exempel. Lad for det første A have samme Forhold til C, som B har til C: Saa siger jeg, at A er lige saa stor som B.



A B C

Demonstration. Hvis A og B ikke vare lige store, saa kunde de ikke have samme Forhold til C (8. 5); men de have samme Forhold. Følgelig er A lige saa stor som B. Hvilket (1) var at bevise.

Lad nu for det andet C have en og den samme Forhold til de toe Størrelser A og B; saa siger jeg at A er lige saa stor som B.

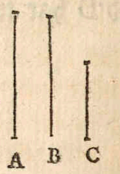
Thi hvis A ikke var lige saa stor som B: saa kunde C ikke have samme Forhold til A, som til B (8. 5); men den har det: Følgelig er A lige saa stor som B. Hvilket var det, som (2) skulde bevises

Den 10 Proposition.

Theorema.

Af troe Størrelser, som have en Forhold til en og den samme Størrelse, skal den, som har en større Forhold, være den største: Derimod skal den, til hvilken en og den samme har en større Forhold, være den mindste.

Exempel. Lad A have en større Forhold til C end B har til C: Saa siger jeg, at A er større end B.



Demonstration. Dersom A var lige saa stor som B, da maatte (7. 5) A have samme Forhold til C, som B har til C; Men det har den ikke: Følgelig kand A ikke være lige saa stor som B. Og dersom A var mindre end B, da maatte B have en større Forhold til C end A har til C, men det har den ikke; følgelig kand A ikke heller være mindre end C. Derfore er da A større end B. Hvilket (1) var at bevise.

2.) Lad nu C have en større Forhold til B end C har til A: Saa siger jeg, at B er mindre end A.

Demonstration. Var B lige saa stor som A, da maatte C have samme Forhold til A, som C har til B (7. 5); men det har den ikke: Følgelig er B ikke lige saa stor som A. Og dersom B var større end A, da maatte C have en mindre Forhold til B end den har til A (8. 5); men det har den ikke: Følgelig er B ikke heller større end A. Heraf følger da at B er mindre end A. Hvilket (2) var at bevise.

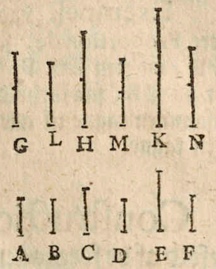
Den 11 Proposition.

Theorema.

De Forhold, som ere lige saa store som en og den samme Forhold, ere lige store med hinanden.

Exem:

Exempel. Lad A forholde sig til B som C til D, og lad C forholde sig til D, som E til F: saa siger jeg, at ogsaa A forholder sig til B som E til F.



Construction. Tag G, H, K lige mangefold af A, C, E, og L, M, N lige mangefold af B, D, F.

Demonstration. Efterdi A forholder sig til B som C til D; og G, H ere lige mangefold af den første A og tredie C; og L, M ere lige mangefold af den anden B og den fierde D. Saa følger (5 Def. 5), at, naar G er større end L, saa er H ogsaa større end M, og naar G er lige saa stor som L, saa er H ogsaa lige saa stor som M, og naar G er mindre end L, saa er H ogsaa mindre end M. Fordi fremdeles C forholder sig til D, som E til F, og H, K ere lige mangefold af den første C og tredie E; og M, N ere lige mangefold af den anden D og fierde F: saa følger, at naar H er større end M, saa er K ogsaa større end N, og naar H og M ere lige store, saa ere ogsaa K og N lige store, og naar H er mindre end M, da er ogsaa K mindre end N. Men tilforn blev beviist, at naar H er større, eller lige saa stor, eller mindre end M, saa er ogsaa G større, eller lige saa stor, eller mindre end L. Derfore naar G er større eller lige saa stor eller mindre end L, saa er K ogsaa større eller lige saa stor eller mindre end N. Da nu G, K ere lige mangefold af A, E; og L, N ere lige mangefold af B, F: Saa er det klart (5 Def. 5.), at A forholder sig til B, som E til F. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 12 Proposition.

Theorema.

Dersom Størrelser, i hvor mange de end ere, ere Proportionale; saa skal alle de foregaaende tilsammen forholde sig til alle de efterfølgende tilsammen, som en af de foregaaende forholder sig til en af de efterfølgende.

Exempel. Lad de Størrelser A, B, C, D, E, F være Proportionale, saa at A forholder sig til B, som C til D, og som E til F: saa jeg siger, at ligesom A forholder sig til B, saa forholder sig alle de foregaaende A, C, E tilsammen tagne til alle de efterfølgende B, D, F tilsammen tagne.

Construction. Tag G, H, K lige mangefold af de foregaaende A, C, E, og tag L, M, N lige mangefold af de efterfølgende B, D, F.

Demonstration. Fordi nu A forholder sig til B, som C til D og som E til F, og G, H, K ere lige mangefold af A, C, E og L, M, N lige mangefold af B, D, F: saa følger (5 Def. 5), at naar G er større end L, saa er H ogsaa større end M, og ligeledes K større end N, og, naar G er lige saa stor som L, saa er H ogsaa lige saa stor som M, og ligeledes K saa stor som N, og naar G er mindre end L, da er H ogsaa mindre end M, og ligeledes K mindre end N. Derfore naar G er større end L, saa ere ogsaa G, H, K tilsammen tagne større end L, M, N tilsammen tagne, og naar G er lige saa stor som L, da ere ogsaa G, H, K tilsammen lige saa store som L, M, N, og naar G er mindre end L, da ere ogsaa G, H, K tilsammen mindre end K, M, N. Men nu ere G og G, H, K lige mangefold af A og A, C, E: Thi naar Størrelser G, H, K ere lige mangefold af lige saa mange andre Størrelser A, C, E, saa ere (1. 5) alle de første G, H, K tilsammen lige saa mangefold af alle de sidste A, C, E tilsammen tagne, som een af de første G er af een af de sidste A. Af samme Aarsag ere ogsaa L og L, M, N lige mangefold af B og B, D, F: Følgelig (5 Def. 5) forholder sig A til B, som A, C, E tilsammen forholde sig til B, D, F tilsammen. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 13 Proposition.

Theorema.

Dersom den første Størrelse har samme Forhold til den anden,

anden, som den tredie har til den fierde, og dersom den tredie har til den fierde en større Forhold end den femte har til den siette; saa skal ogsaa den første have en større Forhold til den anden, end den femte har til den siette.

Exempel. Lad den første Størrelse A have samme Forhold til den anden B, som den tredie C har til den fierde D, men lad den tredie C have en større Forhold til den fierde D, end den femte E har til den siette F: Saa siger jeg, at den første A har ogsaa en større Forhold til den anden B end den femte E har til den siette F.

Construction. Tag M, G, H lige mangefold af de foregaaende A, C, E, og tag ligeledes N, K, L lige mangefold af de efterfølgende B, D, F.

Demonstration. Fordi nu A forholder sig til B som C til D (efter Hyp.), saa følger (5 Def. 5), at naar G er større end K, saa maae M nødvendig ogsaa være større end N. Og fordi C har en større Forhold til D, end E har til F, saa kand det skee (6 Def. 5) at G er vel større end K, men H ikke større end L. Derfore kand det ogsaa skee, at M er vel større end N, men H ikke større end L. Følgelig (7 Def. 5) har A en større Forhold til B end E har til F. Hvilket var det, som skulde bevises.

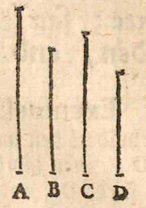
Den 14 Proposition.

Theorema.

Dersom fire Størrelser ere Proportionale, og den første er større end den tredie, saa er den anden ogsaa større end den fierde; og om den første er mindre end den tredie, saa skal den anden ogsaa være mindre end den fierde; og om den første er lige saa stor som den tredie, saa skal den anden ogsaa være lige saa stor som den fierde.

 Exem-

Exempel. Lad A forholde sig til B, som C til D og lad for det første A være større end C, saa siger jeg, at B er ogsaa større end D.



Demonstration. Eftersom A er større end C, og B er en tredie Størrelse; saa har (8. 5) A en større Forhold til B end C har til B. Men A har samme Forhold til B, som C har til D; følgelig (13. 5) skal C ogsaa have en større Forhold til D end samme C har til B. Men (10. 5) af toe Størrelser skal den, til hvilken een og den samme har en større Forhold, være den mindste. Følgelig er D mindre end B. Altsaa er B ogsaa større end D.

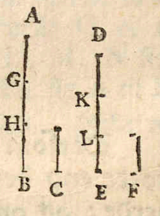
Paa samme Maade bevises ogsaa, at naar A er mindre end C, saa er B ogsaa mindre end D, og naar A er lige saa stor som C, saa er B ogsaa lige saa stor som D. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 15 Proposition.

Theorema.

Deele forholde sig til hinanden, lige som deres lige mangefold, saa fremt de lignes sammen, som svare til hinanden.

Exempel. Lad AB og DE være lige mangefold af C og F: Saa siger jeg, at C forholder sig til F, ligesom AB forholder sig til DE.



Demonstration. Eftersom AB er lige saa mangefold af C, som DE er af F, saa ere der saa mange Størrelser i AB, saa store som C, som der ere Størrelser i DE, saa store som F. Lad da AB blive deelt i de Størrelser AG, GH, HB, som ere hver for sig saa store som C, og lad ligeledes DE blive deelt i de Størrelser DK, KL, LE, som ere saa store som F. Og fordi AG, GH, HB ere lige store med hinanden, og lige-

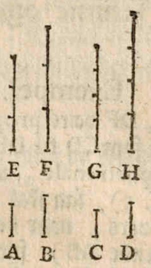
ligeledes DK, KL, LE: saa forholder sig (7. 5) AG til DK, som GH til KL og som HB til LE: Og altsaa skal (12. 5) alle de foregaaende forholde sig til alle de efterfølgende, som een af de foregaaende forholder sig til en af de efterfølgende. Derfore har AG samme Forhold til DK, som AB til DE. Da nu AG er lige saa stor som C og DK som F: Saa har C samme Forhold til F, som AB har til DE. Hvilket var det, som skulde beviises.

Den 16 Proposition.

Theorema.

Dersom fire Størrelser ere Proportionale, saa skal de ogsaa være Skifte-Viis (Alternatim) Proportionale.

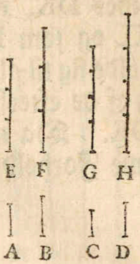
Exempel. Lad A forholde sig til B, som C til D: Saa siger jeg, at de skal ogsaa være Skifte-Viis (alternatim) Proportionale, det er (13 Def. 5), den foregaaende A skal have samme Forhold til den foregaaende C, som den efterfølgende B har til den efterfølgende D.



Construction. Tag E, F lige mangefold af A, B og tag ligeledes G, H lige mangefold af C, D

Demonstration. Fordi nu E, F ere lige mangefold af A, B og deele forholde sig til hinanden, som deres lige mangefold (15. 5), saa forholder sig E til F, som A til B. Men ligesom A forholder sig til B, saa forholder sig ogsaa C til D (efter Hyp.): Følgelig forholder sig (11. 5). E til F, som C til D. Fordi fremdeles G, H ere lige mangefold af C, D; saa (15. 5) forholder sig C til D, som G til H. Men som C forholder sig til D, saa forholder sig ogsaa E til F (som tilforne blev beviist). Følgelig forholder sig E til F som G til H (11. 5). Men naar fire Størrelser ere proportionale, og den første er større, eller lige saa stor eller mindre end den tredie, saa er den anden ogsaa større eller lige saa stor eller mindre end den fierde (14. 5). Derfore naar E er større end G, saa

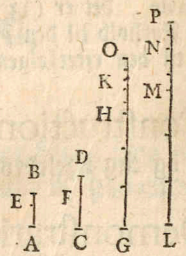
saa er F ogsaa større end H, og naar E er lige saa stor som G, saa er F ogsaa lige saa stor som H, og naar E er mindre end G, saa er F ogsaa mindre end H. Da nu E, F ere lige mangefold af A, B, og G, H ere lige mangefold af C, D: Saa forholder sig A til C, som B forholder sig til D (5 Def. 5). Hvilket var det, som skulde bevises.



Den 17 Proposition.
Theorema.

Dersom sammensatte Størrelser ere proportionale, saa ere de samme ogsaa proportionale, naar de ere deelte.

Exempel. Lad de sammensatte Størrelser AB, BE, CD, DF være proportionale, saa at AB forholder sig til BE, som CD til DF: Saa siger jeg at de skal ogsaa være proportionale, naar de blive deelte, det er (efter 16 Def. 5), saa skal AE (som er den Størrelse der bliver til overs, naar den efterfølgende BE tages fra den foregaaende AB) forholde sig til den efterfølgende BE, som CF (som er den Størrelse der bliver tilovers, naar den efterfølgende DF tages fra den foregaaende CD) forholder sig til den efterfølgende DF.



Construction. Tag GH, HK, LM, MN lige mangefold af AE, EB, CF, FD og tag KO, NP lige mangefold af EB, FD.

Demonstration. Eftersom nu GH er lige saa mangefold af AE, som HK er af EB: saa er (1. 5) GK ogsaa lige saa mangefold af AB som GH er af AE. Paa samme Maade bevises ogsaa, at LN er lige saa mangefold af CD som LM er af CF. Da nu GH er lige saa mangefold af AE, som LM er af CF (efter Constr.), saa er GK lige

saa

saa mangefold af AD, som LN er af CD: Altsaa ere GK, LN lige mangefold af AB, CD. Fordi fremdeles HK er lige saa mangefold af EB, som MN er af FD, og KO er ogsaa lige saa mangefold af EB som NP er af FD; saa er (2. 5) HO lige saa mangefold af EB som MP er af FD. Men eftersom AB forholder sig til BE som CD til DF, og GK, LN ere lige mangefold af de foregaaende AB, CD, og HO, MP ere lige mangefold af de efterfolgende BE, DF: Saa følger (5 Def. 5), at naar GK er større end HO, saa er LN ogsaa større end MP, og naar GK er er lige saa stor som HO, saa er LN ogsaa lige saa stor som MP, og naar GK er mindre end HO, saa er LN ogsaa mindre end MP. Naar altsaa den fælles Størrelse HK tages baade fra GK og fra HO, og den fælles Størrelse MN tages baade fra GN og fra MP, saa følger ogsaa, at naar den øvrige GH er større end den øvrige KO, saa er den øvrige LM ogsaa større end den øvrige NP, og naar GH er saa stor som KO, saa er LM ogsaa saa stor som NP, og naar GH er mindre end KO, saa er LM ogsaa mindre end NP. Da nu GH og LM ere lige mangefold af AE og CF, og KO og NP ere lige mangefold af EB og FD: Saa forholder sig AE til EB, som CF til FD (5 Def. 5). Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

De Størrelser AB, BE, CD, DF, kaldes sammensatte, fordi de foregaaende AB, BD indbefatte de efterfølgende BE, DF.

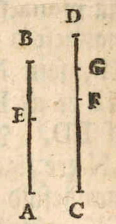
Den 18 Proposition.

Theorema.

Naar deelte Størrelser ere Proportionale, saa skal de ogsaa være Proportionale, naar de ere sammensatte.

Exempel. Lad de deelte Størrelser AE, EB, CF, FD være proportionale, saa at AE forholder sig til EB som CF til FD; saa siger jeg, at de skal ogsaa være proportionale, naar de ere sammensatte, det er (15 Def. 5), AB, som er sammensat af den foregaaende og efterfølgende, skal forholde sig til den efterfølgende EB, som CD, der er sammensat af den foregaaende og efterfølgende, forholder sig til den efterfølgende FD.

Demonstration. Thi hvis AB ikke forholder sig til BE som CD forholder sig DF, saa maae AB forholde sig til BE, som CD forholder sig til en Størrelse, som er enten større eller mindre end DF.

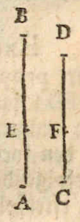


Lad for det første AB forholde sig til BE, som CD til en Størrelse DG, som er mindre end DF. Saa skal disse Størrelser ogsaa være Proportionale, naar de ere deelte (17. 5): Altsaa forholder sig AE til EB som CG forholder sig til GD. Da nu AE forholder sig til EB, som CF til FD (efter Hyp.), saa (11. 5) forholder sig ogsaa CG til GD, som CF til FD. Efterdi nu den første CG er større end den tredie CF; saa er (14. 5) den anden DG ogsaa større end den fierde DF; Men den er ogsaa mindre, som er u-mueligt. Altsaa kand AB ikke forholde sig til BE, som CD forholder sig til en Størrelse, som er mindre end FD. Paa samme Maade kand og bevises, at AB kand ikke forholde sig til BE, som CD til en Størrelse, der er større end DF. Derfore forholder sig AB til BE, som CD til DF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 19 Proposition.
Theorema.

Naar en heel Størrelse forholder sig til en anden heel Størrelse, som en fratagen forholder sig til en fratagen; Saa skal og den øvrige forholde sig til den øvrige, som den heele til den heele.

Exempel. Lad den heele Størrelse AB forholde sig til den heele CD, som den fratagne AE forholder sig til den fratagne CF: Saa siger jeg at den øvrige EB forholder sig til den øvrige FD, som den heele AB til den heele CD.



Demonstration. Eftersom AB forholder sig til CD, som AE til CF, saa forholder sig ogsaa Skifte-Viis (16. 5) AB til AE, som CD til CF. Men naar sammensatte Størrelser ere proportionale, saa ere de ogsaa proportionale, naar de ere deelte (17. 5). Følgelig forholder sig EB til AE som FD til CF og altsaa forholder sig Skifte-Viis EB til FD, som AE til CF. Da nu AE forholder sig til CF, som AB til CD (efter Hyp.); saa forholder sig ogsaa (11. 5) EB til FD som AB forholder sig til CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium.

Heraf følger, at naar fire Størrelser AB, AE, CD, CF ere proportionale, saa at AB forholder sig til AE, som CD til CF, saa skal de ogsaa ved Omvending (Convertendo) være proportionale, det er (17 Def. 5), den foregaaende AB skal forholde sig til EB (som er den Størrelse der bliver tilovers, naar den efterfølgende AE tages fra den foregaaende AB), som den foregaaende CD forholder sig til FD (som er den Størrelse der bliver tilovers, naar den efterfølgende tages fra den foregaaende.)

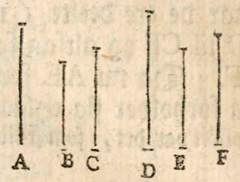
Thi eftersom AB forholder sig til AE, som CD til CF; saa skal de ogsaa være Skifte-Viis proportionale (16. 5). Følgelig er AB til CD som AE til CF: Altsaa (19. 5) forholder sig ogsaa AB til CD som EB til FD, og Skifte-Viis forholder sig AB til EB som CD til FD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 20 Proposition.

Theorema.

Dersom der ere tre Størrelser og lige saa mange andre, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe, og den første er større end den tredie: Saa skal ogsaa den fierde være større end den siette; og om den første er mindre end den tredie, saa skal ogsaa den fierde være mindre end den siette; og om den første er lige saa stor som den tredie, saa skal ogsaa den fierde være lige saa stor som den siette.

Exempel. Lad der være tre Størrelser A, B, C og lige saa mange andre D, E, F, og lad dem have samme Forhold til hinanden, toe til toe, saa at A forholder sig til B, som D til E, og at B forholder sig til C som E til F: Saa siger jeg, at naar A er større end C, saa er D ogsaa større end F, og naar A er mindre end C, saa er D ogsaa mindre end F, og naar A er lige saa stor som C, saa er D ogsaa lige saa stor som F.



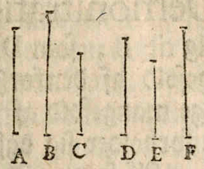
Demonstration. Først lad A være større end C. Saa har A en større Forhold til B end C har til samme B (8. 5). Da nu A forholder sig til B, som D til E, saa har D ogsaa en større Forhold til E end C har til B (13. 5). Men fordi B forholder sig til C, som E til F, saa (Cor. 4. 5) forholder sig ogsaa ved omvending C til B, som F til E. Følgelig har ogsaa D en større Forhold til E end F har til E, og derfore (10. 5) er D større end F. Paa samme Maade kand man bevise; at naar A er mindre end C, saa er ogsaa D mindre end F, og naar A er lige saa stor som C, saa er ogsaa D lige saa som F. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 21 Proposition.

Theorema.

Dersom der ere tre Størrelser og lige saa mange andre, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe, saaledes at deres Proportion er u-ordentlig, og dersom den første er større end den tredie: Saa skal og den fierde være større end den fiette; og dersom den første er mindre end den tredie, saa skal den fierde ogsaa være mindre end den fiette; og dersom den første er lige saa stor som den tredie, saa skal ogsaa den fierde være lige saa stor som den fiette.

Exempel. Lad der være tre Størrelser A, B, C og endnu tre andre D, E, F, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe, og lad deres Proportion være u-or-u-ordentlig, saa at (20 Def. 5), A forholder sig til B, som E til F og at B forholder sig til C som D til E. Dersom nu den første A er større end den tredie C: Saa siger jeg, at den fierde D er ogsaa større end den siette F: Og dersom A er mindre end C, saa er D og mindre end F; og dersom A er lige saa stor som C, saa er og D lige saa stor som F.



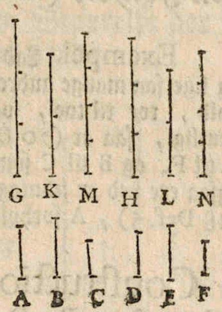
Demonstration. Dersom A er større end C, saa (8. 5) har A en større Forhold til B, end C har til B. Men A forholder sig til B som E til F; følgelig har E en større Forhold til F end C har til B (13. 5). Men fordi B har samme Forhold til C, som D til E, saa forholder sig ogsaa ved Omvending C til B som E til D (Cor. 4. 5). Følgelig har E en større Forhold til F end E har til D, og derfore (10. 5) er F mindre end D, og altsaa D større end F. Paa samme Maade kand man bevise, at naar A er mindre end C, saa er D mindre end F, og naar A er lige saa stor som C, saa er D lige saa stor som F. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 22 Proposition.

Theorema.

Dersom der ere tre eller fleere Størrelser, og lige saa mange andre, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe: Saa ere de ogsaa ved en jevntagen Forhold (ex æquo) Proportionale.

Exempel. Lad der være tre Størrelser A, B, C og tre andre D, E, F, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe, saa at A forholder sig til B, som D til E, og B forholder sig til C som E til F: Saa siger jeg, at disse Størrelser skal ogsaa ved en jevntagen Forhold være Proportionale, det er (efter 18 Def. 5), A skal forholde sig til C, som D til F.



Construction. Tag G, H lige mangefold af A, D, og K, L lige mangefold af B, E og ligeledes M, N lige mangefold af C, F.

Demonstration. Fordi nu A forholder sig til B, som D til E, og G, H ere lige mangefold af den første A og tredie D, og K, L ere lige mangefold af den anden B og fierde E: Saa forholder sig ogsaa (4. 5) G til K, som H til L. Af samme Aarsag forholder sig ogsaa K til M, som L til N. Men naar der ere tre Størrelser G, K, M og lige saa mange andre H, L, N, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe, saa følger (20. 5) at naar den første G er større end den tredie M, saa er og den fierde H større end den siette N, og naar G er mindre end M, saa er og H mindre end N, og naar G er lige saa stor som M, saa er og H lige saa stor som N. Men G, H er lige mangefold af A, D, og M, N ere lige mangefold af C, F. Følgelig har A samme Forhold til C, som D har til F (5 Def. 5). Hvilket var det, som skulde bevises.

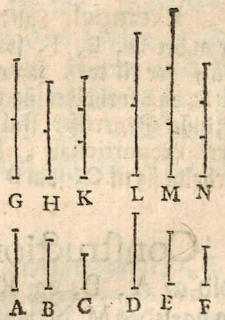
Den 23 Proposition.

Theorema.

Naar der ere tre Størrelser og lige saa mange andre, som have samme Forhold til hinanden, toe til toe, og deres Forhold er u-ordentlig: Saa ere de ogsaa ved en jevntagen Forhold (ex æquo) Proportionale.

Exempel. Lad der være tre Størreser A, B, C, og lige saa mange andre D, E, F, som have samme Forhold, toe til toe, og lad deres Forhold være u-ordentlig, saa at (20 Def. 5) A forholder sig til B, som E til F, og B til C som D til E: Saa siger jeg, at de ogsaa ere ved en jevntagen Forhold proportionale, det er (18 Def. 5), A forholder sig til C, som D til F.

Construction. Tag G, H, L lige mangefold af A, B, D, og ligeledes K, M, N lige mangefold af C, E, F.



De-

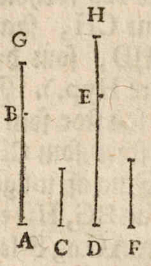
Demonstration. Eftersom G, H er lige mangefold af A, B, og Deele forholde sig imod hinanden som deres lige mangefold (15. 5), saa forholder sig A til B, som G til H. Af samme Aarsag forholder sig ogsaa E til F, som M til N. Da nu A forholder sig til B som E til F; saa forholder sig ogsaa G til H, som M til N (11. 5). Og fordi B forholder sig til C, som D til E, og H, L ere lige mangefold af B, D og K, M ere lige mangefold af C, E; saa forholder sig ogsaa (4. 5) H til K, som L til M. Men G forholder sig og til H, som M til N (som tilforne blev beviist). Altsaa ere der tre Størrelser G, H, K, og lige saa mange andre L, M, N, som have samme Forhold imod hinanden, toe imod toe, og deres Forhold er u-ordentlig: Følgelig (21. 5) naar G er større end K, saa er ogsaa L større end N, og naar G er mindre end K, saa er ogsaa L mindre end N, og naar G er lige saa stor som K, saa er og L lige saa stor som N. Men G, L ere lige mangefold af A, D og K, N ere lige mangefold af C, F. Følgelig forholder sig A til C, som D til F. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 24 Proposition.

Theorema.

Dersom den første Størrelse har samme Forhold til den anden, som den tredie har til den fierde, og den femte har samme Forhold til den anden, som den siette har til den fierde; saa har ogsaa den Størrelse, som er sammensat af den første og femte samme Forhold til den anden, som den Størrelse der er sammensat af den tredie og siette, har til den fierde.

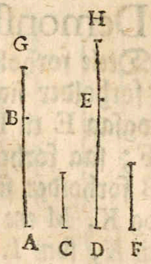
Exempel. Lad den første AB forholde sig til den anden C, som den tredie DE forholder sig til den fierde F, og lad den femte BG forholde sig til den anden C, som den siette EH forholder sig til den fierde F: Saa siger jeg, at AG, som er sammensat af den første og fierde, forholder sig til den anden C, som DH, der er sammensat af den tredie og siette, forholder sig til den fierde F.



Demonstration. Eftersom BG forholder

sig

sig til C, som EH til F; saa forholder sig ogsaa ved omvending C til BG, som F til HE (Cor. 4. 5). Og fordi AB forholder sig til C som DE til F, og C forholder sig til BG som F til HE, saa forholder sig ogsaa ved en jevntagen Forhold AB til BG som DE til EH (22. 5). Men naar deelte Størrelser ere proportionale, saa er de ogsaa proportionale, naar de ere sammensatte (18. 5); følgelig forholder sig AG til GB som DH til HE. Men GB forholder sig til C, som HE til F. Derfore forholder sig ved en jevntagen Forhold (22. 5) AG til C som DH til F. Hvilket var det, som skulde bevises.

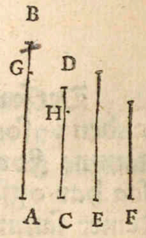


Den 25 Proposition.

Theorema.

Naar fire Størrelser ere proportionale: Saa skal den største og mindste af dem være tilsammen større end de toe øvrige.

Exempel. Lad de fire Størrelser AB, CD, E, F være proportionale, saa at AB forholder sig til CD, som E til F, og lad AB være den største og F den mindste af dem: Saa siger jeg, at AB og F ere tilsammen større end CD og E tilsammen.



Demonstration. Giør AG saa stor som E og CH saa stor som F. Fordi nu AB forholder sig til CD, som E til F, og E er lige saa stor som AG, og F som CH, saa forholder sig AB til CD som AG til CH. Og fordi den heele AB forholder sig til den heele CD, som den fratagne AG til den fratagne CH, saa forholder sig ogsaa (19. 5) den øvrige GB til den øvrige HD, som den heele AB til den heele CD. Men AB er større end CD (efter Hyp.). Følgelig er og BG større end HD. Eftersom da AG er lige saa stor som E, og CH er saa stor som F, saa ere AG, F tilsammen saa store som CH, E tilsammen. Men naar man legger lige store Ting til Ting af u-lige Størrelse, saa blive de heele af u-lige Størrelser: Fordi altsaa BG, HD ere af u-lige Størrelse og BG er større end HD, saa følger, at naar AG og F legges til BG, og CH, E legges til HD, saa ere AB og F tilsammen større end CD, E tilsammen. Hvilket var det, som skulde bevises.

Eucli-

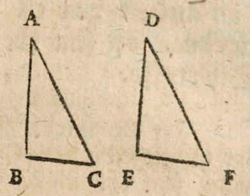
EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Siette Bog.

Definitiones (Forklaringer.)

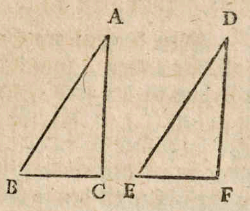
1. Ret-Linede Figurer kaldes Ligeskikkede (Similes), naar alle Vinkler udi den eene ere hver i sær lige saa store som alle Vinkler udi den anden Figur, og naar Siderne omkring de lige store Vinkler ere proportionale.

For Exempel: Toe Triangler ABC, DEF kaldes Ligeskikkede, naar Vinklen A er lige saa stor som Vinklen D, og Vinklen B er lige saa stor som Vinklen E, og Vinklen C er lige saa stor som Vinklen F og naar fremdeles AB forholder sig til BC, som DE til EF, og BC forholder sig til CA, som EF til FD og CA forholder sig til AB, som FD til DE.



2. Naar udi toe Figurer fire Sider ere saaledes proportionale, at en Side udi den ene Figur forholder sig til en Side udi den anden Figur, som en anden Side udi den anden Figur forholder sig til en anden Side udi den første Figur; saa siges samme Sider, at være reciproce (frem og tilbage) proportionale.

For Exempel: Naar udi tvende Triangler ABC, DEF, en Side BC forholder sig til EF, som FD til CA, saa siges disse fire Sider at være reciproce eller frem og tilbage proportionale.

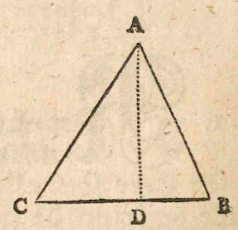


3. En ret Linie siges at være skaaren i en yderst og mellemst Forhold (secundum extremam & mediam rarionem), naar

den er saaledes skaaren udi toe u-lige Stykker, at den heele Linie forholder sig til det større Stykke, som det større Stykke forholder sig til det mindre Stykke. Hvorledes man skal skiære en Linie udi yderst og mellemst Forhold, bliver viist udi denne Bogs 30 Proposition.

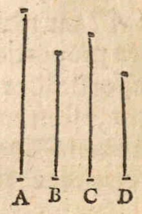
4. **Høyden** af en Figur (Altitudo Figuræ) kaldes den Perpendicular Linie, som drages fra Figurens Top eller Spidse ned paa Grund-Linien.

For Exempel: Høyden af denne Triangel ABC er den perpendicular Linie AD, som er dragen fra Toppen A ned paa Grund-Linien CB.



5. Naar tre eller fleere Størrelser følge i Rad efter hinanden, saa siges den Forhold, som den første har til den sidste, at være sammensat af de Forhold, som den første har til den anden, og som den anden har til den tredie, og som den tredie har til den fierde, og saa fremdeles, indtil man kommer til den sidste Størrelse.

For Exempel: Den Forhold, som den første Linie A har til den tredie Linie C, siges at være sammensat af den Forhold, som A har til B, og af den Forhold, som B har til C; enten de Linier A, B, C have samme Forhold til hinanden eller ikke. Ligeledes siges den Forhold, som A har til den fierde Linie D, at være sammensat af den Forhold, som den første A har til den anden B, og af den Forhold, som B har til C, og af den Forhold som C har til D; enten de fire Linier A, B, C, D have samme Forhold til hinanden eller ikke.



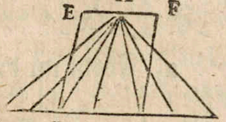
Men dersom tre Størrelser ere proportionale, saa at den første forholder sig til den anden, som den anden til den tredie, saa bliver den Forhold, som den første har til den tredie, kaldet dupleret imod den Forhold, som den første har til den anden (see 10 Def. 5); og naar fire Størrelser ere proportionale, saa at den første forholder sig til den anden, som den anden til den tredie, og den anden forholder sig til den tredie, som den tredie til den fierde, saa bliver den Forhold, som den første har til den fierde, kaldet tripleret imod den Forhold, som den første har til den anden (see 11 Def. 5).

Den

Den I Proposition.
Theorema.

Triangler og Parallelogrammer, som have en og den samme Høyde, forholde sig til hinanden, ligesom deres Grund-Linier.

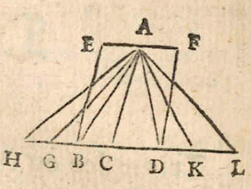
Exempel. Lad ABC, ACD være toe Triangler, og EC, CF toe Parallelogrammer, som have en og den samme Høyde, nemlig perpendicular Linien, som bliver dragen fra Punkten A ned paa Grund-Linien BD: Saa siger jeg, at ligesom Grund-Linien BC forholder sig til Grund-Linien CD, saa forholder sig Trianglen ABC til Trianglen ACD, og ligeledes Parallelogrammet EC til Parallelogrammet CF.



Construction. Man drager BD længere ud til begge Sider hen til H og L. I den rette Linie BH tages en eller fleere Linier, saasom BG, GH saa store som Grund-Linien BC. Ligeledes tages i den rette Linie DL, saa mange Linier man vil, saa store som CD, saasom de toe DK, KL. Endelig drages de rette Linier AG, AH, AK, AL.

Demonstration. Fordi nu CB, BG, GH ere lige store, saa (38. 1) ere ogsaa Trianglerne ABC, AGB, AHG lige store. Følgelig er Grund-Linien CH lige saa mangefold af Grund-Linien BC, som Trianglen AHC er af Trianglen ABC. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at Grund-Linien CL er lige saa mangefold af Grund-Linien CD, som Trianglen ACL er af Trianglen ACD. Altsaa har man her fire Størrelser, nemlig de tvende Grund-Linier BC, CD og de tvende Triangler ABC og ACD; og Grund-Linien CH og Trianglen AHC ere lige mangefold af den første og tredie Størrelse nemlig af Grund-Linien BC og Trianglen ABC; og Grund-Linien CL og Trianglen ACL ere lige mangefold af den anden og fierde Størrelse, nemlig

lig af Grund-Linien CD og Trianglen ACD. Men (38. 1) naar CH er lige saa stor som CL, saa er Trianglen AHC ogsaa lige saa stor som Trianglen ACL, og naar CH er større end CL, saa er Trianglen AHC ogsaa større end Trianglen ACL, og naar CH er mindre end CL, saa er Trianglen AHC ogsaa mindre end Trianglen ACL. Følgelig (5 Def. 5) ligesom Grund-Linien BC forholder sig til Grund-Linien CD, saa forholder sig ogsaa Trianglen ABC til Trianglen ACD. Hvilket (1) var at bevise.



2. Fordi nu Parallelogrammet EC er dobbelt saa stort som Trianglen ABC, og Parallelogrammet CF er dobbelt saa stort som Trianglen ACD, og Deele forholde sig til hinanden, som deres lige mangefold (15. 5); saa forholder sig Trianglen ABC til Trianglen ACD som Parallelogrammet EC til Parallelogrammet CF. Men Trianglen ABC forholder sig til Trianglen ACD som Grund-Linien BC forholder sig til Grund-Linien CD, som først blev beviist. Følgelig (11. 5) forholder sig Parallelogrammet EC til Parallelogrammet CF, som Grund-Linien BC forholder sig til Grund-Linien CD. Hvilket (2) var at bevise.

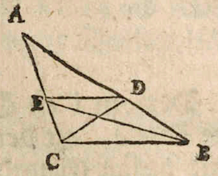
Den 2 Proposition.

Theorema.

Dersom en ret Linie bliver dragen parallel med en af Siderne udi en Triangel: Saa skal samme Linie skiære Triangelens øvrige Sider proportional. Og dersom toe Sider udi en Triangel ere skaarne proportional; saa skal den rette Linie, som sammenføyer Skiærings Punkterne, være parallel med Triangelens øvrige Side.

Exempel. Lad udi Trianglen ABC den rette Linie ED være dragen parallel med Triangelens Side CB: Saa siger jeg, at Triangelens øvrige Sider AB og AC ere

ere skaarne proportional, saa at BD forholder sig til DA, som CE til EA.



Demonstration. Naar man drager de rette Linier EB og DC, saa faaer man toe Triangler BDE og CDE, som (37. 1) ere lige store, fordi de staaer paa en og den samme Grund-Linie ED og imellem samme parallel-Linier ED, CB. Da nu (7. 5) lige store Størrelser have en og den samme Forhold til en og den samme Størrelse; saa forholder sig Trianglen BDE til Trianglen ADE, som Trianglen CDE forholder sig til Trianglen ADE. Men (1. 6) Trianglen BDE forholder sig til Trianglen ADE, som BD til DA, thi disse toe Triangler EBD, ADE have en og den samme Høyde, nemlig perpendicular-Linien, som drages fra Punkten E ned paa AB. Af selv samme Aarsag forholder sig ogsaa Trianglen CDE til Trianglen ADE, som CE til EA. Følgelig (11. 5) forholder sig BD til DA, som CE til EA. Hvilket (1) var at bevise.

2. Lad Siderne AB, AC af Trianglen ABC være skaarne proportional i Punkterne E og D, saa at BD forholder sig til DA, som CE til EA, og lad DE blive dragen: Saa siger jeg, at DE er parallel med BC.

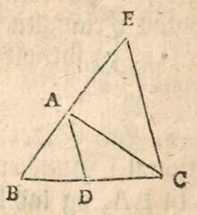
Drag, som tilforn, de tvende Linier EB, DC. Eftersom nu BD forholder sig til DA, som CE til EA, og (1. 6) BD forholder sig til DA, som Trianglen BDE til Trianglen ADE, og CE forholder sig til EA som Trianglen CDE til Trianglen ADE: Saa forholder sig ogsaa (11. 5) Trianglen BDE til Trianglen ADE som Trianglen CDE til Trianglen ADE. Altsaa have de toe Triangler BDE, CDE en og den samme Forhold til Trianglen ADE; følgelig (9. 5) er Trianglen BDE lige saa stor som Trianglen CDE og de staae begge paa en og den samme Grund-Linie ED. Men naar lige store Triangler staae paa en og den samme Grund-Linie, saa ere de ogsaa imellem samme Parallel-Linier (39. 1). Følgelig er DE Parallel med BC. Hvilket (2) var at bevise.

Den 3 Proposition.

Theorema.

Dersom i en Triangel en Vinkel bliver skaaren i toe lige store Deele, og den rette Linie, som skiærer Vinklen, skiærer tillige ogsaa Grund-Linien: Saa skal Grund-Liniens Stykker have samme Forhold til hinanden, som Trianglens øvrige Sider. Og dersom Grund-Liniens Stykker have samme Forhold til hinanden, som Trianglens øvrige Sider: Saa skal den rette Linie, som drages fra Skiærings-Punkten til den imodstaaende Vinkels Spidse, skiære samme Vinkel i toe lige store Deele.

Exempel. Lad ABC være en Triangel og lad den rette Linie AD skiære Vinklen BAC i toe lige store Deele: Saa siger jeg, at BD forholder sig DC, som BA forholder sig til AC.



Construction. Igiennem Punkten C drages (31. 1) en ret Linie CE parallel med DA og den rette Linie BA drages længere ud, indtil den skiærer CE i Punkten E.

Demonstration. Fordi AD og EC ere parallele, og AC falder paa dem, saa er Vinklen ACE lige saa stor som Vinklen CAD (29. 1). Da nu Vinklen CAD er (efter Hyp.) lige saa stor som Vinklen BAD; saa er Vinklen ACE ogsaa lige saa stor som Vinklen BAD. Fordi fremdeles AD og EC ere parallele, og BE falder paa dem, saa er (29. 1) den udvendige Vinkel BAD lige saa stor som den indvendige og imodsatte Vinkel AEC. Men Vinklen ACE er ogsaa lige saa stor som Vinklen BAD, som tilforn blev beviist. Følgelig er Vinklen ACE lige saa stor som Vinklen AEC, og derfore (6. 1) er AE lige saa stor som AC. Og fordi udi Trianglen BEC den rette Linie AD er parallel med een af Trianglens Sider, nemlig med EC: Saa (2. 6) forholder sig

sig BD til DC som BA til AE. Da nu AE er saa stor som AC; saa (7. 5) forholder sig BD til DC som BA til AC. Hvilket (1) var at bevise.

2. Lad nu BD forholde sig til DC som BA til AC og lad AD blive dragen: Saa siger jeg, at den rette Linie AD deeler Vinklen BAC toe lige store Deele.

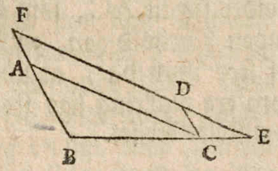
Thi man igientager her den forrige Construction. Eftersom da BD forholder sig til DC som BA til AC, og (2. 6) BD forholder sig ogsaa til DC, som BA til AE (thi AD er (efter Constr.) parallel med den Side EC): Saa forholder sig (11. 5) BA til AE, som BA til AC. Folgelig (9. 5) er AE lige saa stor som AC. Derfore (5. 1) er Vinklen AEC lige saa stor som Vinklen ACE. Men (29. 1) Vinklen AEC er lige saa stor som den udvendige Vinkel BAD og Vinklen ACE er saa stor som Vexel-Vinklen CAD. Folgelig er Vinklen BAD lige saa stor som Vinklen CAD. Altsaa er den Vinkel BAC deelt i toe lige store Deele ved den rette Linie AD. Hvilket (2) var at bevise.

Den 4 Proposition.

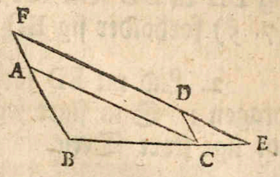
Theorema.

Dersom Triangler have lige store Vinkler: Saa skal Siderne omkring de lige store Vinkler være proportionale; og de Sider skal være lige i Forhold, som staae imod lige store Vinkler.

Exempel. Lad ABC og DCE være Triangler, som have lige store Vinkler, nemlig Vinklen ABC lige saa stor som Vinklen DCE, og Vinklen ACB saa stor som Vinklen DEC, og Vinklen CAB saa stor som Vinklen EDC: Saa siger jeg, at Siderne omkring de lige store Vinkler ere proportionale, nemlig BA forholder sig til BC som CD til CE, og BC forholder sig til CA, som CE til ED, og AB forholder sig til AC, som DC til DE.



De-



Demonstration. Man sætter BC og CE sammen i en ret Linie. Fordi nu (17. 1) Vinklerne ABC og ACB ere tilsammen mindre end toe rette Vinkler, og Vinklen DEC er lige saa stor som Vinklen ACB; saa ere de Vinkler ABC og DEC tilsammen mindre end toe rette Vinkler. Følgelig (11 Ax.) skal de rette Linier AB og ED støde sammen, naar de blive uddragne. Lad dem altsaa blive uddragne, indtil de støde sammen i Punkten F.

Eftersom nu Vinklen DCE er saa stor som Vinklen ABC, saa er BF parallel med CD (28. 1). Ligeledes fordi Vinklen ACB er saa stor som Vinklen DEC, saa er AC parallel med FE (28. 1). Følgelig er ACDF et Parallelogram, og derfore (34. 1) er FA lige saa stor som DC, og FD saa stor som AC. Fordi nu udi Trianglen BFE den rette Linie AC er parallel med Siden FE, saa (2. 6) forholder sig BA til AF, som BC til CE. Følgelig efterdi AF er saa stor som CD, saa (7. 5) forholder sig BA til CD, som BC til CE; altsaa (16. 5) forholder sig ogsaa Skifte-Viis BA til BC som CD til CE.

Fordi fremdeles i Trianglen BFE den rette Linie CD er parallel med Siden BF; saa forholder sig (2. 6) BC til CE som FD til DE. Da nu FD er lige saa stor som AC, saa (7. 5) forholder sig BC til CE, som AC til DE; følgelig (16. 5) forholder sig ogsaa Skifte-Viis BC til AC, som CE til DE.

Fordi altsaa AB forholder sig til BC, som DC til CE, og BC forholder sig til AC, som CE til ED, saa forholder sig ogsaa ved en jevntagen Forhold (22. 5) AB til AC, som CD forholder sig til DE. Heraf seer man da, at udi de tvende Triangler ABC, DCE de Sider, som ere omkring lige store Vinkler, ere proportionale. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

Den første og tredie af fire proportionale Størrelser kaldes lige i Forhold, og lige saa den anden og fierde (12 Def. 5). Efterdi nu AB forholder sig til BC som DC til CE, saa ere AB og DC lige i Forhold, og ligeledes BC og CE; og fordi

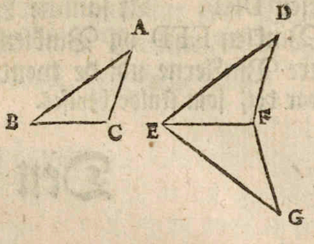
BC

BC forholder sig til CA, som CE til ED, saa ere ogsaa CA og ED lige i Forhold. Men nu staaer AB og DC imod de lige store Vinkler ACB og DEC; og BC, CE staae imod de lige store Vinkler BAC og CDE; og AC, DE imod de lige store Vinkler ABC og DCE. Altsaa seer man, at udi de tvende Triangler ABC og DCE de Sider ere lige i Forhold, som staae imod lige store Vinkler.

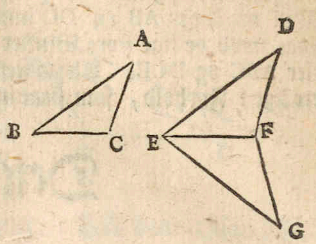
Den 5 Proposition.
Theorema.

Dersom Siderne i tvende Triangler ere proportionale: Saa skal Vinklerne i samme Triangler være lige store; og de Vinkler skal være lige store, som staae imod de Sider, der ere lige i Forhold.

Exempel. Lad ABC, DEF være toe Triangler, udi hvilke Siderne ere proportionale, saa at AB forholder sig til BC som DE til EF, og BC forholder til CA som EF til FD, og AB forholder sig til AC som DE til DF: Saa siger jeg, at Vinklerne i Trianglen ABC skal være lige saa store som Vinklerne i Trianglen DEF, saaledes at de Vinkler skal være lige store med hinanden, som staae imod Sider, som ere lige i Forhold, nemlig Vinklen ABC skal være lige saa stor som Vinklen DEF, og Vinklen BCA saa stor som Vinklen EFD, og endelig Vinklen BAC saa stor som Vinklen EDF.



Construction og Demonstration. Paa EF og udi Punkterne E og F afsættes (23. 1) en Vinkel FEG saa stor som Vinklen ABC og en anden Vinkel EFG saa stor som Vinklen BCA: Saa er (32. 1) den øvrige Vinkel EGF lige saa stor som den øvrige BAC. Altsaa ere Vinklerne i de tvende Triangler ABC og GEF lige store; følgelig (4. 6) ere i bemeldte Triangler Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale og de Sider ere lige i Forhold, som staae imod lige store Vinkler. Altsaa forholder sig AB til BC, som GE til EF. Da nu (efter Hyp.) AB forholder sig til BC, som DE til EF; saa (11. 5) forholholder sig ogsaa GE til EF som DE til EF. Følgelig have DE og GE samme Forhold til EF og derfore (9. 5) er DE saa stor som GE. Paa samme Maade bevises ogsaa, at DF er saa stor som GF. Følgelig ere udi de tvende Triangler DEF og GEF toe Sider DE, DF hver i sær saa store som toe Sider GE, GF og Grund-Linien EF er tilfælles. Derfore (8. 1) er Vinklen EDF saa stor som Vinklen EGF. Heraf følger da videre (4. 1), at Vinklen DFE er ogsaa lige saa stor som Vinklen GFE, og Vinklen DEF saa stor som Vinklen GEF. Efterdi nu Vinklen GEF er saa stor som Vinklen ABC, og samme Vinkel GEF er ogsaa saa stor som Vinklen DEF; saa (1 Ax.) er Vinklen ABC saa stor som Vinklen DEF. Af samme Aarsag er ogsaa Vinklen BCA saa stor som Vinklen EFD og Vinklen BAC saa stor som Vinklen EDF. Altsaa ere Vinklerne udi de tvende Triangler ABC og DEF lige store. Hvilket var det, som skulde bevises.

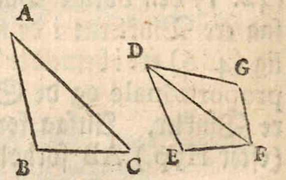


Den 6 Proposition.

Theorema.

Dersom udi tvende Triangler en Vinkel udi den ene er lige saa stor som en Vinkel udi den anden, og Siderne omkring de lige store Vinkler ere proportionale: Saa skal ogsaa de øvrige Vinkler udi den ene Triangel være lige saa store som de øvrige Vinkler udi den anden Triangel; og de Vinkler skal være lige store, som staae imod Sider, som ere lige i Forhold.

Exempel. Lad udi de tvende Triangler ABC, DEF den Vinkel BAC være lige saa stor som den Vinkel EDF, og lad Siderne omkring disse lige store Vinkler være proportionale, nemlig lad BA forholde sig til AC som ED til DF (saa ere AB og DE lige i Forhold og lige saa AC, DF): Jeg siger da, at Vinklerne ACB, DFE



som

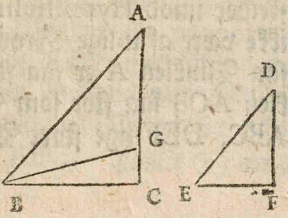
som staae imod Siderne AB og DE, ere lige store, og ligeledes Vinklerne ABC og DEF, som staae imod de Sider AC og DF.

Construction og Demonstration. Paa DF og udi Punkten D afsættes (23. 1) en Vinkel FDG saa stor som en af de tvende lige store Vinkler BAC, EDF; og udi Punkten F afsættes en Vinkel DFG saa stor som Vinklen ACB. Saa (32. 1) er den øvrige Vinkel B lige saa stor som den øvrige Vinkel G. Altsaa have Trianglerne ABC, DFG lige store Vinkler og derfore (4. 6) forholder sig BA til AC som GD til DF. Da nu BA forholder sig til AC, som ED til DF, saa forholder sig (11.5) ED til DF som GD til DF: Følgelig (9. 5) er ED saa stor som DG. Da nu ogsaa DF er en fælles Side og Vinklen EDF er saa stor som Vinklen FDG (efter Constr.); saa er (4. 1) Vinklen DFE saa stor som Vinklen DFG og Vinklen E saa stor som Vinklen G. Men nu er Vinklen DFG saa stor som Vinklen ACB, og Vinklen G saa stor som Vinklen B; Følgelig er ogsaa Vinklen DFE saa stor som Vinklen ACB, og Vinklen E saa stor som Vinklen B. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 7 Proposition.

Theorema.

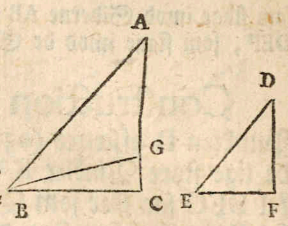
Dersom udi toe Triangler en Vinkel udi den ene er lige saa stor som en Vinkel udi den anden, og Siderne omkring andre Vinkler ere proportionale, og de øvrige Vinkler ere begge af samme slags: Saa skal Trianglerne have lige store Vinkler; og de Vinkler skal være lige store, som indsluttes af proportionale Sider.



Exempel. Lad udi de tvende Triangler ABC, DEF den Vinkel BAC være lige saa stor som den Vinkel EDF og lad Siderne omkring toe andre Vinkler ABC, DEF være proportionale, saa at AB forholder sig til BC, som DE til EF og lad de øvrige Vinkler ACB, DFE være begge af samme slags, det er enten begge rette eller begge stumpe eller begge spidse: Saa siger jeg, at

 Vin-

Vinklerne udi Trianglen ABC skal være lige saa store som Vinklerne i Trianglen DEF, nemlig Vinklen ABC skal være saa stor som Vinklen DEF og Vinklen ACB saa stor som Vinkleu DFE.



Construction og Demonstration.

Hvis Vinklen ABC er ikke lige saa stor som Vinklen DEF, saa maa en af dem være den større. Lad Vinklen ABC holdes for at være den større, og sæt da (23. 1) til den rette Linie AB udi Punkten B en Vinkel ABG saa stor som Vinklen DEF.

Eftersom nu Vinklen A er saa stor som Vinklen D (efter Hyp.) og Vinklen ABG er saa stor som Vinklen DEF (efter Constr.), saa er (32. 1) Vinklen AGB saa stor som Vinklen DFE. Følgelig ere Vinklerne i de tvende Triangler ABG, DEF lige store og derfore (4. 6) forholder sig AB til BG som DE til EF. Men AB forholder sig ogsaa til BC som DE til EF (efter Hyp.). Følgelig (11. 5) forholder sig AB til BC, som AB til BG, og derfore (9. 5) er BC saa stor som BG og altsaa (5. 1) er Vinklen BGC lige saa stor som Vinklen BCG. Følgelig er enhver af de tvende Vinkler BGC, BCG mindre end en ret Vinkel, (thi de ere tilsammen mindre end toe rette Vinkler (17. 1) og følgelig fordi de ere lige store, saa er enhver af dem mindre end en ret Vinkel). Derfore er da (13. 1) Vinklen AGB større end en ret Vinkel. Da nu Vinklen DFE er saa stor som Vinklen AGB (som tilforn blev beviist), saa skulde Vinklen DFE ogsaa være større end en ret Vinkel, og følgeligen skulde de Vinkler ACB og DFE ikke være af samme slags, hvilket strider imod Hypothesin. Derfore kand da de Vinkler ABC, DEF ikke være af u-lige Størrelse og følgelig ere de lige store. Fordi nu ogsaa Vinklen A er saa stor som Vinklen D (efter Hyp.), saa er og Vinklen ACB saa stor som Vinklen DFE (32. 1). Altsaa have Trianglerne ABC, DEF lige store Vinkler. Hvilket var det, som skulde bevises.

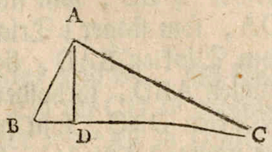
Den

Den 8 Proposition.

Theorema.

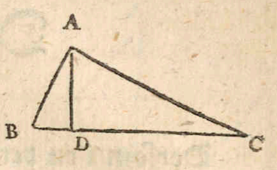
Dersom i en ret-vinkelt Triangel bliver dragen en Perpendicular-Linie fra den rette Vinkel ned paa Grund-Linien: Saa skal Trianglerne ved Perpendicular-Linien være lige skikkede med den heele Triangel, saa vel som ogsaa med hinanden.

Exempel. Lad ABC være en ret-vinkelt Triangel, hvis rette Vinkel er BAC, og lad fra Punkten A en Perpendicular-Linie AD blive dragen ned paa BC: Saa siger jeg (1) at de toe Triangler ABD, ADC ere lige skikkede med den heele Triangel ABC.



Demonstration. Eftersom Vinklen BAC er saa stor som Vinklen ADB (thi enhver af dem er en ret Vinkel), og Vinklen B er tilfælles for begge Trianglerne ABC, ABD; saa er ogsaa den øvrige Vinkel ACB lige saa stor som den øvrige Vinkel BAD. Altsaa har Trianglen ABC lige saa store Vinkler, som Trianglen ABD. Hvorfore (4. 6) BC, som staaer imod den rette Vinkel BAC udi Trianglen ABC, forholder sig til BA, som staaer imod den rette Vinkel ADB i Trianglen ABD, som AB, som staaer i Trianglen ABC imod Vinklen C, forholder sig til BD, som i Trianglen ABD staaer imod Vinklen BAD, som er saa stor som Vinklen C, og saaledes forholder sig ogsaa CA til AD, af hvilke den ene nemlig CA staaer i Trianglen ABC imod Vinklen B, og den anden nemlig AD staaer i Trianglen ABD imod samme Vinkel B. Altsaa have Trianglerne ABC, ABD lige store Vinkler og Siderne omkring de lige store Vinkler ere proportionale; følgelig (1 Def. 6) er Trianglen ABD lige skikket med Trianglen ABC. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at Trianglen ADC er lige skikket med Trianglen ABC. Følgelig ere begge de Triangler ABD og ADC lige skikkede med den heele Triangel ABC. Hvilket (1) var at bevise.

Jeg siger (2), at Trianglerne ABD, ADC ere lige skikkede med hinanden.



Thi eftersom Vinklerne ADB, ADC ere lige store, fordi de ere begge rette, og Vinklen BAD er lige saa stor som Vinklen ACD (som tilforn er beviist; saa er ogsaa (32. 1) den øvrige Vinkel ABD saa stor som den øvrige Vinkel DAC. Følgelig have Trianglerne ABD, ADC lige store Vinkler og derfore (4. 6) forholder sig BD, som staaer imod Vinklen BAD i Triangleu ABD, til DA, som staaer i Triangleu ADC imod Vinklen C, som er saa stor som Vinklen BAD, ligesom DA, som staaer imod Vinklen B udi Triangleu ABD, forholder sig til DC, som staaer i Triangleu ADC imod Vinklen DAC, som er saa stor som Vinklen B, og saaledes forholder sig ogsaa AB til AC, som staae imod de rette Vinkler ADB og ADC. Følgelig ere Trianglerne ABD, ADC lige skikkede med hinanden (1 Def. 6). Hvilket (2) var at bevise.

Corollarium.

Heraf følger da

(1) At Perpendicular-Linien AD, som udi en ret-vinkelt Triangel ABC drages fra den rette Vinkel BAC ned paa Grund-Linien BC, er den mellemste Proportionale-Linie imellem Grund-Liniens Stykker BD og DC; thi det er beviist, at BD forholder sig til DA, som DA til DC.

(2) At enhver af Siderne AB og AC er den mellemste Proportional-Linie imellem Grund-Linien BC og det Stykke af Grund-Linien, som er nærmest ved Siden, nemlig man har beviist at BC forholder sig til BA, som BA til BD, og ligeledes kand bevises, at BC forholder sig til CA, som CA til CD.

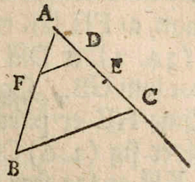
Den 9 Proposition.

Problema.

Fra en given ret Linie at afskiære hvad for en Deel, der forlanges.

Exem-

Exempel. Lad AB være den givne rette Linie: Fra hvilken man skal skiære hvad for en Deel, der forlanges, for Exempel, en tredie Deel.



Construction. Fra Punkten A drages efter Behag en ret Linie AC, saaledes at den gior en Vinkel med AB. I AC antages efter Behag en Punkt D, og DE, EC giores saa store som AD. Dernæst drages BC og igiennem D drages DF parallel med BC.

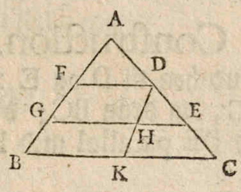
Demonstration. Fordi nu FD er parallel med BC, saa forholder sig CD til DA, som BF til FA (2. 6). Da nu CD er dobbelt saa stor som AD; saa er BF ogsaa dobbelt saa stor som AF og følgelig er AB tre gange saa stor som AF. Altsaa har man skaaren den begierte tredie Deel fra den givne rette Linie AB. Hvilket var det, som skulde giøres

Den 10 Proposition.

Problema.

At skiære en given u-skaaren ret Linie lige saadan, som en anden given ret Linie er skaaren.

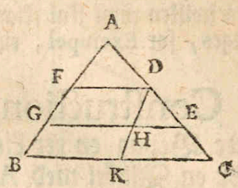
Exempel. Lad AB være den givne u-skaarne Linie, og AC den skaarne: Det begieres, at skiære AB saaledes, som AC er skaaren i de Punkter E, D.



Construction. De givne Linier AB, AC sættes saaledes sammen, at de giøre en Vinkel. Fra B til C drages en ret Linie. Igiennem Punkterne E og D drages EG og DF parallele med BC og igiennem D drages DK parallel med AB.

De-

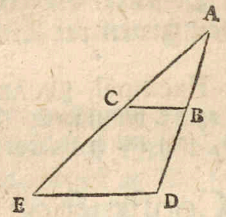
Demonstration. Af Constructionen seer man, at FH, GK ere Parallelogrammer. Følgelig (34. 1) er DH saa stor som FG, og HK saa stor som GB. Og fordi udi Trianglen DKC den Linie HE er parallel med Siden KC; saa forholder sig (2. 6) CE til ED som KH til HD. Men KH er saa stor som BG, og HD som GF: Følgelig forholder sig CE til ED som BG til GF. Fordi fremdeles FD er i Trianglen AGE dragen parallel med Trianglens Side GE, saa (2. 6) forholder sig ED til DA som GF til FA. Derfore, efterdi CE forholder sig til ED som BG til GF, og ED forholder sig til DA som GF til FA, saa er det klart, at den givne Linie AB er skaaren efter samme Proportion, som den Linie AC. Hvilket var det, som skulde giøres.



Den II Proposition.
Problema.

Til Toe givne rette Linier at finde den tredie Proportional-Linie.

Exempel. Lad AB, AC være de toe givne rette Linier, og lad dem blive sat saaledes sammen i A, at de giøre en Vinkel: Det begieres at finde den tredie Proportional-Linie til AB og AC.



Construction. Drag AB, AC længere ud hen til D og E; giør BD saa stor som AC, og drag BC; drag igiennem D en ret Linie DE parallel med BC (31. 1).

Demonstration. Fordi BC er parallel med ED, saa forholder sig (2. 6) AB til BD, som AC forholder sig CE. Men nu er BD saa stor som AC: Følgelig forholder sig AB til AC som AC til CE.

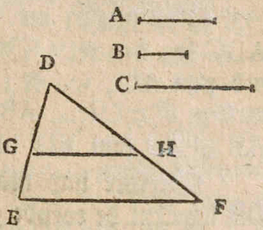
Alt-

Altsaa har man til de toe givne Linier AB, AC funden den tredie Proportional-Linie CE. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 12 Proposition.

Problema.

Til tre givne rette Linier at finde den fierde Proportional-Linie.



Exempel. Lad A, B, C være tre givne rette Linier: Det begiæres, at finde den fierde Proportional-Linie til A, B, C.

Construction. Drag efter Behag toe rette Linier DE, DF saaledes at de giøre en Vinkel med hinanden. Giør DG saa stor som A, GE saa stor som B, og DH saa stor som C, og drag GH; Drag igiennem F en Linie EF parallel med GH (31. 1)

Demonstration. Fordi GH er parallel med EF, saa forholder sig (2. 6) DG til GE, som DH til HF. Men nu er DG saa stor som A og GE saa stor som B og DH saa stor som C; følgelig forholder sig A til B som C til HF.

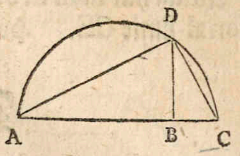
Altsaa har man fundet den fierde Proportional-Linie HF til de tre givne rette Linier A, B, C. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 13 Proposition.

Problema.

Imellem toe givne rette Linier at finde den mellemste Proportional-Linie.

Exempel. Lad AB, BC være toe givne rette Linier: Det begiæres, at finde den mellemste Proportional-Linie imellem AB og BC.



Construction. De Linier AB, BC sættes i en lige Linie sammen og paa AC beskrives en halv Cirkel ADC; paa AC af Punkten B opreyses en Perpendicular-Linie BD (11. 1), og de Linier AD, DC bliver dragne.

Demonstration. Fordi Vinklen ADC er i en halv Cirkel, saa (31. 3) er den en ret Vinkel. Og fordi i den ret-vinkelte Triangel ADC fra den rette Vinkel D er dragen en ret Linie DB perpendicular ned paa AC, saa er (Cor. 8.6) DB den mellemste Proportional-Linie imellem Stykkerne AB, BC af Grund-Linien AC: Altsaa forholder sig AB til BD som BD til BC.

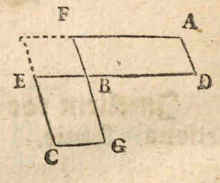
Derfore har man da funden den mellemste Proportional-Linie DB imellem de tvende givne Linier AB og BC. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 14 Proposition.

Theorema.

Dersom Parallelogrammer **ere lige store og en Vinkel udi det eene** Parallelogram **er lige saa stor som en Vinkel udi det andet; saa skal Siderne omkring de lige store Vinkler være** reciproce **(frem og tilbage)** proportionale. **Og naar i** Parallelogrammer **en Vinkel udi det ene** Parallelogram **er lige saa stor som en Vinkel udi det andet, og Siderne omkring de lige store Vinkler ere** reciproce proportionale, **saa skal** Parallelogrammerne **være lige store.**

Exempel. Lad AB, BC være lige store Parallelogrammer, udi hvilke de Vinkler DBF, EBG ere lige store: Saa siger jeg at Siderne, som ere omkring disse lige store Vinkler ere reciproce (frem og tilbage) proportionale, det er (2Def.6): DB forholder sig til BE som BG til BF.



Con-

Construction. Sæt AB, BC saaledes sammen ved deres lige store Vinkler, at DB, BE giøre en ret Linie; saa skal FB, BG ogsaa giøre en ret Linie (14. 1). Drag AF, CE længere ud, indtil de støde sammen.

Demonstration. Fordi nu Parallelogrammet AB er lige saa stort som BC, og FE er et andet Parallelogram, saa forholder sig (7. 5) AB til FE, som BC forholder sig til FE. Men AB forholder sig til FE som DB forholder sig til BE (1. 6), og BC forholder sig til FE som GB til BF: Følgelig forholder sig (11. 5) DB til BE som GB til BF. Altsaa ere Siderne omkring de lige store Vinkler i Parallelogrammerne AB, BC reciproce proportionale. Hvilket (1) var at bevise.

2.) Lad nu Siderne, som ere omkring de lige store Vinkler DBF, EBG i Parallelogrammerne AB, BC være reciproce proportionale, det er: Lad DB forholde sig til BE, som BG til BF; saa siger jeg, at Parallelogrammet AB er lige saa stort som Parallelogrammet BC.

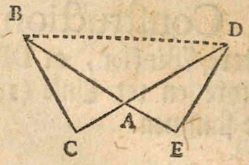
Thi eftersom DB forholder sig til BE som BG til BF og DB forholder sig ogsaa til BE, som Parallelogrammet AB til FE, og BG forholder sig til BF, som Parallelogrammet BC til FE (1. 6), saa forholder sig ogsaa AB til FE som BC til FE. Følgelig er Parallelogrammet AB lige saa stort som Parallelogrammet BC (9. 5). Hvilket (2) var at bevise.

Den 15 Proposition.

Theorema.

Dersom Triangler ere lige store, og en Vinkel udi den eene er lige saa stor som en Vinkel udi den anden Triangel, saa ere Siderne omkring de lige store Vinkler reciproce proportionale: Og dersom i Triangler en Vinkel udi den eene er lige saa stor som en Vinkel udi den anden, og Siderne omkring de lige store Vinkler ere reciproce proportionale; saa ere Trianglerne lige store.

 Exem-



Exempel. Lad de Triangler ABC, ADE være lige store og lad en Vinkel udi den eene Triangel være lige saa stor som en Vinkel udi den anden, nemlig Vinklen BAC saa stor som Vinklen DAE: Saa siger jeg, at Siderne, som i disse Triangler ere omkring de lige store Vinkler BAC, DAE ere reciproce proportionale, saa at CA forholder sig til AD som AE til AB.

Construction. Set Trianglerne ABC, ADE saaledes sammen, at CA, AD giøre en ret Linie, saa skal ogsaa BA, EA giøre en ret Linie (14. 1); drag BD.

Demonstration. Eftersom nu Trianglen ABC er lige saa stor som Trianglen ADE, og ABD er en anden Triangel, saa forholder sig Trianglen ABC til Trianglen ABD, som Trianglen ADE til Trianglen ABD (7. 5). Men Trianglen ABC forholder til Trianglen ABD som CA til AD, og Trianglen ADE forholder sig til Trianglen ABD, som EA til AB (1. 6): Følgelig forholder sig (11. 5) CA til AD som EA til AB. Altsaa ere Siderne omkring de lige store Vinkler i Trianglerne ABC, ADE reciproce proportionale. Hvilket (1) var at bevise.

2.) Lad nu Siderne omkring de lige store Vinkler BAC, DAE i Trianglerne ABC, ADE være reciproce proportionale, det er: Lad CA forholde sig til AD som EA til AB: Saa siger jeg, at Trianglen ABC er lige saa stor som Trianglen ADE.

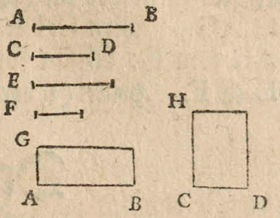
Thi eftersom CA forholder sig til AD som EA til AB, og CA forholder sig til AD, som Trianglen ABC til Trianglen ABD (1. 6), og EA forholder sig til AB som Trianglen ADE til Trianglen ABD: Saa forholder sig (11. 5) Trianglen ABC til Trianglen ABD, som Trianglen ADE til Trianglen ABD: Altsaa har Trianglerne ABC, ADE en og den samme Forhold til Trianglen ABD og følgelig er Trianglen ABC lige saa stor som Trianglen ADE (9. 5). Hvilket (2) var at bevise.

Den 16 Proposition.
Theorema.

Dersom fire rette Linier ere proportionale, saa skal den Rect-

Rectangel, som er befattet under de yderste, være lige saa stor, som den Rectangel, som er befattet under de mellemste. Og naar den Rectangel, som er befattet under de yderste, er lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under de mellemste; saa ere de fire rette Linier proportionale.

Exempel. Lad de fire rette Linier AB, CD, E, F være proportionale, saa at AB forholder sig til CD som E til F: Saa siger jeg, at den Rectangel, som er befattet under de yderste AB og F, er lige saa stor, som den Rectangel, der er befattet under de mellemste CD og E.



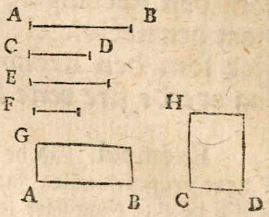
Construction. Paa de rette Linier AB, CD og fra deres Ender A og C oprettes Perpendicular-Linier AG, CH (11. 1). Dernest giores AG saa stor som F, og CH saa stor som E. Siden fuldkommes de Parallelogrammer GB, HD.

Demonstration. Fordi nu AB forholder sig til CD som E til F, og CH er saa stor som E, og AG som F: Saa forholder sig AB til CD, som CH til AG: Altsaa ere udi Parallelogrammerne GB, HD Siderne omkring de lige store Vinkler GAB, HCD reciproce proportionale (2 Def. 6). Følgelig er Parallelogrammet GB lige saa stort som HD (14. 6). Men nu er GB et ret-vinkelt Parallelogram eller en Rectangel, som er befattet under de toe yderste AB og F, thi AG er saa stor som F; og HD er en Rectangel, som er befattet under de mellemste CD og E, thi CH er saa stor som E. Altsaa er den Rectangel, som er befattet under de yderste AB, F lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under de mellemste CD, E. Hvilket (1) var at bevise.

2) Lad for det andet den Rectangel, som er befattet under AB, F, være lige saa stor som den Rectangel, der er befattet under CD, E: Saa siger jeg, at AB forholder sig til CD som E til F.

Thi lad den forrige Construction blive her igientagen: Eftersom da Rectanglen under AB, F skal være lige saa stor som Rectanglen under

under CD, E, og Rectanglen GB er befattet under AB, F, thi AG er saa stor som F, og Rectanglen HD er befattet under CD, E, thi CH er saa stor som E: Saa er Parallelogrammet GB lige saa stort som Parallelogrammet HD, og de have lige store Vinkler GAB, HCD: Altsaa forholder sig (14. 6) AB til CD som CH til AG. Men CH er lige saa stor som E, og AG som F: Altsaa forholder sig AB til CD som E til F. Hvilket (2) var at bevise.

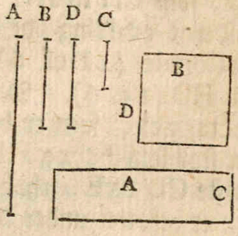


Den 17 Proposition.

Theorema.

Dersom tre rette Linier ere proportionale, saa skal den Rectangel, som er befattet under de yderste, være lige saa stor som Qvadraten, der bliver giort af den mellemste. Og dersom Rectanglen under de yderste er lige saa stor som Qvadraten af den mellemste; saa ere de tre rette Linier proportionale.

Exempel. Lad de tre rette Linier A, B, C være proportionale, saa at A forholder sig til B som B til C, saa siger jeg: At Rectanglen under A, C er lige saa stor som Qvadraten af B.



Demonstration. Thi tag en anden ret Linie D, som er saa stor som B. Eftersom da A forholder sig til B som B til C, og D er saa stor som B: Saa forholder sig ogsaa A til B som D til C. Følgelig skal Rectanglen under A, C være lige saa stor (16. 6) som Rectanglen under BD, det er: som Qvadraten af B, fordi B, D ere lige store. Hvilket (1) var at bevise.

2) Lad Rectanglen under A, C være lige saa stor som Qvadraten af B: Saa siger jeg, at A forholder sig til B, som B til C.

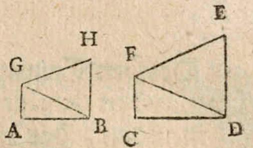
Thi

Thi eftersom Rectanglen under A, C er lige saa stor som Qvadraten af B, og Qvadraten af B er ogsaa en Rectangel som er befattet under B, D, fordi B, D ere lige store: Saa er Rectanglen under de yderste A, C lige saa stor som Rectangleu under de mellemste B, D. Men naar Rectanglen under de yderste ere lige saa stor som den under de mellemste, saa ere de fire rette Linier proportionale (16. 6): Følgelig forholder sig A til B som D til C. Da nu B, D ere lige store, saa forholder sig A til B som B til D. Hvilket (2) var at bevise.

Den 18 Proposition.
Problema.

Paa en given ret Linie at beskrive en Ret-Lined Figur, som er ligedan skikket og sat, som en given Ret-Lined Figur.

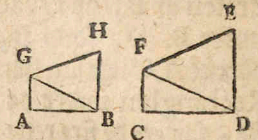
Exempel Lad AB være en given ret Linie, men CE en given ret-Lined Figur: Man skal beskrive paa AB en ret-Linet Figur, som er ligedan skikket og sat som CE.



Construction og Demonstration.

Drag FD og sæt (23. 1) til den rette Linie AB udi Punkterne A, B en Vinkel GAB saa stor som Vinklen FCD og en Vinkel GBA saa stor som Vinklen FDC: Saa er den øvrige Vinkel AGB saa stor som den øvrige CFD (32. 1). Følgelig har de tvende Triangler GAB, FCD lige store Vinkler, og altsaa (4. 6) forholder sig FD til GB, som FC til GA og som CD til AB. Sæt fremdeles til GB udi Punkterne G, B en Vinkel HGB af lige Størrelse med Vinklen EFD, og en Vinkel HBG saa stor som Vinklen EDF: Saa er den øvrige Vinkel FED lige saa stor som den øvrige GHB: Følgelig har Trianglerne HGB, EFD lige store Vinkler, og altsaa (4. 6) forholder sig FD til GB, som FE til GH og som ED til HB. Da nu tilforn blev beviist, at ligesom FD forholder sig til GB, saa forholder sig FC til GA, og CD til AB: Saa (11. 5) forholder sig FC til GA, som AB til CD, som FE til GH og som ED til HB. Fordi fremdeles Vinklen AGB er saa stor som CFD, og HGB saa stor som EFD

EFD; saa er den heele Vinkel AGH saa stor som den heele Vinkel CFE. Paa samme Maade bevises ogsaa at Vinklen ABH er lige saa stor som CDF; og Vinklerne H og E ere lige store, som tilforn blev beviist, og ligeledes Vinklerne A og C: Følgelig ere Vinklerne i CE og AH lige store og Siderne omkring de lige store Vinkler ere proportionale, som tilforn blev beviist: Følgelig er AH ligedan skikket som CE (1 Def. 6).



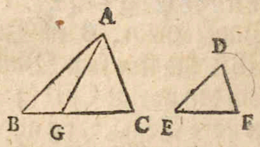
Altsaa har man beskreven paa den givne rette Linie AB en Ret-Linet Figur AH som er ligedan skikket og sat, som en given Ret-Linet Figur CE. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 19 Proposition.

Theorema.

Dersom Triangler ere lige skikkede, saa er deres Forhold til hinanden dupleret imod den Forhold, som de Sider have til hinanden, der ere lige i Forhold.

Exempel. Lad ABC, DEF være lige skikkede Triangler, og lad Vinklen ABC være lige saa stor som Vinklen DEF og lad AB forholde sig til BC som DE til EF, saa at BC og EF ere lige i Forhold (12 Def. 5); saa siger jeg, at den Forhold som Triangelen ABC har til Triangelen DEF, er dupleret imod den Forhold, som BC har til EF.



Construction. Til BC og EF søges (11. 6) den tredie Proportional-Linie BG: Saa at BC forholder sig til EF som EF til BG. Siden drages en ret Linie fra A til G.

Demonstration. Fordi nu AB forholder sig til BC som DE til EF; saa skal og skifte-viis AB forholde sig til DE som BC til EF (16. 5).

(16. 5). Men BC forholder sig til EF som EF forholder sig til BG (efter Constr.); følgelig forholder sig (11. 5) AB til DE, som EF til BG. Men de Triangler, udi hvilke en Vinkel udi den eene er lige saa stor som en Vinkel udi den anden, og Siderne omkring de lige store Vinkler ere reciproce proportionale, ere (15. 6) lige store: Altsaa er Trianglen ABG lige saa stor som Trianglen DEF. Fordi nu BC forholder sig til EF som EF til BG og (10 Def. 5) den Forhold, som den første af tre proportionale Størrelser har til den tredie, kaldes dupleret imod den Forhold, som den første har til den anden: Saa er den Forhold, som BC har til BG, dupleret imod den Forhold, som BC har til EF. Efterdi nu (1. 6) BC har samme Forhold til BG, som Trianglen ABC har til Trianglen ABG: Saa er ogsaa den Forhold, som Trianglen ABC har til Trianglen ABG, dupleret imod den, som BC har til EF. Men nu er Trianglen ABG lige saa stor som Trianglen DEF. Følgelig er den Forhold, som Trianglen ABC har til Trianglen DEF, dupleret imod den, som BC har til EF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium.

Heraf er det klart, at naar tre rette Linier ere proportionale, saa forholder sig en Triangel, som er beskreven paa den første, til en Triangel som er ligedan skikket og ligedan beskreven paa den anden, lige som den første forholder sig til den tredie. Thi tilforne blev beviist, at ligesom BC forholder sig til BG saa forholder sig ogsaa Trianglen ABC til Trianglen ABG, det er, til Trianglen DEF.

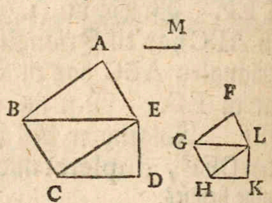
Scholion.

Efterdi det er beviist, at Trianglen ABC har samme Forhold til Trianglen DEF, som BC har til BG, og den Forhold, som BC har til BG, kaldes dupleret imod den Forhold, som BC har til EF, saa bliver ogsaa den Forhold, som Trianglen ABC har til Trianglen DEF, kaldet dupleret imod den Forhold, som BC har til EF. Og heraf seer man, at naar der siges om toe lige skikkede Triangler ABC, DEF eller toe andre lige skikkede Figurer, at deres Forhold er dupleret imod den Forhold, som toe Sider, der ere lige i Forhold, saasom de toe BC, EF, eller de toe AB, DE eller ogsaa de toe AC, DF have til hinanden, saa forstaaes derved intet andet, end at, naar der findes til toe af bemeldte Sider, saasom til BC og EF en tredie Proportional-Linie BG, saa skal den ene Figur ABC forholde sig til den anden Figur DEF, som den ene Side BC forholder sig til den tredie proportional-Linie BG.

Den 20 Proposition.

Theorema.

Lige skikkede Polygoner deeles i lige mange Triangler, som ere lige skikkede med hverandre og proportionale med de heele Polygoner: Og Polygonernes Forhold til hinanden er dupleret imod den Forhold, som de Sider af Polygonerne have til hinanden, som ere lige i Forhold.



Exempel. Lad ABCDE, FGHKL være lige skikkede Polygoner (det er ret-linede Figurer, som have flere end fire Sider) og lad Vinklen A være saa stor som Vinklen F, og Vinklen B saa stor som Vinklen G og saa fremdeles, og lad Siderne omkring de lige store Vinkler være proportionale, saa at AB forholder sig til BC, som FG til GH, og BC forholder sig til CD som GH til HK, og CD forholder sig til DE som HK til KL og DE forholder sig til EA som KL til LF: Saa siger jeg, først, at disse Polygoner bliver deelte i lige mange og lige skikkede Triangler.

Construction. Drag fra Vinklerne E, L til de øvrige Vinkler i Polygonerne rette Linier EB, EC, LG, LH;

Demonstration. Eftersom Vinklerne A og F ere lige store og Siderne omkring dem ere proportionale; saa har (6. 6) Trianglen ABE lige saa store Vinkler som Trianglen FGL, nemlig Vinklen ABE er saa stor som Vinklen FGL og Vinklen AEB saa stor som Vinklen FLG. Men udi de Triangler, som have lige store Vinkler, ere ogsaa Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale (4. 6). Følgelig skal Trianglerne ABE, FGL have Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale, og altsaa ere Trianglerne ABE, FGL lige skikkede (1 Def. 6). Fordi fremdeles Vinklen ABC er lige saa stor som FGH, og Vinklen ABE er lige saa stor som FGL, som tilforne blev beviist; saa er ogsaa den øvrige Vinkel EBC lige saa stor som den øvrige LGH.

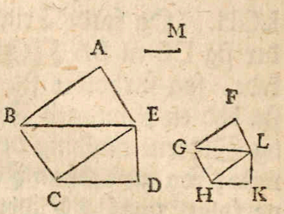
LGH. Og fordi Trianglerne ABE, FGL ere lige skikkede, saa forholder sig EB til BA, som GL til GF, og fordi Polygonerne ere lige skikkede, saa forholder sig AB til BC, som FG til GH: Følgelig forholder sig ved en jevntagen Forhold (22. 5) EB til BC, som LG til GH, nemlig Siderne omkring de lige store Vinkler EBC, LGH ere proportionale, og altsaa har Trianglerne BCE, GHL lige store Vinkler (6. 6) og følgelig ogsaa Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale (4. 6) og altsaa ere Trianglerne BCE, GHL lige dannede (1 Def. 6); og fordi Vinklerne D, K ere lige store og Siderne omkring dem ere proportionale, fordi nemlig Polygonerne ere ligedannede, saa har ogsaa Trianglerne CDE, HKL lige store Vinkler (6. 6) og derfore ere ogsaa Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale (4. 6) og altsaa ere Trianglerne CDE, HKL ligedannede. Men Trianglen ABE er ogsaa ligedannet med Trianglen FGL, og BCE med GHL. Følgelig deeles Polygonerne ABCDE, FGHKL i lige mange og ligedannede Triangler. Hvilket (1) var at bevise.

(2) Jeg siger ogsaa, at disse Triangler skal være proportionale med Polygonerne, nemlig en Triangel udi den eene Polygon skal forholde sig til een Triangel, som svarer til den forrige, udi den anden Polygon, som den eene Polygon forholder sig til den anden Polygon.

Thi eftersom Trianglerne ABE, FGL ere lige skikkede, saa ere disse Trianglers Forhold dupleret imod den Forhold, som BE har til GL. Og fordi Trianglerne BCE, GHL ere ogsaa ligedannede, saa er deres Forhold til hinanden ogsaa dupleret imod den, som BE har til GL. Hvorfore Trianglen ABE forholder sig til Trianglen FGL, som Trianglen BCE til Trianglen GHL (11. 5). Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at Trianglen BCE forholder sig til Trianglen GHL som Trianglen CDE til Trianglen HKL. Men (12. 5) som en af de foregaaende forholder sig til en af de efterfølgende, saa forholde sig alle de foregaaende til alle de efterfølgende. Følgelig som Trianglen ABE forholder sig til Trianglen FGL, eller som Trianglen BCE forholder sig til Trianglen GHL, eller som Trianglen ECD forholder sig til Trianglen LHK, saa forholde sig ogsaa alle de Triangler ABE, EBC, ECD tilsammen, det er, den heele Polygon ABCDE til alle de Triangler FGL,

 GHL,

GHL, LHK, det er, til den heele Polygon FGHKL. Følgelig ere bemeldte Triangler proportionale med Polygonerne. Hvilket (2) var at bevise.



(3) Jeg siger ydermere, at Polygonernes Forhold til hinanden er dupleret imod den, som de Sider have til hinanden, som ere lige i Forhold, det er: Naar man finder til toe Sider AB, FG, som ere lige i Forhold, en tredie Proportional-Linie M (11. 6), saa skal Polygonen ABCDE forholde sig til Polygonen FGHKL som AB forholder sig til M.

Thi eftersom Trianglen ABE forholder sig til Trianglen FGL, som Polygonen ABCDE forholder sig til Polygonen FGHKL, og Trianglen ABE forholder sig til Trianglen FGL (19. 6) som AB til M; saa forholde sig ogsaa Polygonen ABCDE til Polygonen FGHKL som AB til M. Hvilket (3) var at bevise.

1. Corollarium.

Efterdi man her har beviist, at lige skikkede Polygoners eller mangekanters Forhold til hinanden er dupleret imod den Forhold, som de Sider have til hinanden, der ere lige i Forhold, og det samme er ogsaa beviist om lige skikkede Triangler (19. 6), og kand ogsaa bevises om lige skikkede Firkanter; saa er det klart at alle lige skikkede ret-linede Figurers Forhold til hinanden er dupleret imod den Forhold, som de Sider have til hinanden, der ere lige i Forhold.

2. Corollarium.

Naar derfore tre rette Linier AB, GF, M ere proportionale; saa forholder sig en ret-lined Figur, som er beskreven paa den første AB, til en ret-lined Figur, som er af samme Skikkelse og ligedan beskreven paa den anden GF, som den første rette Linie AB forholder sig til den tredie M.

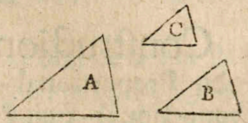
Den

Den 21 Proposition.

Theorema.

De ret-linede Figurer, som ere lige skikkede med en og den samme ret-linede Figur, ere lige skikkede med hinanden.

Exempel. Lad enhver af de ret-linede Figurer A, B være af lige Skikkelse, som den ret-linede Figur C: Saa siger jeg, at A og B ere lige skikkede med hverandre.



Demonstration. Fordi A er af lige Skikkelse som C, saa ere (1 Def. 6) Vinklerne i A lige saa store som Vinklerne i C og Siderne omkring de lige store Vinkler ere proportionale. Af samme Aarsag ere ogsaa Vinklerne i B og C lige store, og Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale; Altsaa ere i enhver af de ret-linede Figurer A, B Vinklerne saa store som Vinklerne i C, og Siderne omkring de lige store Vinkler i A, B ere proportionale med Siderne omkring de lige store Vinkler i C: Følgelig ere og Vinklerne i A, B lige store (1 Ax.) og Siderne omkring de lige store Vinkler proportionale (11. 5) og altsaa er A lige skikket som B (1 Def. 6). Hvilket var det, som skulde bevises.

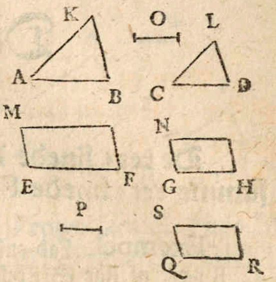
Den 22 Proposition.

Theorema.

Dersom fire rette Linier ere proportionale, saa skal ogsaa de ret-linede Figurer, som paa samme rette Linier ere ligedan beskrevne og af lige Skikkelse med hinanden, være proportionale: Og naar de ret-linede Figurer, som ere lige skikkede og ligedan beskrevne paa fire rette Linier, ere proportionale; saa skal samme rette Linier ogsaa være proportionale.

Exem-

Exempel. Lad de fire rette Linier AB, CD, EF, GH være proportionale, saa at AB forholder sig til CD som EF til GH. Lad fremdeles de ret-linede Figurer KAB, LCD være lige skikkede og ligedan satte paa AB, CD; lad ogsaa de ret-linede Figurer MF og NH være ligeskikkede og ligedan satte paa EF, GH: Saa siger jeg, at den ret-linede Figur KAB forholder sig til LCD, som MF forholder sig til NH.



Construction. Søg til AB, CD den tredie Proportional-Linie O; og søg ligeledes til EF, GH den tredie Proportional-Linie P (11. 6).

Demonstration. Fordi nu AB forholder sig til CD som EF til GH, og CD forholder sig til O som GH til P; saa forholder sig ogsaa ved en jevntagen Forhold (22. 5) AB til O, som EF til P. Men nu forholder sig (efter 2 Cor. 20. 6) den ret-linede Figur KAB til LCD som AB til O og den ret-linede Figur MF til NH som EF til P. Følgelig forholder sig (11. 5) den ret-linede Figur KAB til den ret-linede Figur LCD som MF forholder sig til NH. Hvilket (1) var at bevise.

2) Lad nu KAB forholde sig til LCD som MF forholder sig til NH: Saa siger jeg, at AB forholder sig til CD som EF til GH.

Thi Søg til AB, CD, EF den fierde Proportional-Linie QR (12. 6), saa at AB forholder sig til CD, som EF til QR, og beskriv paa QR en ret-lined Figur SR, som er af lige Skikkelse og ligedan sat som MF. Saa skal (efter det som tilforn blev beviist) KAB forholde sig til LCD som MF forholder sig til SR. Men KAB forholder sig ogsaa til LCD, som MF til NH; følgelig har MF samme Forhold til NH, som til SR, og altsaa er (9. 5) NH lige saa stor som SR. Men de ere ogsaa lige skikkede og ligedan satte: Følgelig skal (efter det næst efterfølgende Lemma) GH være lige saa stor som QR. Og fordi AB forholder sig til CD som EF til QR, og QR er lige saa stor som GH: Saa forholder sig ogsaa AB til CD som EF til GH. Hvilket (2) var at bevise.

Lem-

Lemma.

Men at i ret-linede Figurer, som ere lige store og lige skikkede, de Sider, som ere lige i Forhold, ere lige store, kand bevises paa følgende Maade.

Lad NH, SR være lige store og lige skikkede ret-linede Figurer og lad HG forholde sig til GN som RQ til QS: saa siger jeg, at HG, RQ, som ere lige i Forhold, ere lige store.

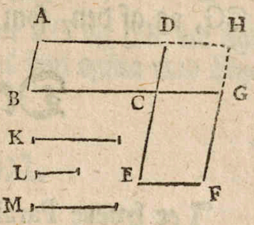
Thi hvis de ey ere lige store, saa maae en af dem være den større; lad QR være den større; da, eftersom RQ forholder sig til QS som HG til GN, og RQ er større end HG, saa er ogsaa (14. 5) QS større end GN, og altsaa skulde den ret-linede Figur SR være større end HN. Men det er den ikke, thi SR og HN ere lige store (efter Hyp.): Følgelig kand HG, RQ ikke være af u-lige Størrelse og altsaa ere de lige store. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 23 Proposition.

Theorema.

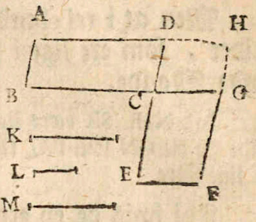
Dersom Parallelogrammer have lige store Vinkler, saa skal deres Forhold til hinanden være sammensat af Sidernes Forhold til hverandre.

Exempel. Lad AC, CF være Parallelogrammer, som have lige store Vinkler og lad Vinklen BCD være lige saa stor som Vinklen GCE: Saa siger jeg, at den Forhold som AC har til CF, er sammensat af de Forhold, som Siderne have til hinanden, det er af den Forhold som BC har til CG og af den, som CD har til CE.



Construction. Set BC i lige Linie med CG, saa er ogsaa (14. 1) DC i lige Linie med CE. Drag AD, FG længere ud hen til H; antag efter Behag en ret Linie

Linie K, og føg (12. 6) til BC, CG, K den fierde Proportional-Linie L: Søg ligeledes til DC, CE, L den fierde Proportional-Linie M.



Demonstration. Af Constructionen følger da, at de Forhold som K har til L, og L har til M, ere de selv samme, som de Forhold, Siderne have til hinanden, nemlig som BC har til CG og som DC har til CE. Da nu den Forhold, som K har til M, siges at være sammensat af de Forhold, som K har til L og L har til M (efter 5 Def. 6): Saa følger ogsaa, at den Forhold, som K har til M, er sammensat af de Forhlod, som BC har til CG og som DC har til CE. Og fordi BC forholder sig til CG, som Parallelogrammet AC til Parallelogrammet DG (1. 6), og BC forholder sig ogsaa til CG som K til L; saa forholder sig (11. 5) AC til DG som K til L. Fordi fremdeles Parallelogrammet DG forholder sig til CF, som DC til CE (1. 6) og DC forholder sig til CE som L til M; saa forholder sig ogsaa DG til CF som L til M. Eftersom da Parallelogrammet AC forholder sig til Parallelogrammet DG, som K til L, og Parallelogrammet DG forholder sig til Parallelogrammet CF som L til M; saa forholder sig ved en jevntagen Forhold (22. 5) Parallelogrammet AC til Parallelogrammet CF, som K forholder sig til M. Efterdi nu den Forhold, som K har til M, er sammensat af de Forhold, som Siderne have til hinanden: Saa er ogsaa den Forhold som Parallelogrammet AC har til Parallelogrammet CF, sammensat af de Forhold, som Siderne have til hverandre, det er, af den Forhold som BC har til CG, og af den, som DC har til CE. Hvilket var det, som skulde bevises.

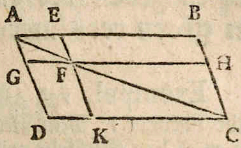
Den 24 Proposition.

Theorema.

I et hvert Parallelogram ere de Parallelogrammer, som ere omkring Tver-Linien, lige skikkede med det heele, saa vel som ogsaa med hverandre.

Exem-

Exempel. Lad ABCD være et Parallelogram og AC dets Tver-Linie, og EG, HK Parallelogrammerne omkring Tver-Linien: Jeg ſiger da, at EG, HK ere lige ſkikkede med det heele Parrallelogram ABCD, ſaa vel ſom ogſaa med hverandre.



Demonſtration. Efterdi EK er parallel med BC, ſaa er (29. 1) Vinklen AEF ſaa ſtor ſom Vinklen ABC, og Vinklen AFE ſaa ſtor ſom Vinklen ACB. Følgelig have de toe Triangler AEF og ACB lige ſtore Vinkler. Paa ſamme Maade beviſes ogſaa, at de toe Triangler AGF og ADC have lige ſtore Vinkler. Følgelig have ogſaa Parallelogrammerne EG og ABCD lige ſtore Vinkler.

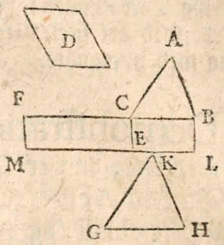
Efterdi nu Trianglerne ABC, AEF have lige ſtore Vinkler, (ſom tilforn blev beviiſt), ſaa forholder ſig (4. 6) AB til BC ſom AE til EF. Og fordi de Triangler AFG, ACD have lige ſtore Vinkler, ſaa forholder ſig AD til DC, ſom AG til GF. Altſaa, efterdi de tvende Parallelogrammer EG og ABCD have lige ſtore Vinkler og Siderne omkring de lige ſtore Vinkler ere proportionale, ſaa ere de lige ſkikkede med hinanden (1 Def. 6). Paa ſamme Maade beviſes ogſaa, at Parallelogrammerne ABCD og HK ere lige ſkikkede: Følgelig er enhver af de tvende Parallelogrammer EG, HK af lige Skikkelſe, ſom ABCD. Men ret-linede Figurer, ſom ere lige ſkikkede med en og den ſamme ret-linede Figur, ere lige ſkikkede med hinanden (21. 6). Altſaa ere Parallelogrammerne EG, HK ogſaa lige ſkikkede med hverandre.

Heraf ſeer man da, at de Parallelogrammer EG og HK ere lige ſkikkede med det heele Parallelogram ABCD, ſaa vel ſom ogſaa med hinanden. Hvilket var det, ſom ſkulde beviſes.

Den 25 Propoſition.

Problema.

At beſkrive en ret-lined Figur, ſom er af lige Skikkelſe med en given ret=linet Figur og af lige Størrelse med en anden given ret=linet Figur.



Exempel. Lad ABC og D være toe givne ret=linede Figurer: Man skal beskrive en ret=lined Figur, som er af lige Skikkelse med ABC, men af lige Størrelse med D.

Construction. Beskriv (efter 44. 1) paa BC et Parallelogram CL, saa stort som ABC, og til CE sæt (45. 1) et andet Parallelogram CM saa stort som D i en Vinkel FCE saa stor som Vinklen CBL, Imellem FC og CB søg den mellemste Proportional-Linie GH (13. 6) og paa GH beskriv (18. 6) en ret=lined Figur KGH, som er af lige Skikkelse og ligedan sat som ACB.

Demonstration. Eftersom Vinklen FCE er saa stor som Vinklen CBL, saa ere (2 Ax.) de Vinkler FCE, ECB tilsammen saa store som de toe Vinkler ECB, CBL. Men ECB, CBL ere tilsammen saa store som toe rette Vinkler (29. 1); følgelig ere FCE, ECB ogsaa saa store som toe rette Vinkler, og derfore (14. 1) er FCB en ret Linie; ligeledes kand bevises, at MEL er en ret Linie; følgelig have de tvende Parallelogrammer CL og CM en og den samme Høyde. Hvorfore (1. 6) CB forholder sig til CF, som CL til CM. Men nu forholder sig (2 Cor. 20. 6) CB til CF, som ACB til KGH (thi CB forholder sig til GH, som GH til CF (efter Constr.) og ACB er en ret=linet Figur, som er beskreven paa den første Linie CB, og KGH er ret=linet Figur, som er beskreven paa den anden GH og er lige skikket med den første Figur ACB); følgelig (11. 5) forholder sig ACB til KGH som CL til CM. Men (7. 5) CL forholder sig til CM, som ACB forholder sig til D, thi CL er saa stor som ACB, og CM saa stor som D (efter Constr.): Følgelig forholder sig ACB til KGH som ACB til D. Altsaa (9. 5) er KGH saa stor som D. Men KGH er ogsaa (efter Constr.) af lige Skikkelse og ligedan sat som ACB.

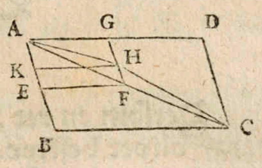
Altsaa har man beskreven en ret=linet Figur KGH, som er saa stor

stor som den givne ret=linede Figur D, og lige skikket med den givne ret=linede Figur ACB. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 26 Proposition.
Theorema.

Naar fra et Parallelogram bliver taget et Parallelogram af lige Skikkelse og ligedan sat som det heele, og som har en Vinkel tilfælles med samme heele: Saa skal det fratagne være omkring samme Tver=Linie, som det heele.

Exempel. Lad fra Parallelogrammet ABCD et Parallelogram EG blive taget, som er af lige Skikkelse og ligedan sat som ABCD, og som har en Vinkel BAD tilfælles med samme ABCD: Saa siger jeg, at begge Parallelogrammer EG og ABCD ere omkring samme Tver=Linie.



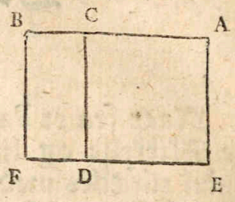
Demonstration. Thi hvis Parallelogrammet EG ikke skulde være omkring samme Tver=Linie som ABCD, saa lad et andet Parallelogram KG være omkring samme Tver=Linie som ABCD, og lad AHC være Tver=Linien af Parallelogrammet ABCD.

Efterdi nu Parallelogrammet KG er omkring samme Tver=Linie AHC, som Parallelogrammet ABCD: Saa ere (24. 6) KG og ABCD lige skikkede: Og altsaa forholder sig (1 Def. 6) DA til AB, som GA til AK. Men eftersom Parallelogrammerne EG og ABCD ere lige skikkede (efter Hyp.), saa forholder sig ogsaa DA til AB, som GA til AE. Følgelig forholder sig (11. 5) GA til AK som GA til AE, og altsaa har GA en og den samme Forhold til AK og AE; hvorfore AK og AE ere lige store (9. 5), det er: Det heele er lige saa stort, som en Deel deraf, som er u=rimeligt. Altsaa kand Parallelogrammet KG ikke være omkring samme Tver=Linie med Parallelogrammet ABCD.

Og følgelig skal Parallelogrammet EG være omkring samme Tver-Linie, som Parallelogrammet ABCD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Scholion.

Paa det at man desto bedre kand fatte de tre følgende Propositioner, saa merke man herved, at naar til en given ret Linie FE er sat et Parallelogram FC, hvis Grund-Linie FD er mindre end den givne Linie FE, saa siges Parallelogrammet FC at fattes et Parallelogram, nemlig DA. Naar derimod til en given ret Linie FD er sat et Parallelogram FA, hvis Grund-Linie FE er større end den givne Linie FD, saa siges Parallelogrammet FA at have et Parallelogram DA tilovers.



Den 27 Proposition.
Theorema.

Dersom en ret Linie bliver given og paa den halve Deel deraf bliver beskrevet et Parallelogram, saa skal samme Parallelogram være det største af alle de Parallelogrammer, som sættes til den givne rette Linie og som fattes Parallelogrammer af lige Skikkelse og ligedan satte som det Parallelogram, som det først bemeldte fattes.

Exempel. (See den første Figur) Lad den rette Linie AB blive deelt i toe lige store Deele i C og lad paa AC blive beskrevet et Parallelogram AD, som fattes det Parallelogram CE: Jeg siger da, at AD er det største af alle de Parallelogrammer, som sættes til AB og som fattes Parallelogrammer af lige Skikkelse og ligedan satte som CE. Thi sæt til AB et Parallelegram AF, som fattes et Parallelogram KH, som er af lige Skikkelse og ligedan sat som CE; saa siger jeg, at AD er større end AF.

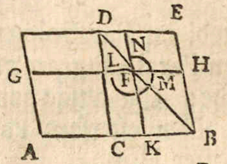


Fig. I.

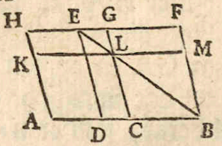


Fig. 2.

Demonstration. Efterdi Parallelogrammet CE er lige skikket med

med Parallelogrammer KH, saa skal de begge være omkring en og den samme Tver-Linie (26. 6). Drag da deres fælles Tver-Linie DB og fuldfør Figuren.

Efterdi nu (43. 1) CF er saa stor som FE, saa læg KH til dem, saa skal det heele CH være saa stort som det heele KE. Men nu er (36. 1) CH saa stor som CG, fordi de rette Linier AC og CB ere lige store: Følgelig skal GC ogsaa være saa stor som EK. Læg CF til dem, saa skal AF være lige saa stor, som den Vinkelhage LMN. Følgelig skal CE, det er (36. 1), AD være større end AF.

Lad igien den rette Linie AB (see den anden Figur) være deelt i toe lige store Deele i C og lad paa AC et Parallelogram AL blive beskreven, som fattes Parallelogrammet CM, og lad til den rette Linie AB blive sat et Parallelogram AE, som fattes et Parallelogram DF af lige Skikkelse og ligedan sat som CM: Saa siger jeg, at AL er større end AE.

Thi efterdi DF er lige skikket med CM, saa ere de begge omkring samme Tver-Linie (26. 6): Lad EB være deres fælles Tver-Linie og fuldfør Figuren.

Efterdi nu LF er saa stor som LH (36. 1), thi FG og GH ere lige store; saa er LF større end EK. Da nu LF er saa stor som DL (43. 1), saa er DL større end EK. Læg KD til ethvert af dem, saa er AL større end AE.

Altsaa er da det Parallegram, som bliver beskrevet paa den halve Part af den rette Linie AB, det største af alle de Parallelogrammer, som settes til AB og fattes Parallelogrammer ligeskikkede med det, som det først bemeldte fattes. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 28 Proposition.

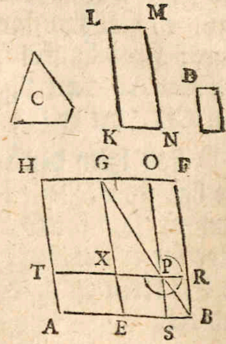
Problema.

Til en given ret Linie at sætte et Parallelogram saa stort som en given ret-lined Figur, og som fattes et Parallelogram

 af

af lige Skikkelse med et andet given Parallelogram. **Men den givne ret-linede Figur bør ey være større end det Parallelogram, som beskrives paa den halve Linie og som fattes et Parallelogram af lige Skikkelse med det givne.**

Exempel. Lad AB være en given ret Linie, C en given ret-linet Figur, og D et given Parallelogram: Det begieres, at sætte til AB et Parallelogram, som er saa stort som C og fattes et Parallelogram af lige Skikkelse med D.



Construction. Deel AB i toe lige store Deele i E (10. 1). Paa EB beskrives et Parallelogram EBFG, som er af lige Skikkelse og ligedan sat som D (18. 6). Siden fuldføres Parallelogrammet AG (fordi nu dette Parallelogram AG er (27. 6) det største af alle de Parallelogrammer, som sættes til AB og fattes Parallelogrammer af lige Skikkelse med EF og følgelig ogsaa med D; saa er det forud sat i Propositionen, at den givne ret-linede Figur C bør ey være større end det Parallelogram AG, som er beskreven paa den halve Linie AE og som fattes et Parallelogram EF af lige Skikkelse med det givne D.)

Demonstration. Nu er AG enten lige saa stor eller større end C. Dersom AG er lige saa stor som C, saa er det skeet, som blev forlangt; thi saa er til den givne Linie AB sat et Parallelogram AG saa stort som C og som fattes et Parallelogram EF, som er lige skikket med D.

Men hvis AG er større end C, saa er EF ogsaa større end C. Beskriv da (25. 6) et Parallelogram KLMN, som er lige skikket og ligedan sat som D og lige saa stor som den Figur, der bliver tilovers, efterat C er tagen fra EF. Efterdi da EF er ogsaa lige skikket med D, saa er KM (21. 6) lige skikket med EF. Lad derfore de Sider LK og GE være lige i Forhold, saa vel som ogsaa de Sider LM og GF.

Ef-

Efterdi nu EF er lige saa stor som C og KM tilsammen, saa er EF større end KM; følgelig er GE større end LK, og GF større end LM. Gior GX saa stor som LK, og GO saa stor som LM (3. 1) og fuldfør Parallelogrammet XGOP, saa ere XO og KM lige store og lige skikkede med hinanden. Da nu KM er lige skikket med EF; saa er XO ogsaa lige skikket med EF, og følgelig (26. 6) skal XO og EF være omkring en og den samme Tver-Linie. Lad da GPB være deres fælles Tver-Linie og lad Figuren blive fuldført.

Fordi nu EF er saa stor som C og KM tilsammen, og XO er saa stor som KM, saa skal den øvrige Vinkelhage, som bestaaer af de tre Parallelogrammer OR, RS, SX, være lige saa stor som C. Og fordi OR er saa stor som SX (43. 1), læg RS til dem, saa er det heele OB saa stort som det heele XB. Men nu er XB saa stor som TE (36. 1), fordi AE er saa stor som EB: Følgelig er TE ogsaa saa stor som OB. Læg XS til dem, saa er det heele TS saa stort som den Vinkelhage, som bestaaer af de tre OR, RS, SX. Men denne Vinkelhage er tilforn beviist at være saa stor som C: Følgelig er TS saa stor som C.

Altsaa har man til den givne Linie AB sat et Parallelogram TS, som er saa stort som den givne ret-linede Figur C og som fattes et Parallelogram SR, som er lige skikket med det givne Parallelogram D, thi SR er lige skikket med EF. *Hvilket var det, som skulde giøres.*

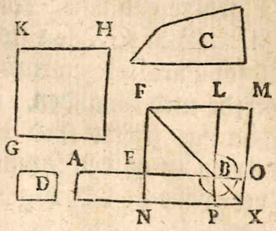
Den 29 Proposition.

Problema.

Til en given ret Linie at sætte et Parallelogram, som er saa stort, som en given ret-linet Figur og som har et Parallelogram tilovers, som er lige skikket med et given Parallelogram.

Exem-

Exempel. Lad AB være en given ret Linie, C en given ret-lined Figur, og D et given Parallelogram: Det begieres, at sætte til AB et Parallelogram, som er saa stort som den givne ret-linede Figur C og som har et Parallelogram til overs, som er af lige Skikkelse, som det givne Parallelogram D.



Construction. Deel AB i toe lige store Deele i E (10. 1). Beskriv (18. 6) paa EB et Parallelogram EL af lige Skikkelse og ligedan sat som D. Beskriv (25. 6) et Parallelogram GH saa stort som EL og C tilsammen og lige skikket med D.

Demonstration. Efterdi EL og GH ere af lige Skikkelse som D (efter Constr.), saa ere EL og GH ogsaa lige skikkede med hinanden (21. 6). Lad de Sider KH og FL, saa vel som ogsaa de Sider KG og FE være lige i Forhold. Eftersom da Parallelogrammet GH er større end Parallelogrammet EL, saa skal KH ogsaa være større end FL, og KG større end FE. Drag FL, FE længere ud og gior FLM saa stor som KH, og FEN saa stor som KG (3. 1) og fuldfør Parallelogrammet MN: Saa skal dette Parallelogram MN være lige saa stor og af samme Skikkelse som GH. Da nu EL er lige skikket som GH: Saa ere (21. 6) MN og EL lige skikkede og følgelig (26. 6) omkring en og den samme Tver-Linie. Drag da deres Tver-Linie FX og fuldfør Figuren.

Efterdi nu GH er saa stor som EL og C tilsammen (efter Constr.) og GH er ogsaa saa stor som MN, saa skal MN ogsaa være saa stor som EL og C tilsammen. Tag EL fra enhver af dem, saa er den overblivende Vinkelhage, som bestaaer af de Parallelogrammer MP, EP, lige saa stor som C; og fordi AE er saa stor som EB, saa er (36. 1) AN saa stor som EP, det er, som MB. Læg EX til dem, saa er Parallelogrammet AX saa stor som den bemældte Vinkelhage. Da nu denne Vinkelhage er saa stor som C, saa er AX ogsaa saa stor som C.

Altsaa har man til den givne rette Linie AB sat et Parallelogram AX, AX, som er saa stort som den givne ret-linede Figur C og som har et Parallelogram OP tilovers, som er lige skikket med det givne Parallelogram D, thi EL og OP ere lige skikkede. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 30 Proposition.
Problema.

At skiære en given ret Linie i en yderst og mellemst Forhold.

Exempel. Lad AB være en given ret Linie: Det begieres, at skiære AB i en yderst og mellemst Forhold, det er (3 Def. 6), man skal skiære AB i toe ulige Deele, saaledes at den heele AB forholder sig til det større Stykke, som det større Stykke forholder sig til det mindre (see den 1ste Figur).

FIG. 1.

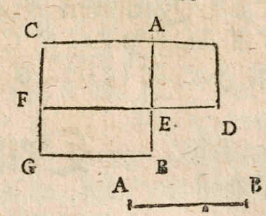


FIG. 2.

Construction. Paa AB beskrives en Qvadrat BC (46. 1); til AC sættes et Parallelogram CD, som er saa stort som BC og som har et Parallelogram AD tilovers, som er lige skikket med BC (29. 6).

Demonstration. Efterdi GB er en Qvadrat, saa er AD ogsaa en Qvadrat, fordi de ere af lige Skikkelse (efter Constr.). Og fordi BC er saa stor som CD, tag CE fra dem begge, saa er BF saa stor som AD. Da nu ogsaa Vinklerne i BF og AD ere lige store, saa skal (14. 6) Siderne omkring deres lige store Vinkler være reciproce proportionale: Følgelig forholder sig FE til ED som AE til EB. Men nu er FE saa stor som AC, det er, som AB; og ED er saa stor som AE: Derfor forholder sig AB til AE, som AE til EB. Men nu er AB større end AE; følgelig er AE ogsaa større end EB (14. 5).

Altsaa har man skaaren den givne Linie AB i en yderst og mellemst Forhold udi E, og AE er det større Stykke deraf. Hvilket var det, som skulde giøres.

FIG. 1.

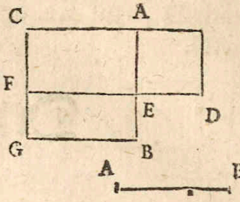


FIG. 2.

Anderledes.

Construction. Man skiærer AB i C, saaledes at Rectanglen, som er befattet under AB, BC, bliver saa stor som Qvadraten af AC (11. 2). See Fig. 2.

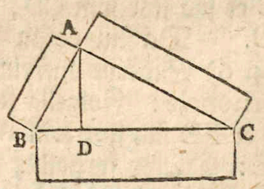
Demonstration. Efterdi Rectanglen under AB, BC er saa stor som Qvadraten af AC (efter Constr.); saa forholder sig (17. 6) AB til AC som AC til CB. Følgelig er AB skaaren i en yderst og mellemst Forhold (3 Def. 6). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 31 Proposition.

Theorema.

Udi ret-vinkelte Triangler skal den Figur, som beskrives paa den Side, som staaer imod den rette Vinkel, være lige saa stor som de Figurer, der beskrives paa de toe øvrige Sider og der ere af samme Skikkelse og ligedan satte som den førstbemeldte Figur.

Exempel. Lad ABC være en ret-vinkelt Triangel og lad BAC være dens rette Vinkel: Jeg siger da, at den Figur, som beskrives paa BC er saa stor som de toe Figurer tilsammen, som beskrives paa BA, AC og som ere af lige Skikkelse og ligedan beskrevne, som den der beskrives paa BC.



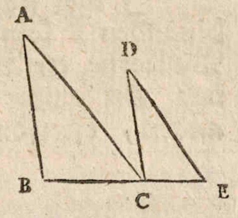
Demonstration. Drag Perpendicular-Linien AD. Saa skal (8. 6) Triangler-

ne

ne ABD og ADC være lige skikkede med den heele Triangel ABC, saa vel som ogsaa med hverandre. Fordi nu Trianglen ABC er lige skikket med Trianglen ABD, saa forholder sig CB til BA som AB til BD. Men naar tre rette Linier ere proportionale, saa forholder sig en Figur, som er beskreven paa den første Linie, til en Figur som er af samme Skikkelse og ligedan beskreven paa den anden, som den første Linie forholder sig til den tredie (2 Cor. 20. 6). Følgelig ligesom CB forholder sig til BD, saa forholder sig en Figur, som er beskreven paa CB, til en Figur, som er af samme Skikkelse og ligedan beskreven paa BA. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at ligesom BC forholder sig til CD, saa forholder sig ogsaa en Figur, som er beskreven paa BC, til en Figur, som er beskreven paa CA: Følgelig (24. 5) som BC forholder sig til BD og DC tilsammen, saa forholder sig den Figur, som beskrives paa BC, til de toe Figurer tilsammen, som beskrives paa BD og DC og som ere af lige Skikkelse med den Figur, som beskrives paa BC. Da nu BC er saa stor som BD og DC tilsammen, saa er det klart, at den Figur, som beskrives paa BC, er lige saa stor som de toe Figurer tilsammen, som beskrives paa BA, CA og som ere lige skikkede med den Figur, som beskrives paa BC. Hvilket var det, som skulde bevises.

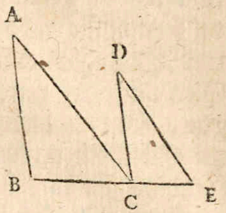
Den 32 Proposition.
Theorema.

Dersom toe Triangler, udi hvilke toe Sider udi den ene ere proportionale med toe Sider udi den anden, sættes saaledes sammen udi een Vinkel, at de Sider, som ere lige i Forhold, ere parallele med hinanden: Saa skal Trianglens øvrige Sider være udi lige Linie med hinanden.



Exempel. Lad ABC, DCE være toe Triangler, udi hvilke de toe Sider AB, AC ere proportionale med de toe Sider DC, DE, saa at AB forholder sig til AC, som DC til DE; og lad Trianglerne ABC, DCE blive saaledes sat sammen, at de giøre en Vinkel ACD og at de Sider ere parallele med hinanden, som ere lige i Forhold, nemlig AB parallel med

DC, og AC med DE: Saa siger jeg, at de øvrige Sider BC og CE ere udi en lige Linie, saa at BCE er en ret Linie.



Demonstration. Efterdi AB er parallel med DC, og AC falder paa dem, saa ere Verel-Vinklerne BAC, ACD lige store. Af samme Aarsag er ogsaa Vinklen ACD saa stor som Vinklen CDE. Følgelig ere Vinklerne BAC, CDE lige store. Da nu Siderne omkring disse lige store Vinkler ere proportionale, nemlig BA forholder sig til AC som CD til DE (efter Hyp.), saa skal (6.6) Vinklerne i Trianglen ABC være saa store som Vinklerne i Trianglen DCE: Følgelig er Vinklen ABC saa stor som Vinklen DCE. Da nu tilforn blev beviist, at Vinklen ACD er saa stor som Vinklen BAC; saa er den heele Vinkel ACE saa stor som de toe Vinklen ABC, BAC. Læg Vinklen ACB til dem, saa ere de toe Vinkler ACE, ACB saa store som de tre ABC, BAC, ACB; og efterdi disse tre ere (32. 1) saa store som toe rette Vinkler, saa ere ogsaa de toe Vinkler ACE, ACB saa store som toe rette Vinkler. Altsaa ere BC, CE saaledes satte til Punkten C udi den rette Linie AC, at Vinklerne paa begge Sider ere saa store som toe rette Vinkler; følgelig (14. 1) ere BC og CE i lige Linie med hinanden. Hvilket var det, som skulde bevises.

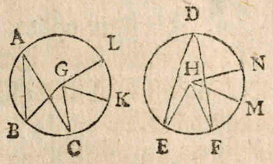
Den 33 Proposition.

Theorema.

J lige store Cirkler have Vinklerne samme Forhold til hinanden, som Cirkel-Buerne, hvorpaa de staaer, enten Vinklerne ere ved Middel-Punkterne eller ved Omkredserne: Og samme Forhold have ogsaa Cirkel-Skaarene til hinanden, eftersom de staaer ved Middel-Punkterne.

Exempel.

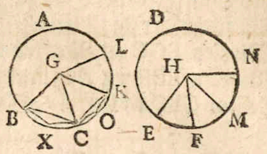
Exempel. Lad ABC, DEF være lige store Cirkler, og lad Vinklerne BGC, EHF være ved Cirklernes Middel-Punkter G, H, og Vinklerne BAC, EDF ved Omkredserne: Saa siger jeg, at ligesom Cirkel-Buen BC forholder sig til Cirkel-Buen EF, saa forholder sig Vinklen BGC til Vinklen EHF, og Vinklen BAC til Vinklen EDF og endelig det Cirkel-Skaar eller den Sector GBC til Cirkel-Skaaret HEF (see 10 Def. 3).



Construction. I Circumferentzen af Cirklen ABC tages saa mange Cirkel-Buer, som man vil, saasom de toe CK, KL saa store som Cirkel-Buen BC. Ligeledes tages i Circumferentzen af Cirklen DEF saa mange Cirkel-Buer, som man vil, saa store som Cirkel-Buen EF, saasom de toe FM, MN. Dernæst drager man de rette Linier GK, GL, HM, HN.

Demonstration. Efterdi Cirkel-Buerne BC, CK, KL ere lige store, saa ere ogsaa Vinklerne BGC, CGK, KGL lige store (27. 3): Derfore er Cirkel-Buen BL lige saa mangefold af Cirkel-Buen BC som Vinklen BGL er af Vinklen BGC. Paa samme Maade bevises ogsaa at Cirkel-Buen EN er lige saa mangefold af Cirkel-Buen EF, som Vinklen EHN er af Vinklen EHF. Altsaa har man her fire Størrelser nemlig de toe Cirkel-Buer BC og EF og de toe Vinkler BGC, EHF, og den Cirkel-Bue BL og Vinklen BGL ere lige mangefold af den første og tredie Størrelse, nemlig af Cirkel-Buen BC og af Vinklen BGC, og Cirkel-Buen EN og Vinklen EHN ere lige mangefold af den anden og tredie Størrelse, nemlig af Cirkel-Buen EF og Vinklen EHF. Ydermere er det klart (af 27. 3), at naar Cirkel-Buen BL er saa stor som Cirkel-Buen EN, saa er ogsaa Vinklen BGL saa stor som Vinklen EHN, og naar BL er større eller mindre end EN, saa er Vinklen BGL ogsaa større eller mindre end Vinklen EHN. Derfore (5 Def. 5) ligesom Cirkel-Buen BC forholder sig til Cirkel-Buen EF, saa forholder sig ogsaa Vinklen BGC til Vinklen EHF. Men nu forholder sig Vinklen BGC til Vinklen EHF som Vinklen BAC til Vinklen EDF (15. 5); thi Vinklerne BGC og EHF ere begge dobbelt saa store som Vinklerne BAC, EDF (20. 3): Følgelig (11. 5) ligesom Cirkel-Buen BC forholder sig til Cirkel-Buen EF, saa forholder sig ogsaa Vinklen BAC til Vinklen EDF. Hvilket (1) var at bevise.

2) Jeg siger ogsaa, at ligesom Cirkel-Buen BC forholder sig til Cirkel-Buen EF, saa forholder sig ogsaa Cirkel-Skaaret GBC til Cirkel-Skaaret HEF.



Drag BC, CK og antag i Cirkel-Buerne BC, CK de Punkter X, O, og drag BX, XC, CO, OK.

Fordi nu BG, GC ere saa store som CG, GK og Vinklen BGC er saa stor som Vinklen CGK, saa (4. 1) er Grund-Linien BC saa stor som Grund-Linien CK og Trianglen GBC saa stor som Trianglen GCK. Da nu fremdeles Cirkel-Buen BC er saa stor som Cirkel-Buen CK, saa er og den øvrige Cirkel-Bue BAKC saa stor som den øvrige Cirkel-Bue CBAK; følgelig er Vinklen BXC saa stor som Vinklen COK (27.3), og derfore er Cirkel-Stykket BXC ligedannet som Cirkel-Stykket COK (11 Def.3). Men de staaer ogsaa paa lige store rette Linier BC, CK; følgelig (24.3) er Cirkel-Stykket BXC saa stort som Cirkel-Stykket COK. Da nu ogsaa Trianglen BGC er saa stor som Trianglen CGK, saa er den heele Sector eller det hele Cirkel-Skaar GBC saa stor som det heele Cirkel-Skaar GCK. Paa samme Maade bevises ogsaa, at Cirkel-Skaaret GKL er saa stor som GBC eller GCK; følgelig ere de tre Cirkel-Skaar GBC, GCK, GKL lige store. Ligeledes kand bevises at de tre Cirkel-Skaar HEF, HFM, HMN ere lige store. Derfore er Cirkel-Buen BL lige saa mangefold af Cirkel-Buen BC som Cirkel-Skaaret GBL er af Cirkel-Skaaret GBC, og Cirkel-Buen EN er lige saa mangefold af Cirkel-Buen EF, som Cirkel-Skaaret HEN er af Cirkel-Skaaret HEF. Ydermere følger af det som tilforn blev beviist, at dersom Cirkel-Buen BL er lige saa stor som Cirkel-Buen EN, saa er ogsaa Cirkel-Skaaret GBL saa stor som Cirkel-Skaaret HEN, og dersom BL er større end EN, saa er GBL ogsaa større end HEN, og dersom BL er mindre end EN, saa er GBL mindre end HEN. Følgelig ligesom Cirkel-Buen BC forholder sig til Cirkel-Buen EF, saa forholder sig Cirkel-Skaaret GBC til Cirkel-Skaaret HEF. (5 Def. 5). Hvilket (2) var at bevise.

Corollarium.

Heraf er det klart, at Cirkel-Skaaret GBC forholder sig ogsaa til Cirkel-Skaaret HEF, som Vinklen BGC forholder sig til Vinklen EHF (11. 5).

Euclidis

EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Ellevte Bog.

Definitiones (Forklaringer.)

1. Et Solidum er det, som har Længde, Brede og Tykkelse.

2. Det yderste paa et Solidum er en Superficies.

3. En ret Linie (AB) siges at staae perpendicular paa en Plan (CDE), naar den giør rette Vinkler (BAC, BAE, BAD) med alle de rette Linier (AC, AE, AD), som drages i Planen (CDE) og røre den førstbemeldte Linie (AB). Tab. I. Fig. 1.

Hvad en Plan er, er bleven forklaret udi den første Bog i den 7 Definition.

4. En Plan (AB) siges at staae perpendicular paa en anden Plan (EF), naar de rette Linier (HG, ID), som drages i en af Planerne (saasom her i AB) perpendicular paa Planernes fælles Skiærings-Linie (AC), staae perpendicular paa den anden Plan EF. Fig. 2.

5. En ret Linies (CD) Inclination eller Hælding til en Plan (AB) kaldes den spidse Vinkel (CDE), som den bemeldte Linie (CD) giør med en anden ret Linie (DE), som er dragen i Planen (AB) fra den Punkt (D) i den heldende Linie (CD), som er i Planen (AB), til den Punkt (E), udi hvilken den Perpendicular-Linie (CE) falder, som drages Fig. 3.

fra

Tab. 1. fra den anden Ende (C) af den heldende Linie (CD) ned paa Planen (AB).

Fig. 4. 6. En Plans (ABCD) Inclination eller Hælding til en anden Plan (EF) kaldes den spidse Vinkel GHI, som indsluttes af toe rette Linier (GH, HI), som ere dragne i begge Planerne (ABCD, EF) til en og den samme Punkt (H) i Planernes fælles Skiærings-Linie (BC) og som begge giøre rette Vinkler med Skiærings-Linien (BC).

Fig. 4. Fig. 5. 7. Toe Planer (AC og KL) siges at helde ligedan til toe andre Planer (EF, MN), naar de forbemeldte Inclinations eller Heldings Vinkler (GHI, OPQ) ere lige store.

8. De Planer kaldes parallele, som paa ingen Side stø-der sammen, om de end aldrig saa langt bleve uddragne.

9. De Solida kaldes lige skikkede, som ere indsluttede med lige mange og lige skikkede Planer.

10. De Solida kaldes lige store og lige skikkede, som ere indsluttede med lige mange, lige skikkede og lige store Planer.

11. Det kaldes en Solid Vinkel (Angulus solidus), som er indsluttet med meer end toe flade Vinkler, som ikke ligge i en og den samme Plan og som alle støde sammen i een Punkt.

Fig. 6. For Exempel. Dersom tre eller fleere flade Vinkler (see Def. 8. 1) ADB, BDC, CDE, EDA støde saaledes sammen i en eneste Punkt D, at de ikke ligge udi en og den samme Plan, saa bliver den Kant D, som de giøre med hinanden, kaldet en Solid Vinkel.

Fig. 6. 12. En Pyramide er et Solidum, som er indsluttet med Triangler (DAB, DBC, DCE, DEA), som ere satte paa en og den samme Plan (ABCE) og som alle støde sammen i en Punkt D.

13. Et

13. Et Prisma er et Solidum, som er indsluttet med Planer, hvoraf toe (ABC, DEF), som ere hinanden imodsatte, ere lige store, lige skikkede og parallele; og de øvrige (AE, BF, CD) ere Parallelogrammer. Tab. I. Fig. 7.

14. En Kugle (Sphæra) er et Solidum, som bliver beskrevet, naar en halv Cirkel (ACB) bevæger sig saa længe omkring sin Middel-Linie (AB), som imidlertid maae blive u-bevæged, indtil den kommer til det Sted igien, hvorfra den begyndte sin Bevægelse. Fig. 8.

15. Kuglens Axis er den u-bevægede rette Linie (AB), omkring hvilken Halv-Cirklen (ACB) bevæger sig. Fig. 8.

16. Kuglens Middel-Punkt eller Centrum er den selv samme som Halv-Cirklens Middel-Punkt (D). Fig. 8.

17. Kuglens Middel-Linie eller Diameter er en ret Linie, som gaaer igiennem Kuglens Middel-Punkt og endes paa begge Sider i Kuglens Superficies eller yderste Omtrek.

18. En Kegle (Conus) er et Solidum, som bliver beskrevet, naar en ret-vinkelt Triangel (ABC) bevæger sig saa længe rundt omkring en af de Sider (AB, BC,) som indslutte den rette Vinkel CAB (saasom omkring BC), som imidlertid maae blive u-bevæged, indtil den kommer til det Sted igien, hvorfra den begyndte sin Bevægelse. Dersom den u-bevægede rette Linie BC er lige saa stor som den anden AB, som bevæger sig omkring den rette Vinkel (ADC), saa bliver Keglen kaldet Ret-Vinkelt. Og dersom den er mindre, saa kaldes Keglen stump-vinkelt; og dersom den er større, saa kaldes den spids-vinkelt. Fig. 9

19. Keglens Axis er den u-bevægede rette Linie CB, omkring hvilken Triangleln ABC bevæges.

Tab. I. 20. Men Kuglens Grund-Plan (Basis) er den Cirkel (ADE), som beskrives af den sig bevægende rette Linie (AB).

Fig. 10. 21. En Cylinder (Cylindrus) er et Solidum, som bliver beskrevet, naar et ret-vinkelt Parallelogram (ABCD) bevæges saa længe rundt omkring en af Siderne, (saa som omkring AB), som imidlertid maae blive u-bevæged, indtil det kommer til det Sted igien, hvorfra det begyndte at bevæges.

22. Axis af en Cylinder er den u-bevægede rette Linie (AB), omkring hvilken Parallelogrammet (ABCD) bevæges.

23. Grund-Planerne af en Cylinder ere de Cirkler (DEF, CGH), som blive beskrevne af toe hinanden imodsatte og sig bevægende Sider (AD, BC).

24. Kegler og Cylindrer kaldes lige skikkede, naar deres Axes og Middel-Linierne af deres Grund-Planer ere proportionale.

For Exempel. Dersom i tvende Kegler (see Fig. 12, 13), eller ogsaa i tvende Cylindrer (see Fig. 14, 15) Axis AD udi den ene forholder sig til Axis EH udi den anden, som Middel-Linien BC af den enes Grund-Plan til Middel-Linien FG af den andens Grund-Plan, saa siges Keglerne at være lige skikkede med hinanden, og lige saa Cylindrene.

Fig. 11. 25. En Tærning (Cubus) er et Solidum, som er indsluttet med sex lige store Qvadrater (AC, FD, BF, CG, AG, BD).

26. Et Tetraedrum er et Solidum, som er indsluttet med fire lige store og lige sidede Triangler.

27. Et Octaedrum er et Solidum, som ere indsluttet med otte lige store og lige sidede Triangler.

28. Et

28. Et Dodecaedrum er et Solidum, som er indsluttet med tolv Femkanter, som ere lige store og have lige store Sider og lige store Vinkler. Tab. I.

29. Et Icosaedrum er et Solidum, som er indsluttet med tive lige store og lige sidede Triangler.

30. Et Parallel-sidet Solidum eller et Parallelepipedum er et Solidum, som er indsluttet med sex Firkanter, af hvilke de, som ere hinanden imodsatte, ere parallele med hinanden, nemlig AC parallel med FD, BF parallel med CG, og AG parallel med BD. Fig. II.

Den I Proposition.

Theorema.

En Part af en ret Linie kand ikke være i en Plan, og en anden Part deraf uden for den samme Plan.

Demonstration. Vil nogen sige, at saadant kand være mueligt, saa lad ABC være en ret Linie, hvoraf en Part AB er i en Plan EF og en anden Part BC uden for selv samme Plan, saa at alle Punkter i AB ere i Planen EF, men alle Punkter i BC ere uden for, det er, enten oven over eller neden under selv samme Plan EF. Fig. 16.

Drager man nu (efter 2 Post.) AB længere ud i Planen EF henimod D, saa er enhver af de rette Linier CB, BD i en ret Linie med AB, og følgelig have de begge et fælles Stykke AB, og altsaa skiære de hverandre i fleere Punkter end i een (nemlig i alle de Punkter, som ere i den rette Linie AB), som er u-rimeligt. Derfore kand da en Part af en ret Linie ikke være i en Plan, og en anden Part deraf uden for selv samme Plan. Hvilket var det, som skulde bevises.

Tab. I.

Den 2 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier skiærer hinanden, saa ere de begge i een og den samme Plan: Og enhver Triangel er i een Plan.

Fig. 17. Exempel. Lad de tvende rette Linier AB, CD skiære hinanden i Punkten E: Saa siger jeg, at de ere begge i een og den samme Plan, og at enhver Triangel er i een og den samme Plan.

Construction. Man drager CB og tager toe Punkter F, G, hvor man vil i de rette Linier EC, EB, og toe andre Punkter i CB saasom H og K. Derneſt drager man FG, FH, GK. Nu skal først bevises, at Trianglen ECB ligger udi een og den samme Plan.

Demonstration. Thi skulde den Triangel ECB ikke ligge i een og den samme Plan, men en Part deraf, saasom den Part FCH eller den Part GKB skulde ligge i een Plan, og den øvrige Part deraf i en anden Plan, saa skulde ogsaa en Part af den rette Linie EC eller af EB ligge udi een Plan og den anden Part i en anden. Ligeledes, dersom den Part FCBG skulde ligge i een Plan, og den anden Part EFG i en anden, saa skulle ogsaa en Part af begge de Linier EC, EB ligge i en Plan og den anden Part i en anden, hvilket er u-rimeligt (1 Prop.). Derfore er Trianglen ECB i een og den samme Plan. Følgelig ere ogsaa de rette Linier EC, EB i een og den samme Plan, og derfore maae ogsaa (1 Prop.) de heele rette Linier AB, CD ligge i een og den samme Plan. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Den 3 Proposition. Tab. I.

Theorema.

Dersom toe Planer skiære hinanden, saa skal deres fælles Skiærings-Linie være en ret Linie.

Exempel. Lad toe Planer AB, CB skiære hinanden, og lad BD være deres fælles Skiærings-Linie: Saa siger jeg, at BD er en ret Linie. Fig. 18.

Demonstration. Dersom BD, som begge Planerne have tilfælles, ikke var en ret Linie, saa maatte man kunne drage i Planen CB fra B til D en ret Linie, for Exempel BED og ligeledes i Planen AB en ret Linie BFD, og disse toe rette Linier skulde da indslutte et Rum; hvilket er u-mueligt (12 Ax.). Og derfor er da BD en ret Linie. Hvilket var det, som skulde bevises

Den 4 Proposition.

Theorema.

Dersom paa toe rette Linier, som skiære hinanden, en tredie ret Linie staaer Perpendicular i Skiærings-Punkten: Saa skal den ogsaa være Perpendicular paa den Plan, som drages igiennem de toe førstbemeldte Linier.

Exempel. Lad paa de toe rette Linier AB, CD, som skiære hinanden i E, en tredie ret Linie EF staae perpendicular i Skiærings-Punkten E: Saa siger jeg, at EF er perpendicular paa den Plan, som drages igiennem AB, DC. Fig. 19.

Construction. Man giør AE, EB, EC, ED lige store (3. 1), og i den Plan, hvorudi AB, DC ligge, drages igiennem E en ret Linie GEH. Derneſt drages AD, CB. En-

Tab. 1. delig antager man i den rette Linie EF en Punkt F efter Behag og siden drager man de rette Linier FA, FG, FD, FB, FH, FC.

Demonstration. Efterdi nu udi de toe Triangler AED og CEB de toe Sider AE, ED ere (efter Constr.) saa store som de toe Sider CE, EB og Vinklen AED er (15. 1) saa stor som Vinklen CEB; saa er og (4. 1) AD saa stor som CB og Vinklen DAE saa stor som Vinklen CBE. Videre er Vinklen AEG (15. 1) saa stor som Vinklen BEH. Følgelig ere i de toe Triangler GEA, HEB toe Vinkler GAE, AEG saa store som toe Vinkler HBE, BEH; desuden ere og de Sider AE, EB, som ligge imellem de lige store Vinkler, lige store med hinanden (efter Constr.): Følgelig er (26. 1) Siden GE saa stor som EH og AG saa stor som BH. Fordi fremdeles udi de toe Triangler AEF og BEF Siden AE er saa stor som EB, og EF er en fælles Side og perpendicular paa AB (efter Hyp.), saa er (4. 1) Grund-Linien AF saa stor som FB. Paa samme Maade beviser man ogsaa, at DF, CF ere lige store. Efterdi nu udi de toe Triangler AFD, CFB den Side AF er saa stor som BF og AD er (som tilforn blev beviist) saa stor som BC og Grund-Linien DF er saa stor som Grund-Linien CF: Saa er ogsaa (8. 1) Vinklen FAD saa stor som Vinklen FBC. Da nu tilforn er beviist, at FA er saa stor som FB og AG saa stor som BH og da disse Sider indslutte de lige store Vinkler FAG og FBH, saa er og (4. 1) Grund-Linien FG saa stor som Grund-Linien FH. Altsaa har man her toe Triangler FEG, FEH, hvori GE er saa stor som EH, og EF er en fælles Side, og FG er saa stor som FH: Følgelig (8. 1) skal Vinklen GEF være saa stor som Vinklen FEH, og altsaa gior EF rette Vinkler med den rette Linie GEH (10 Def. 1). Paa samme Maade kand man bevise, at FE gior rette Vinkler med alle andre rette Linier, som ere i samme Plan som AB, DC og som røre bemeldte Linie FE. Da nu (3 Def. 11) en ret siges at være perpendicular paa en Plan, naar den gior rette Vinkler, med alle

le de rette Linier, som drages i samme Plan og røre forstbe- Tab. I.
meldte Linie; saa er det klart, at FE er perpendicular paa den
Plan, som gaaer igiennem AB, DC. Hvilket var det, som skul-
de bevises.

Den 5 Proposition.

Theorema.

Dersom paa tre rette Linier, som røre hinanden, en anden ret Linie staaer perpendicular i deres fælles Skiærings-Punkt: Saa skal de tre rette Linier være i een og den samme Plan.

Exempel. Lad paa de tre rette Linier BE, BD, BC, som røre hin- Fig. 20.
anden i B, en anden ret Linie AB staae perpendicular i Skiærings eller Rørings-Punkten B: Saa siger jeg, at BE, BD, BC ligge i een og den samme Plan.

Demonstration. Vil man negte dette, saa lad toe af dem, for Exempel EB, BD ligge i en Plan EFD og den tredie BC uden for selv samme Plan EFD, og lad den Plan AC, hvorudi AB, BC ere, blive forlænget og skiære Planen EFD i BF, saa skal denne Skiærings-Linie BF være en ret Linie (3. 11), og de tre rette Linier AB, BC, BF skal være i een og den samme Plan AF. Da nu AB er perpendicular paa BD og BE (efter Hyp.), saa skal den (4. 11) ogsaa være perpendicular paa den Plan EFD, som gaaer igiennem BD, BE og følgeligen (3 Def. 11) skal den ogsaa være perpendicular paa BF, som er i bemeldte Plan EFD og rører AB. Derfore er da ABF en ret Vinkel. Ligeledes er ABC (efter Hyp.) en ret Vinkel. Følgelig skal (10 Ax.) disse toe Vinkler ABC, ABF være lige store, hvilket er u-mueligt (9 Ax.). Derfore kand BC ikke være uden for den Plan, udi hvilken BE, BD ligge, og følgeligen skal de tre rette Linier BE, BD, BC være i een og den samme Plan. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Tab.1.

Den 6 Proposition.
Theorema.

Dersom toe rette Linier staae perpendicular paa een og den samme Plan, saa ere de parallele med hinanden.

Fig.21. Exempel. Lad de tvende rette Linier AB, CD staae perpendicular paa een og den samme Plan EF i Punkterne B, D: Saa siger jeg, at AB er parallel med CD.

Construction. Man drager den rette Linien BD og i Planen EF opreises (11. 1) paa BD fra Punkten D en Perpendicular-Linie DG, som giores saa stor som AB. Endelig drager man de rette Linier BG, AG, AD.

Demonstration. Fordi altsaa AB er perpendicular paa Planen EF: Saa skal AB giore rette Vinkler med alle de rette Linier, som røre den og ere i den bemeldte Plan (3 Def. 11). Da nu enhver af de rette Linier GB, BD er i Planen EF og rører AB; saa er enhver af de tvende Vinkler ABG, ABD en ret Vinkel. Paa samme Maade bevises ogsaa, at CDB, CDG ere begge rette Vinkler. Eftersom nu AB er saa stor som DG (Constr.), og BD er en fælles Side for Trianglerne ADB og BDG; saa ere de toe Sider AB, BD saa store som toe Sider BD, DG da nu ogsaa Vinklen ABD er saa stor som Vinklen BDG, thi de ere begge rette Vinkler: Saa er Grund-Linien AD lige saa stor som Grund-Linien BG (4. 1); og fordi AB er saa stor som DG, og BG er saa stor som AD, saa ere i Trianglerne ABG, GAD toe Sider AB, BG saa store som toe Sider GD, DA, og Grund-Linien GA er tilfælles for dem begge: Altsaa er ogsaa Vinklen ABG lige saa stor (8. 1) som Vinklen ADG. Nu er ABG en ret Vinkel, som tilforn blev beviist: Følgelig er ADG ogsaa en ret Vinkel. Altsaa staaer GD perpendicular paa DA. Men den staaer ogsaa perpendicular

paa

paa BD og DC: Altsaa staaer GD perpendicular paa de tre rette Linier BD, DA, DC i deres Rørings-Punkt D: Følgelig ere de tre rette Linier BD, DA, DC i en og den samme Plan (5. 11); og af disse ere de toe BD, DA i selv samme Plan som AB (2. 11), fordi enhver Triangel er i een Plan. Altsaa ere og de toe rette Linier AB, DC udi een og den samme Plan. Ydermere ere de toe Vinkler ABD, BDC begge rette Vinkler. Følgelig ere AB og DC parallele (28. 1). Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. I.

Den 7 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier ere parallele med hinanden, og der tages i hver af dem en Punkt efter Behag: Saa skal den rette Linie, som sammenføyer de samme Punkter, være i een og den samme Plan med Parallel-Linierne.

Exempel. Lad de tvende rette Linier AB, CD være parallele med hinanden, og lad der tages i AB en Punct E og i CD en Punkt F: Saa siger jeg, at den rette Linie, som sammenføyer Punkterne E og F, er i samme Plan med AB, CD. Fig. 22.

Demonstration. Vil nogen negte dette, saa lad bemeldte rette Linie være uden for den Plan, som AB, CD ere udi, saasom EGF, og lad igiennem EGF en Plan blive dragen, som skiærer den bemeldte Plan, hvori AB, CD ligge, og lad Skiærings-Linien (3. 11) være den rette Linie EF. Saa skal toe rette Linier EF og EGF indslutte et Rum, som dog ikke kand skee (12 Ax.). Følgelig kand den rette Linie, som sammenføyer Punkterne E, F, ikke være uden for den Plan, som AB, CD ere udi, og derfore maae den være i en og den samme Plan med AB og CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Tab. 1.

Den 8 Proposition.
Theorema.

Dersom toe rette Linier ere parallele med hinanden og een af dem er perpendicular paa en Plan: Saa er ogsaa den anden perpendicular paa den samme Plan.

Fig. 21. Exempel. Lad toe rette Linier AB, CD være parallele med hinanden, og lad den eene af dem, saasom AB være perpendicular paa en Plan EF: Saa siger jeg, at den anden Linie CD er ogsaa perpendicular paa den samme Plan EF.

Constructionen er her den selv samme som i den 6te Proposition.

Demonstration. Fordi nu AB staaer perpendicular paa Planen EF, saa er den ogsaa perpendicular paa alle de rette Linier, som røre den og ligge i den samme Plan EF (3 Def. 11). Altsaa ere begge Vinklerne ABD, ABG rette Vinkler. Fordi fremdeles den rette Linie BD falder paa toe Parallel-Linier AB, CD; saa ere ABD, CDB saa store som toe rette Vinkler (29. 1). Men nu er ABD en ret Vinkel: Altsaa er CDB ogsaa en ret Vinkel; følgelig er CD perpendicular paa BD. Og fordi AB er lige saa stor som DG, og BD er tilfælles for begge Triangler ABD og BDG, saa ere toe Sider AB, BD saa store som toe Sider DG, DB og desuden er Vinklen ABD saa stor som GDB, fordi enhver af dem er en ret Vinkel; altsaa er Grund-Linien AD lige saa stor som Grund-Linien BG (4. 1). Og fordi AB er saa stor som DG, og BG er saa stor som AD, saa ere i Trianglerne AGB og AGD toe Sider AB, BG saa store som toe Sider GD, DA, og AG er Trianglernes fælles Grund-Linie: Følgelig (4. 1) er Vinklen ABG saa stor som Vinklen GDA. Men ABG er en ret Vinkel; følgelig er GDA ogsaa en ret Vinkel, og derfore er GD perpendicular paa DA;

og

og den er ogsaa Perpendicular paa BD (efter Constr.). Følgelig er GD ogsaa perpendicular (4. 11) til den Plan, som gaaer igiennem BD, DA: Og altsaa giør den rette Vinkel med alle de rette Linier, som i den bemeldte Plan røre den. Men fordi DC er i samme Plan som AB, BD (7. 11), og AB, BD ere i samme Plan som BD, DA (2. 11), saa er og DC i samme Plan som BD, DA og den rører DG, derfore giør da DG rette Vinkler med DC og altsaa er DC perpendicular paa DG. Ligeledes er DC ogsaa perpendicular paa DB, som tilforn blev beviist. Følgelig skal DC (4. 11) være perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem BD, DG. Da nu BD, DG ere i den Plan EF, som AB staaer perpendicular paa: Saa følger at CD ogsaa er perpendicular paa den samme Plan EF. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab.1.

Den 9 Proposition.

Theorema.

De rette Linier, som ere parallele med een og den samme rette Linie, men ikke i samme Plan med den, ere ogsaa Parallele med hinanden.

Exempel. Lad enhver af de tvende rette Linier AB, EF være parallel med den rette Linie CD, men de skal ikke ligge i een og den samme Plan med CD: Saa siger jeg, at AB og EF er parallele med hinanden. Fig.23.

Construction. Udi CD antages en Punkt K efter Behag; paa CD udaf Punkten K opreyses (11. 1) i den Plan, som gaaer igiennem AB, CD, en Perpendicular-Linie KG, og i den Plan, som gaaer igiennem CD, EF opreyses ligeledes paa CD udaf Punkten K en Perpendicular-Linie KH.

Demonstration. Fordi nu CD er parpendicular baade paa KG og KH, saa er den ogsaa perpendicular (4. 11)

 paa

Tab. 1. paa den Plan, som gaaer igiennem GKH. Men nu er CD parallel med AB. Følgelig er AB ogsaa perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem GKH (8. 11). Paa samme Maade kand mand ogsaa bevise, at EF er perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem GKH. Altsaa er enhver af de toe rette Linier AB, EF perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem GKH. Men dersom toe rette Linier ere perpendicular paa een og den samme Plan, saa ere de parallele med hinanden (6. 11): Altsaa er AB parallel med EF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 10 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier, som røre hverandre, ere parallele med toe andre rette Linier, som ogsaa røre hinanden, men ikke i samme Plan: Saa skal disse rette Linier indslutte lige store Vinkler.

Fig. 7. Exempel. Lad toe rette Linier AB, BC, som røre hinanden, være parallel med toe andre rette Linier DE, EF, som ogsaa røre hinanden, men AB, BC skal ikke være i samme Plan med DE, EF: Saa siger jeg, at Vinklen ABC er lige saa stor som Vinklen DEF.

Construction. Giør AB, BC, DE, EF lige store med hinanden og drag AD, CF, BE, AC, DF.

Demonstration. Eftersom nu AB, DE ere (Hyp.) lige store og parallele med hinanden, saa ere ogsaa AD, BE (33. 1) lige store og parallele. Af selv samme Aarsag ere ogsaa CF, BE lige store og parallele, Følgelig er enhver af de rette Linier AD, CF af samme Størrelse og parallele med BE. Men de rette Linier, som ere parallele med een og den samme rette Linie, men ikke i samme Plan med den, ere (9. 11) ogsaa parallele

rallele med hinanden. Følgelig ere AD, CF lige store og parallele, og fordi AC, DF sammenføyer dem, saa ere AC, DF ogsaa lige store og parallele (33. 1). Fordi nu de toe Sider AB, BC ere saa store (efter Constr.) som de toe Sider DE, EF, og Grund-Linien AC er saa stor som Grund-Linien DF, saa er ogsaa (8. 1) Vinklen ABC saa stor som Vinklen DEF. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 1.

Den II Proposition.

Problema.

Fra en given Punkt, som er oven for en Plan, at drage en ret Linie perpendicular ned paa samme Plan.

Exempel. Lad A være en given Punkt, som er oven for en given Plan BH: Man skal drage fra Punkten A en ret Linie perpendicular ned paa Planen BH. Fig. 24

Construction. Man drager udi den givne Plan BH efter Behag en ret Linie BC. Fra A drages (12. 1) en ret Linie AD perpendicular ned paa BC. Dersom nu AD er perpendicular paa Planen BH, saa er det giort, som forlanges. Men hvis ikke: Saa drager man udi Planen BH fra Punkten D en ret Linie DE perpendicular paa BC (11. 1); og fra Punkten A drages en ret Linie AF perpendicular ned paa DE (12. 1). Saa er AF den forlangte Perpendicular-Linie.

Demonstration. For at bevise dette, saa drager man (31. 1) udi Planen BH igiennem den Punkt F en ret Linie HG parallel med BC. Fordi nu BC er perpendicular til begge rette Linier DA og DE, saa skal BC ogsaa være perpendicular til den Plan, som gaaer igiennem DA og DE (4. 11). Men nu er HG dragen parallel med BC. Derfore skal (8. 11) HG ogsaa være perpendicular paa den plan, som gaaer igiennem DA og DE: Og følgelig maae HG (3 Def. 11) giøre rette Vin-

Tab.1. fler med alle de rette Linier, som ere i samme Plan og røre den. Da nu AF er i samme Plan med DA og DE (2. 11), og rører HG; saa er det klart, at HG gior rette Vinkler med AF; følgelig er AF perpendicular paa HG. Men AF er og perpendicular paa DE (Constr.); følgelig er AF perpendicular paa toe rette Linier DE og HG, som skiære hinanden udi F, og derfore (4. 11) er AF ogsaa perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem DE og HG. Men den givne Plan BH gaaer igiennem DE og HG, thi disse rette Linier ere begge dragne i Planen BH (efter Const-). Altsaa er AF perpendicular paa den givne Plan BH, og er dragen fra den givne Punkt A. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 12 Proposition.

Problema.

Paa en given Plan og af en given Punkt deri at opreyse en perpendicular-Linie.

Fig.25. Exempel. Lad MN være en given Plan og A en given Punkt deri. Her begieres at opreyse en Perpendicular-Linie paa Planen MN fra Punkten A.

Construction. Man antager en Punkt B uden for Planen MN og fra B drages en ret Linie BC perpendicular ned paa Planen MN (11. 11). Endelig drages (31. 1) igiennem A en ret Linie AD parallel med BC.

Demonstration. Fordi nu de tvende rette Linier AD, BC ere parallele med hinanden, og een af dem nemlig BC er perpendicular paa den givne Plan MN; saa er ogsaa den anden rette Linie AD perpendicular paa samme Plan MN (8. 11) og den er dragen fra den i Planen MN givne Punkt A. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den

Den 13 Proposition. Tab. 2.

Theorema.

Der kand ikke opreyses toe Perpendicular-Linier paa en given Plan fra en given Punkt deri og paa samme Side deraf.

Demonstration. Thi hvis det er muligt, saa lad Fig. 1. tvende rette Linier CD, CE blive opreyste perpendicular paa en given Plan AB fra en udi Planen AB given Punkt C og paa samme Side af Planen AB.

Eftersom nu begge rette Linier CD, CE ere perpendicular paa een og den samme Plan AB, saa ere de (6. 11) parallele med hinanden. Men de støde ogsaa sammen i C, som er u-rimeligt (efter 35 Def. 1). Heraf følger da, at der ey kand opreyses toe Perpendicular-Linier paa en given Plan fra en og den samme Punkt deri og paa samme Side deraf. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 14 Proposition.

Theorema.

De Planer, paa hvilke een og den samme rette Linie er perpendicular, ere parallele med hinanden.

Exempel. Lad en ret Linie AB være perpendicular paa toe Planer Fig. 2. CD, EF: Saa siger jeg, at disse tvende Planer CD, EF ere parallele med hinanden.

Demonstration. Thi dersom de ikke ere parallele, saa maae de støde sammen, naar de blive forlængede; lad dem da,

om

Tab. 2. om mueligt er, stode sammen, og lad den rette Linie HG være deres fælles Skiærings-Linie. Naar man nu i samme HG antager en Punkt K, og man drager de rette Linier AK, KB i de forlængte Planer CD, EF: Saa er AB (3 Def. 11) perpendicular paa enhver af de rette Linier AK, KB, fordi den er (Hyp.) perpendicular paa de Planer CD, EF, hvori AK, KB ligge. Følgelig ere de toe Vinkler ABK, BAK rette Vinkler, og altsaa ere i den Triangel AKB toe Vinkler ABK, BAK saa store som toe rette Vinkler; som er u-mueligt (17. 1). Derfore kand Planerne CD, EF ikke stode sammen, naar de blive forlængede. Følgelig ere de parallele med hinanden (8 Def. 11). Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 15 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier, som røre hinanden, ere parallele, men ikke i samme Plan, med toe andre rette Linier, som ogsaa røre hinanden: Saa skal ogsaa de Planer, som disse rette Linier ligge udi, være parallele med hinanden.

Fig. 3. Exempel. Lad de tvende hinanden rørende rette Linier AB, AC være parallele, men ikke i samme Plan, med toe andre DE, DF, som ogsaa røre hinanden: Saa siger jeg, at Planen BC, som gaaer igiennem AB, AC, er parallel med Planen EF, som gaaer igiennem DE, DF.

Construction. Man drager fra A (11. 11) en ret Linie AG perpendicular paa Planen EF, og i Planen EF drages igiennem G en ret Linie GH parallel med DE (31. 1), og en anden ret Linie GI parallel med DF.

Demonstration. Eftersom nu AG er perperdicular paa Planen EF, saa giør AG rette Vinkler med GH og GI (3 Def.

Def. 11). Altsaa ere AGH, AGI rette Vinkler. Nu er AB parallel (9. 11) med GH, thi enhver af dem er parallel med DE; følgelig ere (29. 1) de Vinkler BAG, AGH saa store som toe rette Vinkler, og fordi AGH er en ret Vinkel, saa er BAG ogsaa en ret Vinkel. Paa samme Maade bevises ogsaa, at CAG er en ret Vinkel. Følgelig er GA perpendicular paa de tvende rette Linier CA, AB, som skiære hinanden udi A, og derfore er den ogsaa perpendicular paa den Plan BC, som gaaer igiennem dem (4. 11). Men GA er ogsaa perpendicular paa Planen EF, som gaaer igiennem ED, DF. Altsaa er Planen BC, som gaaer igiennem AB, AC, parallel med Planen EF, som gaaer igiennem ED, DF (14. 11). Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. I.

Den 16 Proposition.

Theorema.

Dersom toe parallele Planer blive igiennemskaarne af en Plan; saa ere deris fællis skiærings-Linier parallele med hinanden.

Exempel. Lad de tvende Planer AB, CD være parallele med hinanden og lad dem være igiennemskaarne ved en tredie Plan EFGH, og lad EF og GH være deris fællis Skiærings-Linier: Saa siger jeg, at EF, GH ere parallele med hinanden. Fig. 4.

Demonstration. Thi hvis de ikke er parallele, saa maae de paa een af Siderne støde sammen, naar de blive længere uddragne, thi de ere begge i een og den samme Plan EFGH. Lad dem altsaa blive forlængede og støde sammen for Exempel i K. Dersom nu Planerne AB, CD blive forlængede, saa skal de gaae igiennem de rette Linier EFK, HGK (1. 11) og følgelig skal ogsaa Planerne AB, CD støde sammen, som er u-mueligt (8 Def. 11), fordi de ere parallele (efter Hyp.); følgelig

Tab, 2. gelig kand EF, GH ikke heller støde sammen, og altsaa ere de parallele (35 Def. 1). Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 17 Proposition.

Theorema.

Dersom toe rette Linier blive igiennemskaarne af parallele Planer; saa skal Stykkerne deraf være proportionale.

Fig. 5. Exempel. Lad tvende rette Linier AB, CD blive igiennemskaarne af de parallele Planer GH, KL, MN i Punkterne A, E, B, C, F, D: Saa siger jeg, at den rette Linie AE forholder sig til EB, som CF forholder sig til FD.

Construction. Drag AC, BD og AD, og lad AD møde Planen KL i X og drag FX og XE.

Demonstration. Fordi nu de tvende parallele Planer MN, KL er igiennemskaarne ved en tredie Plan BEXD, saa ere (16. 11) deres fælles Skiærings-Linier BD, EX parallele. Ligeledes, fordi Planerne GH, KL ere parallele, og Planen AXFC skiærer dem, saa ere Skiærings-Linierne AC, FX parallele. Eftersom da i Trianglen ABD en ret Linie EX er parallel med een af Siderne, nemlig med BD, saa forholder sig (2. 6) AE til EB, som AX til XD. Ligeledes fordi FX er dragen i Trianglen ADC parallel med een af dens Sider nemlig med AC, saa forholder sig (2. 6) AX til XD, som CF til FD. Men AX forholder sig ogsaa til XD som AE til EB, som nyligen blev beviist. Følgelig forholder sig (11. 5) AE til EB som CF til FD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 18 Proposition.

Tab. 2.

Theorema.

Dersom en ret Linie staaer perpendicular paa en Plan; saa skal alle de Planer, som gaae igiennem den, være perpendicular paa den samme Plan.

Exempel. Lad den rette Linie AB være perpendicular paa Planen CD: Saa siger jeg, at alle de Planer, som gaae igiennum AB, ere perpendicular paa samme Plan CD. Fig. 6

Construction. Lad en Plan EF gaae igiennem AB, saa at den skiærer Planen CD, og lad den rette Linie GF være deres fælles Skiærings-Line. Dernæst antages i GF en Punkt H, hvorfra en ret Linie HL drages (11. 1) i Planen EF perpendicular paa Skiærings-Linien GF.

Demonstration. Eftersom nu AB er perpendicular paa Planen CD, saa er den ogsaa (3 Def. 11) perpendicular paa den rette Linie GF, som rører AB i Planen CD. Følgelig er ABG en ret Vinkel. Men LHB er ogsaa en ret Vinkel, fordi LH er perpendicular (efter Constr.) paa GF, følgelig er AB parallel med LH (28. 1). Da nu AB er perpendicular paa Planen CD; saa følger, at LH ogsaa er perpendicular paa samme Plan CD (8. 11). Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at alle andre rette Linier, som drages i Planen EF perpendicular paa den fælles Skiærings-Linie GF, ere ogsaa perpendicular paa Planen CD. Da nu (4 Def. 11) en Plan siges at staae perpendicular paa en anden Plan, naar de rette Linier, som i een af Planerne drages perpendicular paa deres fælles Skiærings-Linie, staae perpendicular paa den anden Plan. Saa følger at Planen EF staaer perpendicular paa Planen CD. Ligeledes kand man bevise, at alle andre Planer,

Tab. 2. som gaae igiennem AB, ere perpendiculare paa Planen CD. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 19 Proposition.

Theorema.

Dersom toe Planer, som skiære hinanden, staae perpendicular paa en Plan: Saa er ogsaa deres fællis Skiærings-Linie perpendicular paa samme Plan.

Fig. 7. Exempel. Lad de tvende Planer AB, CD, som skiære hinanden, staae perpendicular paa Planen EF, og lad HG være deres fælles Skiærings-Linie: Saa siger jeg, at HG er perpendicular paa Planen EF.

Demonstration. Thi eftersom Planen AB er perpendicular paa Planen EF, saa kand i Planen AB fra Punkten G opreyses en ret Linie, som er perpendicular paa Planen EF (4 Def. 11). Ligeledes fordi Planen DC er perpendicular paa EF, saa kand i Planen DC og fra samme Punkt G opreyses en ret Linie, som er perpendicular paa Planen EF. Men der kand ikkuns drages een ret Linie perpendicular paa en Plan fra en Punkt deri og paa samme Side deraf (13. 11). Altsaa maae den rette Linie, som drages fra G perpendicular paa Planen EF, være fælles for begge Planerne AB og CD, og følgelig maae den være deres fælles Skiærings-Linie GH. Altsaa er GH perpendicular paa Planen EF. Hvilket var det, som skulde bevises

Den 20 Proposition.

Theorema.

Dersom en Solid Vinkel er indsluttet af tre flade

Vin-

Vinkler: Saa skal toe af disse, hvorledes de end tages, være større end den øvrige. Tab. 2.

Exempel. Lad den Solide Vinkel A være indsluttet af tre flade Vinkler BAC, BAD, DAC: Saa siger jeg, at toe af disse tre Vinkler, hvilke som helst man vil tage, ere tilsammen større end den øvrige. Fig. 8.

Construction og Demonstration. Thi dersom de alle tre ere ligestore, saa er det klart, at toe af dem altid ere større end den øvrige. Men hvis ikke, saa lad BAD være den største iblant dem, og paa den rette Linie AB og udi Punkten A afsættes (23. 1) udi den Plan, som gaaer igiennem AB, AD, en Vinkel BAE af lige Størrelse med Vinklen BAC, og AE giøres (3. 1) saa stor som AC og igiennem E drages en ret Linie BED, som skiærer AB og AD i B og D, og endeligen drages de rette Linier CB, CD.

Fordi nu AC er saa stor som AE og AB er en fælles Side og Vinklen CAB er saa stor som BAE, saa er ogsaa (4. 1) CB saa stor som BE. Men BC og CD ere tilsammen større end BD (20. 1); følgelig er CD større end ED. Eftersom nu CA er saa stor som AE, og AD er en fælles Side, men Grund-Linien CD er større end Grund-Linien DE, saa er ogsaa (25. 1) Vinklen CAD større end Vinklen EAD. Men Vinklen BAC er saa stor som Vinklen BAE; følgelig ere de toe Vinkler BAC, CAD tilsammen større end den øvrige Vinkel BAD. Og fordi BAD er den største, saa følger, at naar man legger BAD til enhver af de toe andre Vinkler BAC og CAD, saa skal de begge være større end den øvrige, nemlig Vinklerne BAD, BAC skal være større end Vinklen CAD, og BAD, CAD større end BAC. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 21 Proposition.
Theorema.

De flade Vinkler, i hvor mange de end ere, som

Tab. 2. indslutte en Solid Vinkel, ere tilsammen mindre end fire rette Vinkler.

Fig. 9. Exempel. Lad A være en Solid Vinkel, som er indsluttet af de flade Vinkler BAC, CAD, og DAB; Saa siger jeg, at disse Vinkler BAC, CAD, DAB ere tilsammen mindre end fire rette Vinkler.

Construction. I de rette Linier AB, AC, AD antages efter behag de Punkter B, D, C; Og samme Punkter sammenføyes (1 Post) ved de rette Linier BC, CD, DB.

Demonstration. Fordi nu den Solide Vinkel B indsluttes af de tre flade Vinkler CBA, ABD og CBD, saa skal toe af disse Vinkler være tilsammen større end den tredie (20. 11); altsaa ere Vinklerne CBA, ABD større end Vinklen CBD. Paa samme Maade bevises ogsaa at Vinklerne BCA, ACD ere større end Vinklen BCD, og ligeledes, at de toe Vinkler ADC, ADB er større end Vinklen CDB. Altsaa ere de sex Vinkler CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB tilsammen større end de tre Vinkler CBD, BCD, CDB. Men disse tre Vinkler CBD, BCD, CDB ere saa store toe rette Vinkler (32. 1). Følgelig ere de sex Vinkler CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB større end de toe rette Vinkler. Eftersom nu i enhver af Trianglerne ABC, ACD, ADB alle tre Vinkler ere saa store som toe rette Vinkler, saa skal i de bemeldte tre Triangler alle de ni Vinkler CBA, BCA, BAC, ACD, CAD, ADC, ADB, ABD, DAB være saa store som sex rette Vinkler. Men af disse ere de sex CBA, BCA, ACD, ADC, ADB, ABD større end toe rette Vinkler, som tilforn blev beviist; følgelig ere de øvrige tre Vinkler BAC, CAD, DAB, som indslutte den Solide Vinkel A, mindre end fire rette Vinkler. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 22 Proposition
Theorema.

Tab.2.

Dersom der ere tre flade Vinkler, hvoraf toe, hvorledis de end tages, ere større end den øvrige, og som indsluttes af lige store rette Linier: Saa kand der beskrives en Triangel af de rette Linier, som sammenføye de lige store rette Linier.

Exempel. Lad der være tre flade Vinkler ABC, DEF, GHK, af hvilke toe, hvorledes de end tages, maae være tilsammen større end den øvrige nemlig ABC, DEF større end GHK; og ABC, GHK større end DEF; og DEF, GHK større end ABC, og lad de indsluttende rette Linier AB, BC, DE, EF, GH, HK være lige store og drag AC, DF, GK: Jeg siger da, at der kand beskrives en Triangel af de tre rette Linier AC, DF, GK, det er: Hvilke toe man tager af de tre rette Linier AC, DF, GK, skal tilsammen være større end den øvrige. Fig.10. Fig.11. Fig.12.

Construction og Demonstration. Thi dersom Vinklerne ABC, DEF, GHK ere lige store, saa ere ogsaa (4. 1) AC, DF, GK lige store, og følgelig skal toe af dem, hvilke man vil, være større end den øvrige. Men hvis ikke, saa afsættes paa den rette Linie AB udi Punkten B en Vinkel ABL af lige Størrelse med Vinklen GHK (23. 1), og BL giøres saa stor som een af de Linier AB, BC, DE, EF, GH, HK og man drager AL, CL.

Eftersom da AB, BL ere hver for sig saa store GH, HK og Vinklen ABL er lige saa stor som GHK, saa er ogsaa AL saa stor som GK (4. 1). Og fordi Vinklerne DEF, GHK ere (efter Hyp.) større end den øvrige ABC, og Vinklen GHK er saa stor som Vinklen ABL, saa er ogsaa Vinklen DEF større end Vinklen LBC; da nu Siderne LB, BC, DE, EF, som indslutte bemeldte Vinkler, ere lige store; saa er (24. 1) Grund-Linien DF større end LC. Efterdi nu GK er saa stor som AL,

(som

Tab.2. (som tilforn blev beviist), saa ere DF, GK tilsammen større end AL, LC, og følgelig ere DF, GK ogsaa større end AC, thi AL, LC ere (20. 1) større end AC. Paa samme Maade kand man ogsaa bevise at AC, DF ere tilsammen større end GK, og AC, GK tilsammen større end DF: Derfore kand der beskrives en Triangel (22. 1) af de tre rette Linier AC, DF, GK. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 23 Proposition.

Problema.

At beskrive en Solid Vinkel af tre givne flade Vinkler. Men disse tre Vinkler bør tilsammen være mindre end fire rette Vinkler, og toe af dem, hvorledis de end tages, bør være større end den øvrige.

Fig.13, 14, 15, 16. Exempel. Lad DAE, FBG, HCI være tre flade Vinkler, hvoraf toe, hvorledis de end tages ere mindre end den øvrige og som tilsammen ere mindre end fire rette Vinkler (see 20 og 21 Prop. 11): Det begiæres af bemeldte tre flade Vinkler at beskrive en Solid Vinkel.

Construction og Demonstration. De bemeldte Vinklers Sider AD, AF, BF, BG, CH, CI giøres lige store og sammenføyes ved de rette Linier DF, FG, HI, saa skal man af disse tre rette Linier kunne beskrive en Triangel (22. 11). Beskriv altsaa af DE, FG, HI en Triangel LMN (22. 1), saa at LM er saa stor som DE, MN saa stor som FG, og LN saa stor som HI. Beskriv dernæst omkring Trianglen LMN en Cirkel LMN (5. 4) og lad O være den samme Cirkels Centrum og drag OM, ON, OL. Endelig opreyses fra Punkten O en ret Linie OP perpendicular paa Cirklen LMN (12. 11). Jeg siger nu, at AD er større end OL. Thi, var AD lige saa stor som OL, saa skulde AE ogsaa være lige saa stor som OM, (thi OL og OM ere lige store (15 Def. 1) og AD, AE ere lige store

re efter Constr.). Nu er og LM saa stor som DE; følgelig Tab. 3.
(8. 1) skulde Vinklen A være lige saa stor som Vinklen LOM. Af samme Aarsag skulde B være lige saa stor som Vinklen MON, og Vinklen C saa stor som Vinklen LON. Altsaa skulde de tre Vinkler A, B, C være lige saa store som de tre Vinkler LOM, MON, LON. Da nu disse tre Vinkler ere tilsammen saa store som fire rette Vinkler, thi de Vinkler, som ere omkring en og den samme Punkt, ere tilsammen saa store som fire rette Vinkler (Cor. 15. 1); saa skulde ogsaa de tre Vinkler A, B, C være tilsammen saa store som fire rette Vinkler, hvilket er imod Hypotesin, thi man har forud sadt, at de skal være mindre end fire rette Vinkler. Følgelig kand AD ikke være saa stor som LO. Var nu fremdeles AD mindre end LO, saa skulde AE ogsaa være mindre end OM; følgelig, naar Trianglen ADE blev lagt oven paa Trianglen OLM, saa at deres lige store Grund-Linier DE, LM faldt paa hinanden, saa maatte de Sider DA, AE falde inden for Trianglen LOM, og følgelig skulde Vinklen A være større end Vinklen LOM (efter 21. 1). Af samme Aarsag skulde Vinklen B være større end Vinklen MON, og Vinklen C større end Vinklen LON. Da nu Vinklerne LOM, LON, MON ere (Cor. 15. 1) saa store som fire rette Vinkler, saa skulde Vinklerne A, B, C være tilsammen større end fire rette Vinkler, hvilket er imod hypothesin; følgelig kand AD ikke være mindre end LO. Efterdi altsaa AD er hverken lige saa stor heller ikke mindre end LO, saa følger at AD maae være større end LO. Derfore er ogsaa Qvadraten af AD større end Qvadraten af LO. Søg nu den Qvadrat, som tillige med Qvadraten af LO er saa stor som Qvadraten af DA (efter det nestfølgende Lemma) og giør OP saa stor som Siden af den fundne Qvadrat og drag de rette Linier LP, MP, NP. Saa er den Solide Vinkel P den forlangte.

Thi eftersom OP er perpendicular paa Planen af Cirklen LMN (efter Constr.), saa er den ogsaa (3 Def. 11) perpendicular paa de rette Linier OL, OM, ON. Og fordi OL er saa stor, som OM, og OP er tilfælles for Trianglerne

Tab.2. PLO, PMO og perpendicular paa OL og OM, saa er ogsaa (4. 1) LP saa stor som MP. Af samme Aarsag er ogsaa NP saa stor som LP eller MP: Følgelig ere de tre rette Linier PL, PM, PN lige store; og fordi Qvadraten af AD er saa stor som begge de Qvadrater af LO, OP (efter Constr.), og Qvadraten af LP er ogsaa (47. 1) saa stor som samme Qvadrater, saa er Qvadraten af AD lige saa stor som Qvadraten af LP. Og følgelig er AD saa stor som LP. Men nu ere AE, BF, BG, CH, CI hver i sær saa store som AD, og PM, PN ere beviiste at være saa store som LP; Altsaa ere AD, AE, BF, BG, CH, CI hver for sig saa store som enhver af de rette Linier PL, PM, PN. Fordi nu LP, PM ere hver i sær saa store som AD, AE, og LM er saa stor som DE (efter Constr.); saa (8. 1) er Vinklen LPM saa stor som Vinklen DAE. Af samme Aarsag er ogsaa Vinklen MPN saa stor som FBG, og LPN saa stor som HCI. Altsaa har man giort en Solid Vinkel P af tre flade Vinkler LPM, MPN, LPN, som ere lige saa store som de tre givne flade Vinkler DAE, FBG, HCI. Hvilket var det, som skulde giøres.

Lemma.

Naar toe Qvadrater af u-lige Størrelse blive givne, at finde den Qvadrat, som tillige med den mindre er lige saa stor som den større Qvadrat.

Fig.17. Exempel. Lad AD være Siden af den større Qvadrat og AB Siden af den mindre Qvadrat: Man skal finde den Qvadrat, som tillige med Qvadraten af AB er lige saa stor som Qvadraten af AD.

Construction. Paa den større rette Linie AD beskrives en halv Cirkel ABD og i samme afpasses den rette Linie AB (1. 4). Dernest drager man den rette Linie BD.

Demonstration. Fordi nu ABD er en ret Vinkel (31. 3), saa er Qvadraten af BD tillige med Qvadraten af AB

AB saa stor som Qvadraten af AD (47. 1). Altsaa er Qvadraten af BD den Qvadrat, som man skulde finde. Tab. 2.

Den 24 Proposition.

Theorema.

De Planer, som indslutte et Parallelepipedum, ere Parallogrammer, og af disse Parallelogrammer skal de toe, som staae lige over for hinanden, være lige skikkede og lige store.

Exempel. Lad ABHG være et Parallelepipidum, det er (efter 30 Def. 11) et Solidum, som er indsluttet med sex Planer AF, FC, CH, HA, BD, FH, hvoraf de, som staaer imod hinanden, ere parallele; Saa siger jeg (1.) at bemeldte sex Planer ere Parallologrammer, og (2) at af samme Parallelogrammer de toe, som staae imod hinanden, ere lige skikkede og lige store. Fig. 18.

Demonstration. Eftersom de Planer BD, FH ere parallele, og Planen AF skiærer dem, saa ere Skiærings-Linierne BA, FE parallele (efter 16. 11); Og fordi Planerne FC, HA ere parallele, og Planen AF skiærer dem, saa ere Skiærings-Linierne AE, BF parallele. Følgelig er ABFE et Parallelogram. Paa samme Maade bevises ogsaa, at de øvige fem Planer FC, CH, HA, BD, FH ere Parallelogrammer. Hvilket (1) var at bevise.

(2) Eftersom de rette Linier AB, BC ere parallele, men ikke i samme Plan med de toe EF, FG, saa er Vinklen ABC lige saa stor som Vinklen EFG (10. 11): Ligeledes kand man bevise, at de øvrige Vinkler i Parallelogrammet BD ere lige saa store som de øvrige Vinkler i Parallelogrammet FH. Fordi fremdeles i Parallelogrammet AF den Side AB er (34. 1) saa stor som Siden FE og i Parallelogrammet FC den Side BC er saa stor som Siden FG; saa forholder sig AB til BC

Tab.2. som EF til FG (75). Paa samme Maade beviser man ogsaa at de øvrige Sider i Parallelogrammet BD ere proportionale med de øvrige Sider i Parallelogrammet FH, som ere omkring de lige store Vinkler. Følgelig ere de Parallelogrammer BD og FH ligedannede (1 Def. 6). Drager man nu AC og EG, saa faaer man toe Triangler CBA, GFE, hvori de Sider AB, BC ere saa store som EF, FG og Vinklen ABC er saa stor som Vinklen EFG; følgelig er (4. 1) Trianglen CBA saa stor som Trianglen GFE. Men nu er Trianglen CBA halvparten (34. 1) af Parallelogrammet BD, og GFE halvparten af FH; følgelig er ogsaa BD lige saa stor som FH. Altsaa ere de imodsatte Parallelogrammer BD, FH ligedannede og lige store. Paa samme Maade bevises ogsaa, at de toe hinanden imodsatte Parallelogrammer AF, CH, og ligeledes de toe HA, FC ere ligedannede og lige store. Hvilket (2) var at bevise.

Den 25 Proposition.

Theorema.

Dersom et Parallel-sider Solidum eller et Parallelepipedum bliver igiennemskaaret ved en Plan, som er Parallel med de imodsatte Planer: Saa skal de udkommende Parallelepipeder forholde sig til hinanden, som deres Bases eller Grund-Planer.

Fig.21. Exempel. Lad det Parallelepipedum BMIC blive igiennemskaaret ved en Plan EG, som er Parallel med de hinanden imodsatte Planer BI, MC: Saa siger jeg at det Parallelepipedum BEIG forholder sig til det Parallelepipedum EMGC, som Grund-Planen eller Basis BKFE forholder sig til Grund-Planen EFDM.

Construction. Man forestiller sig det Parallelepipedum BMIC at være forlænget til begge Sider hen til O og Z. I den forlængede rette Linie BM antages paa den ene Side saa

mange

mange rette Linier, som man vil, af samme Størrelse som BE Tab. 2.
saasom BN og NO, men paa den anden Side tages saa mange rette Linier som man vil, af samme Størrelse som EM, saasom MP, PQ. Igiennem Punkterne N, O, P, Q drages; de Planer NV, OX, PS, QZ parallele med en af de tre parallele Planer BI, EG, MC.

Demonstration. Efterdi nu ONXV, NBVI, BEIG, EMGC, MPCS, PQSZ ere Parallel-sidede Solider eller Parallelepipeder (30 Def. 11), saa skal de Planer, som indslutte dem, være Parallelogrammer (24. 11). Og fordi de rette Linier EB, BN, NO ere lige store (efter Constr.); saa ere ogsaa de tre Parallelogrammer BF, BT, TO og i lige Maade de Parallelogrammer EA, AN, NR lige store med hinanden (36. 1); ydermere ere ogsaa de tre Parallelogrammer BI, NV, OX lige store (24. 11), fordi de ere hinanden imodsatte. Altsaa ere tre Planer af det Solidum BEIG lige saa store som tre Planer af det Solidum NBVI, og som tre Planer af det Solidum ONXV. Da nu udi ethvert af disse tre Solider de tre øvrige Planer ere saa store (24. 11) som de tre bemeldte Planer: Saa er det klart, at de tre Solider BEIG, NBVI, ONXV ere indsluttede med lige mange og lige store Planer; følgelig ere bemeldte tre Solider lige store med hinanden (10 Def. 11). Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at de Solider EMGC, MPCS, PQSZ ere lige store. Altsaa er den Grund-Plan eller Basis OF ligesaa mangefold af den Grund-Plan BF, som det Solidum OG er af det Solidum BG. Iligemaade er Grund-Planen QF lige saa mangefold af Grund-Planen ED, som det Solidum QG er af det Solidum EC. Altsaa har man her fire Størrelser nemlig de tvende Grund-Planer BF og ED og de tvende parallel-sidede Solider eller Parallelepipeder BG og EC, og Grund-Planen OF og det Solidum OG ere lige mangefold af Grund-Planen BF og af det Solidum BG, og Grund-Planen QF og det Solidum QG ere lige mangefold af Grund-Planen ED og af det Solidum EC; og dersom fremdeles Grund-Planen OF er saa stor som Grund-Planen QF, saa er det Solidum

Tab. 2. OG ogsaa lige saa stort som det Solidum QG (thi da ere alle sex Planer som indslutte det Solidum OG lige saa store som alle de sex Planer, som indslutte det Solidum QG), og dersom Grund-Planen OF er større end Grund-Planen QF, saa er det Solidum OG ogsaa større end det Solidum QG, og dersom Grund-Planen OF er mindre end Grund-Planen QF, saa er det Solidnm OG ogsaa mindre end det Solidum QG. Derfore ligesom Grund-Planen BF forholder sig til Grund-Planen ED, saa forholder sig det Parallelepipedum BG til det Parallelepipedum EC (5 Def. 5). Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 26 Proposition.

Problema.

Til en given ret Linie og udi en given Punkt deri at afsætte en Solid Vinkel, som er saa stor som en given Solid Vinkel.

Fig. 19, 20. Exempel. Lad AB være den givne rette Linie og A den givne Punkt deri, og C den givne Solide Vinkel, som er indsluttet med de flade Vinkler DCE, DCF, FCE: Man skal afsætte paa AB og udi Punkten A en Solid Vinkel, som er saa stor som den givne Solide Vinkel C.

Construction. I den rette Linie CF antages efter Behag en Punkt F, og derfra drages (11. 11) en ret Linie FG perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem DC, CE og lad FG møde den bemeldte Plan i Punkten G og drag CG. Dernæst afsættes paa den rette Linie AB udi Punkten A en Vinkel BAI af lige Størrelse med Vinklen DCE (23. 1) og en anden Vinkel BAK af lige størrelse med DCG, og AK giøres saa stor som CG. Fra Punkten K opreyses (12. 11) en ret Linie KL perpendicular paa den Plan, som gaaer igiennem BAI, og KL giøres saa stor som GF. Endelig drages den rette Linie AL: Saa siger jeg at den Solide Vinkel A, som indsluttes af de

de flade Vinkler BAI, BAL, LAI er lige saa stor, som den Tab. 2.
Solide Vinkel C, som indsluttes af de flade Vinkler DCE, DCF, FCE.

Demonstration. For at bevise dette, saa gior man de rette Linier CD, AH lige store og dernæst drager man de rette Linier LH, HK, FD, DG. Fordi nu FG er perpendicular paa Planen, som gaaer igiennem DCE, saa er FG ogsaa (3 Def. 11) perpendicular paa alle rette Linier, som røre den og ere i bemeldte Plan. Følgelig ere FGC, FGD rette Vinkler. Af samme Aarsag ere ogsaa LKA, LKH rette Vinkler. Og fordi AH, AK ere (Constr.) saa store som CD, CG og disse indsluttе lige store Vinkler HAK og DCG, saa er (4. 1) HK saa stor som DG. Da nu ogsaa KL er saa stor som GF, og LKH, FGD ere rette Vinkler, saa er ogsaa HL lige saa stor som DF. Videre ere AK, KL (Constr.) saa store som CG, GF, og disse Linier indslutte rette Vinkler; følgelig er (4. 1) AL saa stor som CF. Eftersom da AH, AL ere saa store som CD, CF og Grund-Linien HL er saa stor som Gund-Linien DF, saa er ogsaa (8. 1) Vinklen HAL lige saa stor som Vinklen DCF. Paa samme Maade beviises ogsaa, at Vinklen LAI er lige saa stor som Vinklen FCE. Thi gior AI, CE lige store og drag KI, LI, GE, FE. Saa er LKI en ret Vinkel, fordi LK er perpendicular paa Planen, som gaaer igiennem BAI og KI er i samme Plan og rører LK. Ligeledes er FGE en ret Vinkel. Eftersom nu (Constr.) den heele Vinkel BAI er saa stor som Vinklen DCE og Vinklen BAK er saa stor som Vinklen DCG, saa er ogsaa den øvrige Vinkel KAI saa stor som den øvrige Vinkel GCE. Da nu ogsaa AK, AI ere saa store som CG, CE; saa er KI (4. 1) saa stor som GE. Nu er ogsaa KL saa stor som GF og disse Linier KI, KL og GE, GF indslutte rette Vinkler. Følgelig er LI saa stor som FE. Da nu ogsaa de tvende Sider LA, AI ere saa store som CF, CE; saa er (8. 1) Vinklen LAI saa stor som Vinklen FCE.

Altsaa har man afsat paa den givne rette Linie AB og udi

Tab.2. Punkten A deri en Solid Vinkel, som lige saa stor som den givne Solide Vinkel C. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 27 Proposition.
Problema.

Til en given ret Linie at opsætte et Parallelepipedum, som er af samme Skikkelse og ligedan sadt, som et given Parallelepipedum.

Fig.22. Exempel. Lad AB være den givne rette Linie og CD det givne Pa-
23. rallelepipedum: Man skal til den rette Linie AB opsætte et Parallelepipedum, som er af lige Skikkelse og ligedan sadt som det givne Parallelepipedum CD.

Construction. Til AB og udi Punkten A afsættes en Solid Vinkel, som er saa stor som den Solide Vinkel C, saa at de tre flade Vinkler BAI, IAH, HAB ere saa store som de tre flade Vinkler FCG, GCE, ECF, nemlig BAI saa stor som FCG, IAH saa stor som GCE, og HAB saa stor som ECF. Dernest søges til CF, CG, AB den fierde Proportional-Linie AI (12. 6), og ligeledes søges til CG, CE, AI den fierde Proportional-Linie AH. Siden fuldføres det Parallelogram HB og ligeledes det Parallelepipedum AK.

Demonstration. Efterdi nu CF forholder sig til CG, som AB til AI, og CG forholder sig til CE, som AI til AH (efter Constr.), saa forholder sig ogsaa ved en jevntagen Forhold (22. 5) CF til CE som AB til AH. Altsaa ere Siderne omkring de lige store Vinkler FCE og BAH proportionale. Og følgelig ere de toe Parallelogrammer EF og HB af lige Skikkelse (1 Def. 6). Paa samme Maade bevises ogsaa at Parallelogrammet FG er lige skikket med Parallelogrammet BI; og at Parallelogrammet GE er lige skikket med Parallelogrammet

met IH. Altsaa ere de tre Planer BH, HI, IB af det ene Solidum AK af lige Skikkelse som de tre Planer FE, EG, GF af det andet Solidum CD. Da nu (24. 11) udi et hvert af disse toe Solider AK og CD de øvrige tre Planer ere af lige Skikkelse som de tre bemeldte Planer, saa ere alle sex Planer, som indslutte det Solidum AK, af lige Skikkelse med de sex Planer som indslutte det Solidum CD. Derfore (9 Def. 11) ere de Parallelepipeder AK, CD lige skikkede og ligedan satte. Tab. 2.

Altsaa har man paa den rette Linie AB opsat et Parallelepipedum AK, som er af lige Skikkelse og ligedan sadt som det givne Parallelepipedum CD. Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 28 Proposition.

Theorema.

Dersom et Parallelepipedum skiæres ved en Plan, som gaaer igiennem Tverlinierne af toe hinanden imodsatte Planer; saa skal det derved skiæres i toe lige store deele.

Exempel. Lad det Parallelepipedum AB blive skaaren ved Planen CDEF, som gaaer igiennem Tver-Linierne CF, DE af de toe hinanden imodsatte Planer GB, AH: Saa siger jeg, at Planen CDEF deeler det Parallelepipedum AB i toe lige store deele. Fig. 24

Demonstration. Eftersom de Planer GB, AH ere (24. 11) lige store Parallelogrammer, saa er ogsaa Trianglen GCF saa stor som Trianglen FCB og Trianglen ADE saa stor som Trianglen EDH (34. 1). Ydermere er ogsaa Parallelogrammet AC saa stort som Parallelogrammet EB og Parallelogrammet AF saa stort som Parallelogrammet DB (24. 11). Følgelig ere de Planer, som indslutte det Prisma AEDCGF nemlig de toe Triangler ADE, GCF og de tre Parallelogrammer AC, AF, FD lige saa store som de Planer, der indslutte det

Ii Pris-

Tab. 3. Prisma EHDCBF nemlig de toe Triangler EDH, FCB og de tre Parallelogrammer EB, DB, FD. Følgelig er det Prisma AEDCGF lige saa stort som det Prisma EHDCBF (10 Def. 11). Altsaa er det heele Parallelepipedum AB deelt i toe lige store deele ved Planen CDEF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 29 Proposition.

Theorema.

De Parallelepipeder, som staae paa een og den samme Grund-Plan og have een og den samme høyde, og udi hvilke de Linier, som staae paa Grund-Planen, ere i samme rette Linier, ere af lige Størrelse.

Fig. 1. Exempel. Lad de tvende Parallelepipeder CFMB, CGNB være satte paa en og den Grund-Plan AB og lad dem have samme Høyde eller staae inden for samme parallele Planer ACBL og FDKN og lad de Linier, som ere oprettede paa Grund-Planen AB, være i samme rette Linier, det er: Lad de rette Linier AF, AG, LM, LN være i een og den samme rette Linie FN og lad ligeledes CD, CE, BH, BK være i een og den samme rette Linie DK: Saa siger jeg, at bemeldte Parallelepipeder CFMB og CGNB ere lige store.

Demonstration. Efterdi DCBH og ECBK ere Parallelogrammer (24. 11), saa skal DH og EK være hver i sær saa store som CB (34. 1). Følgelig er DH saa stor som EK. Tag EH fra enhver af dem, saa skal DE være saa stor som HK: Følgelig (38. 1) skal Trianglen DEC være saa stor som Trianglen HKB og Parallelogrammet DG skal (efter 36. 1) være saa stor som Parallelogrammet HN. Af samme Aarsag er Trianglen AFG saa stor som Trianglen LMN. Ydermere er Parallelogrammet CF saa stort (24. 11) som det imodsatte Parallelogram BM og Parallelogrammet CG saa stort som det imodsatte Parallelogram BN. Altsaa er det Prisma AFGEDC indslutsluttet af lige saa mange og lige saa store Planer, som det Prisma BHKNML og følgelig ere bemeldte toe Prismer lige store (10 Def. 11). Legger man nu det fælles Solidum ACBLMHEG til et hvert af dem, saa skal det heele Parallelepipedum CFMB være lige saa stort som det heele Parallelepipedum CGNB Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 3.

Den 30 Proposition.

Theorema.

De Parallelepipeder, som staae paa een og den samme Grund-Plan og have een og den samme høyde og udi hvilke de Linier, som staae paa Grund-Planen, ere ikke i samme rette Linier, ere af lige Størrelse.

Exempel. Lad ACBLMFDH og ACBLNGEK være toe Parallelepipeder som have lige store Høyder og som staae paa een og den samme Grund-Plan AB, og udi hvilke de Linier, som staae paa Grund-Planen nemlig AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK ere ikke i samme rette Linier: Saa siger jeg, at disse toe Parallelepipeder ere lige store. Fig. 2.

Construction. Drag NK, DH lige ud, indtil de støde sammen i Punkten R, og Lad GE, FM støde sammen i Punkten X, og drag dem begge længere ud indtil O og P, og drag de rette Linier AX, LO, CP, BR.

Demonstration. Det Solidum ACBLMFDH er lige saa stort som det Solidum ACBLOXPR (29. 11), fordi de staae begge paa een og den samme Grund-Plan ACBL og de Linier, som staae paa Grund-Planen ACBL, ere i samme rette Linier, nemlig AF, AX, LM, LO ere i en og den samme rette Linie FO, og CD, CP, BH, BR ere ligeledes i een og den samme rette Linie DR; Men nu er det Solidum ACBLOXPR lige saa stort som det Solidum ACBLNGEK, fordi de staae begge

Tab.3. paa een og den samme Grund-Plan ACBL og de Linier, som staae paa Grund-Planen ACBL, ere i samme rette Linier, nemlig AG, AX, CE, CP ere i een og den samme rette Linie GP, og LN, LO, BK, BR ere udi een og den samme rette Linie NR. Følgelig (1 Ax:) er det Parallelepipedum ACBLMFDH lige saa stort som det Parallelepipedum ACBLNGEK. Hvilket var det, som skulde beviises.

Den 31 Proposition.

Theorema.

De Parallelepider, som staae paa lige store Grund-Planer, og have samme Høyde, ere lige store

Fig. 3, 4, 5, 6. Exempel. Lad de Parallelepipeder AC, IL staae paa lige store Grund-Planer AB, IK og have een og den samme Høyde: Jeg siger, at det Solidum AC er lige saa stort, som det Solidum IL.

(1) Lad de Linier BC, ED, FG, AH, OP, IQ, KL, NM være perpendicular paa Grund-Planerne AB, IK (see Fig. 3 og 4) og lad Vinklerne FAE, INK være af u-lige Størrelse.

Construction. Drag IN ud til R og sætt (23. 1) til NR og udi Punkten N en Vinkel RNS af lige Størrelse med Vinklen FAE, og giør NR saa stor som AF, og NS saa stor som AE. Igiennem S drages ST parallel med NR, og Parallelogrammet NSTR og det Parallelepipedum NTXM fuldføres.

Demonstration. Eftersom nu de tvende rette Linier RN, NS ere (efter Constr.) saa store som de tvende AF, AE og de indslutte lige store Vinkler, saa er Parallelogrammet NSTR af lige Størrelse og Skikkelse som Parallelogrammet AB. Fordi fremdeles AF er saa stor som NR, og AH saa stor som NM, (thi de Parallelepipeder AC, IL have samme høyde, og AH er Høy-

Høyden af AC og MN er Høyden af IL (4 Def. 6) thi de ere perpendiculare paa Grund-Planerne AB og IK) og disse rette Linier indslutte rette Vinkler, saa er Parallelogrammet HF af samme Størrelse og Skikkelse som Parallelogrammet MR. Paa samme Maade bevises ogsaa at Parallelogrammet HE er lige saa stort og af samme Skikkelse som Parallelogrammet NY. Altsaa ere tre Planer i det Solidum AC af samme Størrelse og Skikkelse som tre Planer i det Solidum NTXM. Da nu i et hvert af disse toe Solider (24. 11) de bemeldte tre Planer ere lige store og lige skikkede med deres imodsatte Planer, saa er det Solidum AC lige saa stort som det Solidum NTXM (10 Def. 11). Drag KN, TS længere ud indtil de støde sammen i d; igiennem R drages RC parallel med KD, og RC, OK drages længere ud indtil de støde sammen i V. Siden fuldføres de tvende Parallelepipeder NZbd og NVaM. Saa er det Solidum NZbd lige saa stort (29. 11) som det Solidum NTXM, fordi de staae paa een og den samme Grund-Plan NZ og have samme Høyde og deres Linier, som staaer paa Grund-Planen NZ nemlig Nd, NS, Rc, RT, Me, MY, Zb, ZX ere i samme rette Linier dT, eX. Men det Solidum NTXM er lige saa stort som det Solidum AC, som tilforn blev beviist; altsaa er ogsaa det Solidum NZbd lige saa stort som det Solidum AC. Fremdeles eftersom Parallelogrammet NSTR er saa stort som Parallelogrammet NdcR (35. 1) (thi begge staae paa samme Grund-Linie NR og imellem samme Parallel-Linier NR, dT) og Parallelogrammet NSTR er ogsaa saa stort som IK, thi et hvert af dem er saa stor som AB, saa er ogsaa NdcR lige saa stor som IK. Altsaa forholder sig (7. 5) IK til NV, som NdcR til samme NV. Men eftersom det Solidum Ia er skaaren ved en Plan LN, som er parallel med de imodsatte Planer PI og aR: saa forholder sig (25. 11) det Solidum IL til det Solidum Na, som Grund-Planen IK til Grund-Planen NV. Og fordi det Solidum da er skaaren ved Planen ZN, som er parallel med de imodsatte Planer aK og bd, saa forholder sig ogsaa det Solidum NZbd til det Solidum Na, som Grund-Planen NdcR til NV. Men IK forholder sig til NV, som NdcR til NV, som nylig blev beviist. Tab. 3.

Tab. 3. Altsaa forholder sig ogsaa (11. 5) det Solidum IL til det Solidum Na som det Solidum NZbd til samme Solidum Na. Følgelig (9. 5) er det Solidum IL saa stort som det Solidum NZbd. Men NZbd er saa stort som det Solidum AC: Følgelig er det Solidum IL saa stort som det Solidum AC. Hvilket (1) var at bevise.

2. Lad de rette Linier som staae paa Grund-Planerne nemlig BC, ED, FG, AH, KL, NM, IQ, OP ikke staae perpendicular paa Grund-Planerne AB, IK (see Fig. 5, 6): Jeg siger igien, at bemeldte Solider AC og IL ere lige store.

Thi drag (11. 11) fra Punkterne C, D, H, G, L, M, Q, P, perpendicular Linier CX, DV, HT, GS, LZ, MY, PR, QW ned paa Planerne, hvori Grund-Planerne AB, IK ligge, og drag ST, TV, VX, XS, RW, WY, YZ, ZR: Saa er det Solidum CHTX lige saa stort som det Solidum LQWZ, efter det, som nyeligen blev beviist; fordi de staae paa lige store Grund-Planer CH, LQ og have samme Høyde og de Linier, som staae paa Grund-Planerne ere perpendiculare (efter Constr.) Men det Solidum AC er lige saa stort (29. 11) som det Solidum CHTX og det Solidum IL er saa stort som det Solidum LQWZ, thi de staae paa samme Grund-Plan og have samme Høyde og de Linier som staae paa Grund-Planerne, ere i samme rette Linier. Altsaa er ogsaa det Solidum AC lige saa stort som det Solidum IL. Hvilket (2) var at bevise.

Den 32 Proposition.

Theorema.

De Parallelepipeder, som have samme Høyde, forholder sig til hinanden som deres Bases eller Grund-Planer.

Fig. 7, 8 **Exempel.** Lad de parallel-sidede Solider AB, CD have samme Høyde: jeg

Jeg siger at det Solidum AB forholder sig til det Solidum CD, som Grund-Planen AE til Grund-Planen CF. Tab. 3.

Construction. Til den rette Linie FG opsættes et Parallelogram FH af lige Størrelse med Parallelogrammet AE. Paa Grund-Planen FH opreyses et Parallelepipedum GK af samme Høyde som CD.

Demonstration. Det Solidum GK er saa stort (31. 11) som det Solidum AB, fordi de staae paa lige store Grund-Planer AE, FH og have samme Høyde. Eftersom da det Parallelepipedum CK er skaaren ved Planen DG, som er parallel med de imodsatte Planer CL og HK, saa forholder sig (25. 11) det Solidum GK til det Solidum CD som Grund-Planen FH til Grund-Planen CF. Men det Solidum GK er lige saa stort som det Solidum AB, og FH er saa stor som AE. Følgelig forholder sig det Solidum AB til det Solidum CD som Grund-Planen AE til Grund-Planen CF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium.

Heraf følger, at dersom Parallelepipeder ere lige store og have lige store Høyder, saa skal de ogsaa have lige store Grund-Planer.

Den 33 Proposition.

Theorema.

Lige skikkede Parallelepipeders Forhold til hinanden er tripleret imod den Forhold, som de Sider have til hverandre, der ere lige i Forhold.

Exempel. Lad de Parallelepipeder AB, CD være lige skikkede, og lad Siden AE være lige i Forhold med Siden CF (12 Def. 5); Saa Fig. 9. 10.

siger

Tab. 3. siger jeg, at den Forhold som det Solidum AB har til det Solidum CD, er tripleret imod den Forhold, som AE har til CF.

Construction. Drag AE, GE, HE længere ud imod K, L, M, og gior EK saa stor som CF, EL saa stor som FN og EM saa stor som FR og fuldfør det Parallelogram KL og det Parallelepipedum KO.

Demonstration. Eftersom nu EK, EL ere saa store som CF, FN og Vinklen KEL er saa stor som Vinklen CFN (thi Vinklen AEG er saa stor som Vinklen CFN, fordi det Solidum AB er lige skikket med det Solidum CD); saa er Parallelogrammet KL af lige Størrelse og Skikkelse med Parallelogrammet CN. Af samme Aarsag er ogsaa Parallelogrammet KM af lige Størrelse og Skikkelse med CR, og Parallelogrammet EO med Parallelogrammet FD. Altsaa ere tre Planer i det Solidum KO af lige Størrelse og Skikkelse, med tre Planer i det Solidum CD. Men i ethvert af disse toe Solider ere de tre bemeldte Planer lige store og lige skikkede med deres imodsatte Planer (24. 11). Følgelig er det Solidum KO (10 Def. 11) af samme Størrelse og Skikkelse som det Solidum CD. Fuldfør nu det Parallelogram GK og beskriv paa Grund-Planerne GK, KL de Parallelepipeder GP, PL af lige Høyde med AB. Eftersom da de Solider AB, CD ere lige skikkede (efter Hypot.), saa forholder sig AE til CF som EG til FN, og som EH til FR; men nu er EK saa stor (efter Constr.) som CF, og EL saa stor som FN, og EM saa stor som FR; følgeligen har AE samme Forhold til EK som GE til EL, og som EH til EM. Men (efter 1. 6) AE forholder sig til EK, som Parallelogrammet AG til Parallelogrammet GK, og GE forholder til EL, som Parallelogrammet GK til Parllelogrammet KL, og HE forholder sig til EM som Parallelogrammet HK til Parallelogrammet KM. Heraf følger da, at Parallelogrammet AG forholder sig til Parallelogrammet GK som GK til KL, og som HK til KM. Men nu forholder sig (32. 11)

11) AG til GK, som det Solidum AB til det Solidum GP og Tab. 3.
GK forholder sig til KL, som det Solidum GP til PL, og HK forholder sig til KM, som det Solidum PL til det Solidum KO. Følgelig forholder sig det Solidum AB til det Solidum GP, som GP til PL og som PL til KO. Men naar fire Størrelser ere immerfort (continuo proportionale, det er, naar den første af dem forholder sig til den anden, som den anden til den tredie og som den tredie til den fierde, saasom her de fire Solider AB, GP, PL, KO, saa bliver (11 Def. 5) den Forhold som den første har til den fierde, kaldet tripleret imod den Forhold, som den første har til den anden: Følgelig er den Forhold, som det Solidum AB har til det Solidum KO, tripleret imod den Forhold, som det Solidum AB har til det Solidum GP. Men AB forholder sig (32. 11) til GP, som Parallelogrammet AG til GK, eller (efter 1. 6) som den rette Linie AE til den rette Linie EK: Hvorfore den Forhold, som det Solidum AB har til det Solidum KO, er tripleret imod den Forhold, som den rette Linie AE har til EK. Men det Solidum KO ere lige saa stort som CD, som tilforn blev beviist, og den rette Linie EK er (efter Constr.) lige saa stor som CF. Heraf følger da, at den Forhold, som det Solidum AB har til det Solidum CD, er tripleret imod den Forhold, som Siden AE har til Siden CF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Corollarium

Heraf er det klart, at dersom fire rette Linier ere immerfort proportionale, saa at den første forholder sig til den anden, som den anden til den tredie og som den tredie til den fierde, og der beskrives toe lige skikkede Parallepipeder paa den første og anden rette Linie, saa forholder sig det Parallepipedum, som er beskreven paa den første, til det Parallelepipedum, som er beskrevet paa den anden rette Linie, som den første rette Linie forholder sig til den fierde; thi den Forhold, som det første Parallelepipedum har til det andet Parallelepipedum er tripleret imod den Forhold, som den første Linie har til den anden (33. 11) og ligeledes er den Forhold, som den

Tab. 3. første Linie har til den fierde, tripleret imod den Forhold, som den første Linie har til den anden (11 Def. 5)

Den 34 Propoſition.

Theorema.

Derſom Parallelepipeder ere lige ſtore, ſaa ere deres Grund-Planer og Høyder reciproce proportionale. Og derſom Grund Planerne og Høyderne af Parallelepipeder ere reciproce proportionale, ſaa ere de ſamme lige ſtore.

Fig. 11, 12, 13, 14, 15, 16. Exempel. Lad AB, CD være lige ſtore Parallelepipeder; jeg ſiger at deres Grund-Planer og Høyder ere reciproce proportionale, det er, Grund-Planen AL forholder ſig til Grund-Planen CO, ſom Høyden af det Parallelepipedum CD til Høyden af det Parallelepipedum AB.

Fig. 11, 12, 13, 14. (1) Lad de Linier AG, EF, LB, HK, CM, NX, OD, PR være perpendicular paa Grund-Planerne AL og CO: Jeg ſiger da, at ligeſom Grund-Planen AL forholder ſig til Grund-Planen CO, ſaa forholder ſig CM til AG ſthi AG er Høyden af det Parallelepipedum AB, og CM er Høyden af det Parallelepipedum CD (efter 4 Def. 6).

Demonſtration. Thi derſom AG er lige ſaa ſtor ſom CM (ſee Fig. 11 og 12), ſaa følger (Cor. 32. 11) at, fordi det Solidum AB er ogſaa lige ſaa ſtort ſom det Solidum CD, ſaa ſkal Grund-Planen AL være lige ſaa ſtor ſom CO, og altſaa ſkal AL forholde ſig til CO, ſom CM til AG.

Men hvis Høyden AG ikke er lige ſaa ſtor ſom CM (ſee Fig. 13 og 14), ſaa lad een af dem, ſaaſom her CM være den ſtørre, og ſkiær fra CM en ret Linie CT af lige Størrelſe med AG og igiennem T drag en Plan TV parallel med CO, Efterſom da det Solidum AB er lige ſaa ſtort ſom det Solidum CD (efter Hyp.); ſaa forholder ſig (7. 5) det Solidum AB til det Solidum CV ſom det Solidum CD til ſamme Solidum CV. Men AB forholder ſig til CV, ſom AL til CO (32. 11), fordi de

de have begge lige store Høyder AG, CT; og det Solidum Tab.3.
CD forholder sig til det Solidum CV (32. 11) som NM til NT, thi de staae begge imellem samme parallele Planer NM, OR eller have samme Høyde. Altsaa forholder sig AL til CO som NM til NT. Men NM forholder sig (1. 6) til NT, som CM til CT eller AG, thi CT og AG ere lige store (efter Constr.). Altsaa forholder sig AL til CO, som CM til AG, følgelig ere Grund-Planerne AL, CO og Høyderne AG, CM reciproce proportionale. Hvilket var det, som skulde bevises.

Lad nu Grund-Planerne AL, CO og Høyderne AG, CM være reciproce proportionale: Saa siger jeg, at de Parallelepipeder AB, CD ere lige store.

Thi dersom Høyderne AG, CM ere lige store (see Fig. 11 og 12), saa ere ogsaa Grund-Planerne AL, CO lige store, fordi AL forholder sig (efter Hyp.) til CO, som CM til AG. Hvorfore ogsaa de Parallelepipeder AB, CD skal være lige store (31. 11).

Men dersom Høyden CM er større end AG (see Fig. 13 og 14), saa giør CT saa stor som AG og igiennem T drag en Plan TV Parallel med CO. Eftersom nu AL forholder sig (efter Hyp.) til CO, som CM til AG eller CT, og AL forholder sig til CO som det Solidum AB til det Solidum CV (32. 11) fordi deres Høyder AG, CT ere lige store (efter Constr.), og CM forholder sig til CT (efter 1. 6) som NM til NT; og Grund-Planen NM forholder sig til Grund-Planen NT (32. 11) som det Solidum CD til CV, fordi de staae imellem samme parallele Planer NM, OR: Saa forholder sig ogsaa det Parallelepipedum AB til CV, som det Parallelepipedum CD til samme CV. Altsaa ere de Parallerepipeder AB, CD lige store (9. 5). Hvilket var det, som skulde bevises.

(2) Lad igien ACBG, CODM være lige store Parallelepipeder, men lad de forbemeldte Linier AG, EF, LB, HK, CM, NX, OD, PR ikke være perpendicular paa Grund-Planerne AL, CO: Saa siger jeg atter, at Grund-Planerne og Høyderne af disse toe Parallelepipeder ACBG, CODM ere reciproce proportionale. Fig. 15, 16.

 thi

Tab.3. Thi man drager (efter 11. 11) fra Punkterne B, K, G, F, D, R, M, X perpendicular-Linier BY, KV, GT, FS, DU, RW, MZ, XQ paa de Planer, udi hvilke Grund-Planerne AL, CO ligge, dernæst drager man de Linier YV, VT, TS, SY, UW, WZ, ZQ, QU; saa ere Perpendicular-Linierne GT, MZ (efter 4 Def. 6) Høyderne af de Solider ALBG, og CODM. Jeg siger atter, at Grund-Planen AL forholder sig til Grund-Planen CO, som Høyden MZ forholder sig til Høyden GT. Thi eftersom de Parallelepipeder ALBG, CODM ere lige store, og ALBG er lige saa stor som det Parallelepipedum TYBG (29 og 30. 11) fordi de staae paa samme Grund-Plan GB og have samme Høyde GT, og CODM er af samme Aarsag lige saa stor som ZUDM: Saa ere ogsaa de Parallelepipeder TYBG, ZUDM lige store. Da nu ogsaa deres Linier GT, FS &c. og MZ, XQ &c. ere perpendiculare paa Grund-Planerne; saa forholder sig (efter det som tilforn blev beviist) Grund-Planen BG, det er (24. 11) AL til Grund-Planen MD, det er til CO som ZM til GT. Altsaa ere Grund-Planerne og Høyderne af de Parallelepipeder ALBG, CODM reciproce proportionale. Hvilket var det, som skulde bevises.

Lad Grund-Planerne og Høyderne af de Parallelepipeder ALBG og CODM være reciproce proportionale: Saa siger jeg, at det Parallelepipedum ALBG er lige saa stort som det Parallelepipedum CODM.

Thi lad den nest foregaaende Construction blive her igjentagen. Fordi nu Grund-Planen AL forholder sig til CO som Høyden ZM til TG, og AL er (24. 11) saa stor som GB og MD saa stor som CO; Saa forholder sig ogsaa GB til MD som ZM til TG. Altsaa ere Grund-Planerne GB, MD og Høyderne TG, ZM af de Solider TB, ZD reciproce proportionale: Da nu ogsaa deres Linier TG, SF &c. og ZM, QX &c. ere perpendiculare paa Grund-Planerne; saa ere de Solider TB, ZD lige store (efter det som tilforn er beviist). Men TB, ZD ere (29 og 30. 11) lige saa store som de Solider ALBG og CODM; følgelig ere ogsaa disse toe Solider ALBG og CODM lige store. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den

Den 35 Proposition. Tab. 3.

Theorema.

Dersom udi Spidserne af toe lige store flade Vinkler toe rette Linier blive opreyste over de Planer, udi hvilke Vinklerne ligge, saaledes at de giøre lige store Vinkler med Siderne af førstbemeldte Vinkler, og dersom fremdeeles udi de samme opreyste rette Linier antages toe Punkter efter Behag, og fra samme Punkter drages perpendicular-Linier paa de Planer, udi hvilke de førstbemeldte Vinkler ligge, og fra de Punkter, som Perpendicular-Linierne giøre i Planerne, drages rette Linier hen til de førstbemeldte Vinkler; saa skal disse sidste rette Linier giøre lige store Vinkler med de opreyste Linier.

Exempel. Lad BAC, EDF være toe flade Vinkler af lige Størrelse og lad udi deres Spidser A og D toe rette Linier AG, DM blive opreyste over Planerne, udi hvilke Vinklerne ligge, saaledes at samme rette Linier AG, DM giøre lige store Vinkler med Siderne af de givne Vinkler, saa at Vinklen GAB bliver saa stor som Vinklen MDE og Vinklen GAC saa stor som Vinklen MDF og lad udi de opreyste rette Linier AG, DM toe Punkter G og M blive antagne efter Behag, og lad fra samme Punkter G, M Perpendicular-Linier GL, MN blive dragne paa de Planer, som Vinklerne BAC, EDF ligge udi, og lad dem møde Planerne i L og N og lad de rette Linier AL, DN blive dragne: Jeg siger da, at Vinklen GAL er lige saa stor som Vinklen MDN. Fig. 17, 18.

Construction. Giør AH saa stor som DM. Igiennem H drages HK parallel med GL, fra Punkterne K og N drages (12. 1) Perpendicular-Linier KB, KC, NE, OF paa de rette Linier AB, AC, DE, DF. Derneſt drages HC, CB, MF, FE.

Demonstration. Efterſom GL er perpendicular paa

Tab. 3. den Plan, som Vinklen BAC ligger udi, og HK er parallel med GL, saa er HK ogsaa perpendicular paa samme Plan (8. 11). Følgelig er AKH en ret Vinkel (3 Def. 11) og derfore er Qvadraten af AH (47. 1) lige saa stor som Qvadraterne af HK, KA. Men nu ere (47. 1) Qvadraterne af KC, CA lige saa store som Qvadraten af KA; følgelig er Qvadraten af AH lige saa stor som Qvadraterne af HK, KC, CA; men Qvadraten af HC er lige saa stor som Qvadraterne af HK, KC, thi HKC er en ret Vinkel (3 Def. 11), fordi HK er perpendicular paa Planen BAC, udi hvilken KC ligger. Altsaa er Qvadraten af AH lige saa stor som Qvadraterne af HC og CA; følgelig er HCA en ret Vinkel (48. 1). Af samme Aarsag er ogsaa DFM en ret Vinkel. Altsaa ere de tvende Vinkler HCA, DFM lige store; men Vinklerne HAC, MDF ere ogsaa lige store (efter Hyp.) og Siden AH er saa stor som DM; følgelig er ogsaa (26. 1) Siden AC saa stor som DF. Paa samme Maade kand man ogsaa bevise at AB, DE ere lige store. Thi drag HB, ME. Eftersom da Qvadraten af AH er saa stor som Qvadraterne af AK, KH, og Qvadraten af AK er lige saa stor som Qvadraterne af AB, BK; saa ere Qvadraterne af AB, BK, KH lige saa store som Qvadraten af AH. Men Qvadraten af BH er saa stor som Qvadraterne af BK, KH, thi eftersom HK er perpendicular paa Planen, som gaaer igiennem BAC, saa er HKB en ret Vinkel (3 Def. 11). Altsaa er Qvadraten af AH lige saa stor som Qvadraterne af AB, BH og følgelig er ABH en ret Vinkel (48. 1). Af samme Aarsag er ogsaa DEM en ret Vinkel. Altsaa ere Vinklerne ABH, DEM lige store; ligeledes er Vinklen BAH lige saa stor (efter Hyp.) som Vinklen EDM, og AH er saa stor som DM (efter Constr.). Derfore er ogsaa (26. 1) Siden AB lige saa stor som DE; men nu er ogsaa AC lige saa stor som DF og Vinklen BAC saa stor som Vinklen EDF (efter Hyp.): Følgelig er (4. 1) BC saa stor som EF og Vinklen ACB saa stor som DFE. Men nu er ogsaa den heele Vinkel ACK lige saa stor som den heele Vinkel DFN, fordi de ere begge rette Vinkler;

følgelig er ogsaa den øvrige Vinkel BCK lige saa stor som den øvrige Vinkel EFN. Af samme Aarsag er ogsaa Vinklen CBK saa stor som Vinklen FEN. Da nu ogsaa Siden BC er saa stor som EF; saa er (26. 1) CK saa stor som FN, men AC er ogsaa saa stor som DF, og disse rette Linier AC, CK og DF, FN indslutte rette Vinkler; følgelig (4. 1) er AK lige saa stor som DN. Og eftersom AH er lige saa stor som DM, saa er Qvadraten af AH lige saa stor som Qvadraten af DM. Men Qvadraterne af AK, KH ere (47. 1) lige saa store som Qvadraten af AH, fordi AKH er (3 Def. 11) en ret Vinkel, og Qvadraterne af DN, NM ere lige saa store som Qvadraten af DM, fordi DNM er en ret Vinkel; følgelig ere Qvadraterne af AK, KH lige saa store som Qvadraterne af DN, NM, og af disse er Qvadraten af AK lige saa stor som Qvadraten af DN, fordi AK, DN ere lige store; derfore er Qvadraten af KH lige saa stor som Qvadraten af NM, og altsaa er den rette Linie KH lige saa stor som den rette Linie NM. Eftersom da HA, AK ere lige saa store som MD, DN, og HK er lige saa stor som MN, saa er ogsaa (8. 1) Vinklen HAK lige saa stor som Vinklen MDN. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 3.

Corollarium.

Heraf er det klart, at dersom udi Spidserne A og D af toe lige store flade Vinkler BAC, EDF blive opreyste toe lige store rette Linier AH, DM paa de Planer, som Vinklerne BAC, EDF ligge udi, saaledes at bemeldte Linier giøre lige store Vinkler med Siderne af de givne Vinkler; Saa skal de Perpendicular-Linier HK, MN, som drages fra de yderste Punkter H, M af de opreyste rette Linier til Planerne af førstbemeldte Vinkler, være lige store.

Den

Tab. 3.

Den 36 Proposition.

Theorema.

Dersom tre rette Linier ere proportionale: Saa skal det Parallelepipedum, som bliver giort af dem alle tre, være lige saa stort, som det Parallelepipedum, som bliver giort af den mellemste og er lige sidet, og har lige saa store Vinkler som det først bemeldte Parallelepipedum.

Exempel. Lad de tre rette Linier A, B, C være proportionale,
Fig. 19, 20. saa at A forholder sig til B, som B til C: Saa siger jeg, at det Parallelepipedum, som bliver giort af A, B, C er lige saa stort, som det Parallelepipedum, der bliver giort af B og som er lige sidet og har lige saa store Vinkler, som det Parallelepipedum, der bliver giort af A, B, C.

Construction. Gior en Solid Vinkel E, som er indsluttet med tre flade Vinkler DEF, DEG, FEG, som kand være af hvad Størrelse man vil, og gior DE saa stor som A, EG saa stor som B og EF saa stor som C, og fuldfør de Parallelogrammer DF, FG, GD og det Parallelepipedum EH. Derneſt opsættes til en ret Linie IK og udi Punkten K en Solid Vinkel (26. 11) som er lige saa stor som den Solide Vinkel E, saa at Vinklen IKL er lige saa stor som Vinklen DEF, LKM saa stor som FEG og MKI saa stor som GED, og gior IK, KL, KM hver i sær saa store som den mellemste Proportional-Linie B og fuldfør det Parallelepipedum IN.

Demonstration. Eftersom A forholder sig til B som B til C, og DE er saa stor som A, og IK, KL ere saa store som B og EF saa stor som C (efter Constr); saa forholder sig ogsaa DE til IK, som KL til EF. Altsaa ere Siderne omkring de lige store Vinkler DEF og IKL reciproce proportionale; følgelig (14. 6) er Parallelogrammet FD lige saa stort som LI. Og eftersom de toe flade Vinkler DEF, IKL ere lige store, og de Linier EG, KM ere opreyste udi Vinklernes Spidser E, K

Og

og ere lige store (thi enhver af dem er lige saa stor som B) og Tab. 3.
giore lige store Vinkler med Siderne af de forstbemeldte flade Vinkler DEF, IKL, saa skal (efter Cor. 35. 11) de Perpendicular-Linier som drages fra Punkterne G, M paa Planerne FED, LKI, være lige store. Altsaa have de Parallelepipeder EH, IN lige store Hoyder; men de have ogsaa lige store Grund-Planer FD og LI; folgelig ere de samme Parallelepipeder EH, IN lige store (31. 11). Men det Parallelepipedum EH er giort af de tre proportionale Linier A, B, C, og IN er giort af den mellemste Proportional-Linie B og er lige sidet, og har lige saa store Vinkler som det Parallelepipedum EH. Derfore, dersom tre rette Linier ere proportionale: Saa skal det Parallelepipedum, som bliver giort af dem alle tre, være lige saa stort som det Parallelepipedum, som bliver giort af den mellemste og er lige sidet, og har lige saa store Vinkler som det forstbemeldte Parallelepipedum. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 37 Proposition.
Theorema.

Dersom fire rette Linier ere proportionale, saa skal ogsaa de Parallelepipeder, som beskrives af dem og ere lige skikkede og ligedan sadte, være Proportionale. Og dersom Parallelepipeder, som er lige skikkede og ligedan satte, ere proportionale, saa skal og de rette Linier, af hvilke de ere beskrevne, være proportionale.

Exempel. Lad de fire rette Linier AB, CD, EF, GH være proportionale, saa at AB forholder sig til CD som EF til GH og lad de Parallelepipeder AK, CL, EM, GN, som ere beskrevne af dem, være lige skikkede og ligedan-satte: Jeg siger da, at AK forholder sig til CL, som EM til GN. Fig. 21, 22, 23, 24.

Demonstration. Eftersom AK er af samme Skikkelse som CL, saa er den Forhold som AK har til CL, tripleret imod den Forhold, som AB har til CD. Ligeledes er den Forhold som EM har til GN tripleret imod den Forhold, som EF har til

Tab.3. GH (33. 11). Men nu forholder sig AB til CD som EF til GH; følgelig forholder sig ogsaa AK til CL, som EM til GN. Hvilket (1) var at bevise.

(2) Lad det Parallelepipedum AK forholde sig til CL som EM til GN; saa siger jeg, at den rette Linie AB forholder sig til CD som EF til GH.

Eftersom den Forhold, som AK har til CL, er tripleret imod den Forhold, som AB har til CD (33. 11), fordi AK og CL ere begge lige skikkede (efter Hyp.); og den Forhold, som EM har til GN, er tripleret imod den Forhold, som EF har til GH, og AK forholder sig til CL som EM til GN, saa forholder sig ogsaa AB til CD som EF til GH (11. 5). Hvilket (2) var at bevise.

Den 38 Proposition.
Theorema.

Dersom en Plan er perpendicular paa en anden Plan og en ret Linie drages fra en Punkt i een af samme Planer perpendicular paa den anden Plan: Saa skal samme Perpendicular-Linie falde paa Planernes fælles Skiærings-Linie.

Fig.25. Exempel. Lad Planen CD staae perpendicular paa Planen AE og lad AD være deres fælles Skiærings-Linie, og tag i Planen AB en Punkt E efter Behag; Jeg siger da, at den Perpendicular-Linie som drages fra E paa Planen AB, falder paa AD.

Demonstration. Thi hvis ikke, saa lad den falde uden for AD, saasom EF og mode Planen AB i en Punkt F og drag saa i Planen AB fra F en ret Linie FG perpendicular paa AD, saa skal FG ogsaa (4 Def. 11) være perpendicular paa Planen CD; drag EG. Fordi altsaa FG er perpendicular paa Planen CD, saa er (3 Def. 11) EGF en ret Vinkel; og fordi EF er perpendicular paa Planen AB, saa er ogsaa EFG en ret Vinkel. Altsaa ere toe Vinkler i Triangler EGF saa store som toe rette Vinkler; hvilket er u-rimeligt (17. 1). Derfore kand den rette Linie, som drages fra E perpendicular paa Planen AB, ikke

ikke falde uden for AD; følgelig maae den nødvendigen falde paa AD. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 3.

Den 39 Proposition.

Theorema.

Dersom Siderne af toe hinanden imodsatte Planer i et Parallelepipedum blive skaarne i toe lige store Deele, og der drages Planer igiennem Deelings-Punkterne: Saa skal disse Planers fælles Skiærings-Linie og Tver-Linien af det bemeldte Parallelepipedum skiære hinanden i toe lige store Deele.

Exempel. Lad AF være et Parallelepipedum og lad Siderne af de hinanden imodsatte Planer AH, CF blive skaaren i toe lige Deele i Punkterne K, L, M, N, X, O, P, R og lad Planerne KN, XR drages igiennem bemeldte Skiærings-Punkter, og lad YS være bemeldte Planers fælles Skiærings-Linie og DG Tver-Linien af det Parallelepipedum AF: Saa siger jeg, at YS og DG skiære hinanden i toe lige store Deele, det er, YT er lige saa stor som TS og DT saa stor som TG. Fig. 26.

Construction. Drag DY, YE, BS, SG.

Demonstration. Eftersom nu DX er parallel med OE, saa ere Vexel-Vinklerne DXY, YOE lige store (29. 1); og fordi DX er saa stor som OE og YX er saa stor som YO og de indslutte lige store Vinkler, saa er DY saa stor som YE, og Vinklen DYX saa stor som OYE (4. 1). Læg Vinklen EYX til enhver af de toe Vinkler DYX og OYE, saa ere Vinklerne OYE, EYX lige saa store som DYX, EYX. Men OYE, EYX ere (13. 1) saa store som toe rette Vinkler, følgelig ere ogsaa DYX, XYE saa store som toe rette Vinkler. Altsaa er DYE en ret Linie (14. 1). Af samme Aarsag er ogsaa BSG en ret Linie, og BS er saa stor som SG. Fordi fremdeles DB og EG ere hver i sær lige store og parallele med CA, saa ere DB og EG ogsaa lige store og parallele med hinanden (9. 11). Da nu de rette Linier DE, BG sammenføyer dem: Saa er DE ogsaa parallel med BG (33. 1) og D, Y, G, S ere Punkter som ere tagne i DE, BG, og DG, YS sam-

Tab.3. mensøyer bemeldte Punkter; følgelig ere DG, YS (7. 11) i een og den samme Plan. Og eftersom DE er parallel med BG, saa er (29. 1) Vinklen EDT lige saa stor som Vinklen BGT, fordi de ere Vexel-Vinkler. Ydermere er Vinklen DTY lige saa stor som Vinklen GTS (15. 1); altsaa ere i de tvende Triangler DTY, GTS toe Vinkler i den eene lige saa store som toe Vinkler i den anden og Siden DY ere lige saa store som GS, fordi de ere halve Deele af de lige store rette Linier DE, BG: Altsaa (26. 1) er DT lige saa stor som TG, og YT saa stor som TS, og følgeligen skiære DG og YS hinanden i toe lige store Deele. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 40 Proposition.
Theorema.

Dersom toe Prismer have samme Høyde og det eene af dem har et Parallelogram til sin Grund-Plan og det andet en Triangel og dersom Parallelogrammet er dobbelt saa stort, som Trianglen: Saa skal bemeldte Prismer være lige store.

Fig.27, 28. Exempel. Lad AEFCDB og GHKNLM være toe Prismer af lige Høyde og lad Grund-Planen af det eene være et Parallelogram AEFC, men Grund-Planen af det andet en Triangel GHK og lad Parallelogrammet AEFC være dobbelt saa stort som Trianglen GHK: Saa siger jeg at det Prisma AEFCDB er dobbelt saa stort, som det Prisma GHKNLM.

Demonstration. Fuldfør de Parallelepipeder AX; GO. Eftersom da Parallelogrammet AEFC er dobbelt saa stort (efter Hyp.) som Trianglen GHK og Parallelogrammet KH er ogsaa dobbelt saa stort (41. 1) som Trianglen GHK, saa er Parallelogaammet ACFE lige saa stort som Parallelogrammet KH. Altsaa staae de Parallelepipeder GO, AX paa lige store Grund-Planer og have samme Høyde og følgelig ere de lige store (31. 11). Men nu er det Prisma AEFCDB halvparten af AX, og det Prisma GHKNLM halvparten af GO (28. 11). Altsaa er det Prisma AEFCDB lige saa stort som det Prisma GHKNLM. Hvilket var det, som skulde bevises.

Eucli-

EUCLIDIS ELEMENTER.

Den Tolvte Bog.

Den I Proposition.

Tab. 4.

Theorema.

Lige skikkede Polygoner, som ere indskrevne i Cirkler, forholde sig til hinanden som Qvadraterne af Cirklernes Diametrer.

Exempel. Lad toe lige skikkede Polygoner ABCDE, FGHKL være indskrevne udi de toe Cirkler ABCDE, FGHKL, og lad BM, GN være bemeldte Cirklers Diametrer: Saa siger jeg, at Polygonen ABCDE forholder sig til Polygonen FGHKL, som Qvadraten af BM forholder sig til Qvadraten af GN. Fig. 1, 2.

Construction. Drag de rette Linier BE, AM, GL, FN.

Demonstration. Efterdi Polygonerne ABCDE, FGHKL ere lige skikkede, saa er Vinklen BAE lige saa stor som Vinklen GFL; og BA forholder sig til AE som GF til FL (1 Def. 6). Følgelig (6. 6) har Trianglen ABE lige saa store Vinkler som Trianglen FGL; altsaa er Vinklen AEB saa store

Tab.4. som Vinklen FLG. Men nu er Vinklen AEB saa stor som Vinklen AMB (21. 3), thi de staae begge i et og det samme Cirkel-Stykke AEMDCB, og af samme Aarsag er Vinklen FLG saa stor som Vinklen FNG. Følgelig er Vinklen AMB saa stor, som Vinklen FNG. Iligemaade er Vinklen BAM saa stor som Vinklen GFN, thi begge ere rette Vinkler (31. 3). Følgelig skal den øvrige Vinkel ABM være saa stor som den øvrige Vinkel FGN (32. 1). Altsaa har Trianglen AMB lige saa store Vinkler som Trianglen FGN, og følgeligen forholder sig BM til GN, som BA til GF. Da nu den Forhold, som Qvadraten af BM har til Qvadraten af GN, er dupleret imod den Forhold, som BM har til GN, og den Forhold, som Polygonen ABCDE har til Polygonen FGHKL, er dupleret imod den Forhold, som BA har til GF (1 Cor. 20. 6): Saa forholder sig Polygonen ABCDE til Polygonen FGHKL, som Qvadraten af BM til Qvadraten af GN. Hvilket var det, som skulde bevises.

Lemma.

Dersom toe Størrelser bliver given, som ere af ulige Størrelse, og fra den større bliver tagen en Part, som er større end Halvparten, og fra det øvrige bliver igien tagen en Part, som et større end Halvparten, og dette skeer immerfort: Saa skal der omsider blive en Størrelse tilovers, som er mindre end den mindste af de toe givne.

Fig. 3. Exempel. Lad AB og C være toe Størrelser, som ey ere lige store, og lad AB være den større af dem: Saa siger jeg, at dersom fra AB bliver tagen en Part, som er større end Halvparten, og fra det øvrige af AB bliver igien tagen en Part, som er større end Halvparten og dette skeer immerfort, saa skal der tilsidst blive en Størrelse tilovers, som er mindre end C.

Construction. Tag C saa mange gange, indtil den bli-

bliver større end AB, og lad ED være den mangefold af C som Tab.4.
er større end AB. Deel nu ED i de Deele EG, GF, FD, som ere hver i sær saa store som C, og tag fra AB en Part BH, som er større end Halvparten af AB, og tag ligeledes fra AH en Part HK, som er større end Halvparten af AH og saaledes farer man fort, indtil der bliver saa mange Inddeelinger i AB som der ere Inddeelinger i ED: Lad altsaa de Inddeelinger AK, KH, HB være lige saa mange i Tallet, som de Inddeelinger EG, GF, FD.

Demonstration. Efterdi nu DE er større end AB og fra DE er tagen en Part EG, som er mindre end Halvparten, men fra AB er tagen en Part BH, som er større end Halvparten; saa skal det øvrige GD være større end det øvrige AH. Fremdeles, efterdi GD er større end AH, og fra GD er tagen den halve Part GF, men fra AH er tagen en Part HK, som er større end Halvparten; saa skal det øvrige DF være større end det øvrige AK. Da nu C er saa stor DF, saa skal C ogsaa være større end AK. Altsaa er AK, som er den øvrige Part af AB, mindre end C, som er den mindste af de to givne Størrelser AB og C. Hvilket var det, som skulde bevises.

Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at naar den halve Part tages fra AB, og fra det øvrige igien den halve Part, ogsaa fremdeles, saa skal der blive en Størrelse tilovers, som er mindre end C.

Den 2 Proposition.

Theorema.

Cirkler forholde sig til hinanden ligesom Quadraterne af deres Diametrer.

Exempel. Lad ABCD, EFGH være Cirkler, og lad BD, FH væ- Fig.4,5
re

Tab. 4. re deres Diametrer: Saa siger jeg, at ligesom Qvadraten af BD forholder sig til Qvadraten af FH, saa forholder sig Cirklen ABCD til Cirklen EFGH.

Demonstration. Thi hvis ikke, saa maae Qvadraten af BD forholde sig til Qvadraten af FH, som Cirklen ABCD til en Figur, som er enten mindre eller større end Cirklen EFGH. Lad da for det første Qvadraten af BD forholde sig til Qvadraten af FH som Cirklen ABCD forholder sig til en Figur S, som er mindre end Cirklen EFGH og lad en Qvadrat EFGH blive indskreven i Cirklen EFGH (6. 4).

Saa skal samme Qvadrat være større end Halparten af Cirklen; thi dersom man beskriver en Qvadrat omkring Cirklen EFGH, saa skal den indskrevne Qvadrat EFGH være Halvparten af den omskrevne (thi af 7 Prop. 4. er det klart, at Middel-Linien FH er saa stor som en af Siderne af den omskrevne Qvadrat. Men nu er Qvadraten af FH (47. 1) saa stor som Qvadraterne af FE, EH, det er, den er dobbelt saa stor som Qvadraten EFGH; følgelig er EFGH Halvparten af Qvadraten af FH eller af den Qvadrat, som er beskreven omkring Cirklen). Følgelig efterdi Cirklen er mindre end den omskrevne Qvadrat, saa maae den indskrevne Qvadrat EFGH være mindre end Halvparten af Cirklen EFGH. Deel nu (30. 3) de Cirkel-Buer EF, FG, GH, HE i toe lige store Deele i Punkterne K, L, M, N, og drag de rette Linier KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, saa skal enhver af de Trianglen EKF, FLG, GMH, HNE være større end Halvparten af det Cirkel-Stykke, som den staaer udi, nemlig Trianglen EKF skal være større end Halvparten af Cirkel-Stykket EKF, og saa fremdeles. Thi naar man igiennem Punkterne K, L, M, N drager rette Linier, som rører Cirklen, og man fuldfører Parallelogrammerne paa de rette Linier EF, FG, GH, HE, saa skal enhver af de Triangler EKF, FLG, GMH, HNE være Halvparten af det Parallelogram som staaer paa samme Linie som Trianglen (41. 1). Da nu Parallelogrammet er større end Cirkel-Stykket;

saa

saa er enhver af bemeldte Triangler større end Halvparten af Tab. 4.
det Cirkel-Stykke, som den staaer udi: Derfore dersom man atter skiærer Cirkel-Buerne EK, KF &c. i toe lige store Deele og drager rette Linier, som sammenføye Deelings-Punkterne, og dersom saadant skeer immerfort, saa skal der omsider blive Cirkel-Stykker tilovers, som tilsammen ere mindre end det Stykke, hvilket Cirklen EFGE er større end den Figur S. Thi i det foregaaende Lemma blev beviist, at naar fra den større af toe u-lige Størrelser bliver tagen en Part, som er større end Halvparten og fra den øvrige Part bliver igien tagen en Part, som er større end Halvparten og dette skeer immerfort, saa skal der til sidst blive en Størrelse tilovers, som er mindre end den mindste af de toe bemeldte Størrelser. Lad da de Cirkel-Stykker, som staae paa de rette Linier EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE være de, som tilsammen ere mindre end det Stykke, som Cirklen EFGH er større end Figuren S; saa skal den øvrige Polygon EKFLGMHN være større end Figuren S. Beskriv nu i Cirklen ABCD en Polygon AXBOCPDR, som er af lige Skikkelse med Polygonen EKFLGMHN. Saa skal Qvadraten af BD forholde sig til Qvadraten af FH som Polygonen AXBOCPDR forholder sig til Polygonen EKFLGMHN (1. 12). Da nu Qvadraten af BD forholder sig ogsaa til Qvadraten af FH, som Cirklen ABCD til Figuren S; saa skal Cirklen ABCD forholde sig til S, som Polygonen AXBOCPDR til Polygonen EKFLGMHN. Men nu er Cirklen ABCD større end Polygonen AXBOCPDR; Følgelig skal Figuren S ogsaa være større end Polygonen EKFLGMHN. Men den er ogsaa mindre, (som tilforn blev beviist), hvilket er u-rimeligt. Følgelig kand Qvadraten af BD ikke forholde sig til Qvadraten af FH, som Cirklen ABCD til en Figur, som er mindre end Cirklen EFGH. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at Qvadraten af FH kand ikke forholde sig til Qvadraten af BD, som Cirklen EFGH til en Figur, som er mindre end Cirklen ABCD. Jeg siger fremdeles, at Qvadraten af BD kand ikke forholde sig til Qvadra-

Tab. 4. ten af FH som Cirklen ABCD til en Figur, som er større end Cirklen EFGH. Thi dersom nogen siger, at saadant kand være mueligt, saa lad Qvadraten af BD forholde sig til Qvadraten af FH som Cirklen ABCD til en Figur S som er større end Cirklen EFGH. Saa forholder sig ogsaa ved Omvending (Cor. 4. 5) Qvadraten af FH til Qvadraten af BD, som Figuren S til Cirklen ABCD. Da nu S er større end Cirklen EFGH, saa skal (14. 5) S forholde sig til Cirklen ABCD, som Cirklen EFGH til en Figur, som er mindre end Cirklen ABCD; følgelig (11. 5) skal Qvadraten af BD forholde sig til Qvadraten af FH, som Cirklen EFGH til en Figur, som er mindre end Cirklen ABCD, hvilket man til tilforn har beviist at være u-mueligt. Derfore kand Qvadraten af BD ikke forholde sig til Qvadraten af FH som Cirklen ABCD til en Figur, som er større end Cirklen EFGH. Da nu ogsaa tilforn blev beviist, at Qvadraten af BD kand ikke forholde sig til Qvadraten af FH, som Cirklen ABCD til en Figur, som er mindre end Cirklen EFGH. Saa er det klart, at ligesom Qvadraten af BD forholder sig til Qvadraten af FH, saa forholder sig ogsaa Cirklen ABCD til Cirklen EFGH. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 3 Proposition.

Theorema.

Enhver Pyramid, **som har en trekanted Grund-Plan, kand deeles i toe lige store og lige skikkede** Pyramider, **som have trekantede Grund-**Planer **og ere lige skikkede med den heele** Pyramide, **og i toe lige store** Prismer, **som ere tilsammen større end Halvparten af den heele** Pyramide.

Fig. 7. Exempel. Lad der være en Pyramide ABCD, som har en trekanted Grund-Plan ABC og hvis Top eller Spidse er den Punkt D: Jeg siger

ger jeg da, at Pyramiden ABCD kand deeles i toe lige store og lige skikkede Pyramider, som have trekantede Grund-Planer, og ere lige skikkede med den heele Pyramide ABCD, og i toe lige store Prismer, som ere tilsammen større end Halvparten af den heele Pyramide. Tab. 4.

Construction. De rette Linier AB, BC, CA, AD, DB, DC deeles i toe lige store Deele i Punkterne E, F, G, H, K, L. Dernest drages de rette Linier EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG.

Demonstration. Efterdi AE er saa stor som EB og AH er saa stor som HD, saa er EH parallel med BD (2. 6). Af samme Aarsag er HK ogsaa parallel med AB. Følgelig er HEBK et Parallelogram og derfore (34. 1) er HK saa stor som EB. Da nu EB er saa stor som AE; saa er AE ogsaa saa stor som HK; og fordi AH er ogsaa saa stor som HD, saa ere toe Sider AE, AH hver i sær saa store som toe Sider KH, HD og Vinklen EAH er (29. 1) saa stor som Vinklen KHD. Følgelig (4. 1) er Grund-Linien EH saa stor som Grund-Linien KD. Altsaa er Trianglen AEH af samme Størrelse og Skikkelse som Trianglen HKD. Paa samme Maade bevises ogsaa, at Trianglen AHG er af samme Størrelse og Skikkelse som Trianglen HLD. Fremdeles, eftersom de rette Linier EH, HG, som røre hinanden, ere parallele, men ikke i samme Plan med de toe rette Linier KD, DL, som ogsaa røre hinanden, saa er Vinklen EHG lige saa stor som Vinklen KDL (10. 11) og fordi disse lige store Vinkler indsluttes af lige store Sider EH, HG og KD, DL, saa skal Grund-Linien EG være saa stor som Grund-Linien KL. Altsaa ere de toe Triangler EHG, KDL lige store og lige skikkede. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at de toe Triangler AEG, HKL ere lige store og lige skikkede. Altsaa er den Pyramide AEGH, hvis Grund-Plan er Trianglen AEG og hvis Top er den Punkt H, af samme Størrelse og Skikkelse (10 Def. 11) som Pyramiden HKLD, hvis Grund-Plan er den Triangel HKL, men Toppen deraf er Punkten D.

Tab.4. Fremdeles, fordi HK er parallel med AB, saa har Trianglen ADB lige saa store Vinkler som Trianglen DKH og følgelig have de ogsaa proportionale Sider (6. 6). Derfore er da Trianglen ADB lige skikket med Trianglen DHK. Af samme er ogsaa Trianglen DBC lige skikket med Trianglen DKL, og Trianglen DAC med Trianglen DHL. Og fordi de rette Linier BA, AC som røre hinanden ere parallele, men ikke i samme Plan med de toe rette Linier KH, HL, saa er Vinklen BAC lige saa stor som Vinklen KHL (10. 11). Da nu ogsaa BA forholder sig til AC, som KH til HL, saa er Trianglen ABC lige skikket med Trianglen HKL. Følgelig er den Pyramide ABCD lige skikket med Pyramiden HKLD (9 Def. 11). Da nu tilforn blev beviist, at Pyramiden HKLD er lige skikket med Pyramiden AEGH, saa er Pyramiden ABCD ogsaa lige skikket med AEGH (21. 6). Følgelig ere begge de Pyramider AEGH, HKLD lige skikkede med den heele Pyramide ABCD.

Og fordi BF er saa stor som FC, saa er Parallelogrammet EBFG dobbelt saa stor som Trianglen GFC. Altsaa ere her toe Prismer, nemlig det Prisma EBFGHK, som er indsluttet af de tvende Triangler BKF, EHG og af de tre Parallelogrammer EBFG, EBKH, KHGF, og det Prisma FGCLHK, som er indsluttet af de toe Triangler GFC, HKL og de tre Parallelogrammer KFCL, LCGH, HKFG, hvilke toe Prismer have en og den samme Høyde og det første af dem har et Parallelogram EBFG, og det andet en Triangel GFC til Grund-Plan; og Parallelogrammet EBFG er dobbelt saa stort som som Trianglen GFC; følgelig (40. 11) ere bemeldte toe Prismer lige store. Og det er klart, at de samme Prismer ere større end de toe Pyramider AEGH, HKLD. Thi naar man drager den rette Linie EF, saa er det Prisma EBFGHK større end den Pyramide EBFK, hvis Grund-Plan er Trianglen EBF og Spidse den Punkt K. Men nu er Pyramiden EBFK lige saa stor, som Pyramiden AEGH; thi de ere indsluttede af lige store og lige skikkede Planer. Følgelig er det Pris-

Prisma EBFGHK ogsaa større end Pyramiden AEGH. Da Tab.4.
nu det Prisma EBFGHK er saa stort som det Prisma FGCLHK, og Pyramiden HKLD er saa stor som Pyramiden AEGH; saa ere de toe bemeldte Prismer større end de toe Pyramider AEGH, HKLD. Altsaa er den heele Pyramide ABCD deelt i toe lige store og lige skikkede Pyramider, som have trekantede Grund-Planer og ere lige skikkede med den heele Pyramide, og i toe lige store Prismer, som ere tilsammen større end Halvparten af den heele Pyramide. Hvilket var det, som skulde bevises.

Den 4 Proposition.

Theorema.

Dersom der ere toe Pyramider af lige Høyde, som have trekantede Grund-Planer, og enhver af disse Pyramider bliver deelet i toe lige store Pyramider, som ere lige skikkede med den heele Pyramide, saa vel som ogsaa i toe lige store Prismer, og dersom fremdeles enhver af de toe Pyramider, som udkom ved den første Deeling, bliver igien paa samme maade deelt og dette skeer immerfort: Saa skal alle Prismerne i den ene Pyramide forholde sig til alle Prismerne i den anden Pyramide, saa fremt der ere lige mange Prismer i begge Pyramiderne, som Grund-Planen af den ene Pyramide forholder sig til Grund-Planen af den anden.

Exempel. Lad der være toe Pyramider ABCG og DEFH af lige Høyde, som have trekantede Grund-Planer ABC, DEF, og lad enhver af dem blive deelet i toe lige store Pyramider, som ere lige skikkede med den heele Pyramide og i toe lige store Prismer: og lad de Pyramider som bekommes ved den forrige Deeling, blive paa samme Maade deelte og lad dette skee immerfort: Saa siger jeg, at lige som Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF, saa forholder sig ogsaa alle de Prismer, som ere i Pyramiden ABCG til alle de Prismer som ere i Pyramiden DEFH, saafremt der ere lige mange Prismer i begge Pyramiderne. Fig.8,9

Tab. 4. **Demonstration.** Eftersom BX er saa stor som XC og AL saa stor som LC, saa er XL parallel med AB (2. 6), og derfore er Trianglen ABC lige skikket med Trianglen LXC (4. 6). Af samme Aarsag er Trianglen DEF lige skikket med Trianglen RQF. Og fordi BC er dobbelt saa stor som CX, og EF dobbelt saa stor som FQ, saa forholder sig BC til CX, som EF til FQ. Da nu paa BC og CX ere beskrevne lige skikkede og ligedan satte Triangler ABC, LXC, og paa EF, FQ ere ligeledes beskrevne lige skikkede og ligedan satte Trianglen DEF, RQF: Saa (22. 6) forholder sig Trianglen ABC til Trianglen LXC som Trianglen DEF til Trianglen RQF; følgelig forholder sig skifte-viis (16. 5) Trianglen ABC til Trianglen DEF, som Trianglen LXC til Trianglen RQF. Men nu forholder sig Trianglen LXC til Trianglen RQF, som det Prisma LXCOMN til det Prisma RQFSTY (see det næst efterfølgende Scholion); følgelig (11. 5) forholder sig Trianglen ABC til Trianglen DEF, som det Prisma LXCOMN til det Prisma RQFSTY. Og fordi de toe Prismer, som ere i den Pyramide ABCG ere lige store med hinanden, saa vel som ogsaa de toe Prismer, som ere i Pyramiden DEFH; saa skal det Prisma KBXLMO forholde sig til det Prisma LXCOMN, som det Prisma PEQRST til det Prisma RQFSTY. Derfore forholder sig ved Sammensætning (18. 5) de toe Prismer KBXLMO, LXCOMN tilsammentagen til det Prisma LXCOMN, som de toe Prismer PEQRST, RQFSTY tilsammen tagen til det Prisma RQFSTY. Og skifte-viis som de Prismer KBXLMO, LXCOMN til de Prismer PEQRST, RQFSTY, saa forholder sig det Prisma LXCOMN til det Prisma RQFSTY. Da nu det Prisma LXCOMN forholder sig til det Prisma RQFSTY ligesom Trianglen LXC til Trianglen RFQ (som tilforn blev beviist) og følgelig ogsaa (11. 5) som Trianglen ABC til Trianglen DEF; saa forholder sig de toe Prismer, som ere udi Pyramiden ABCG til de toe Prismer som ere udi Pyramiden DEFH, som Trianglen ABC til Trianglen DEF. Dersom nu de toe Pyramider OMNG, STYH, som udkom ved den første Deeling,

ing, blive deelte paa forskrevne Maade, saa skal ogsaa de toe Prismer, som ere udi Pyramiden OMNG forholde sig til de toe Prismer, som ere udi Pyramiden STYH, som Grund-Planen OMN forholder sig til Grund-Planen STY. Men Grund-Planen OMN forholder sig til Grund-Planen STY som Grund-Planen ABC til Grund-Planen DEF. Derfore ligesom Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF, saa forholde sig de toe Prismer, som ere i Pyramiden ABCG til de toe Prismer som ere i Pyramiden DEFH og ligeledes de toe Prismer, som ere i Pyramiden OMNG til de toe Prismer, som ere udi Pyramiden STYH. Følgelig ligesom Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF, saa forholder sig alle fire Prismer i Pyramiden ABCG til alle fire Prismer i Pyramiden DEFH. Det samme kand ogsaa bevises om de Prismer, som man bekommer, naar de Pyramider AKLO, DPRS blive efter forskrevne Maade deelte, saavel som ogsaa om alle andre Prismer, saa fremt der ere lige mange af dem i begge Pyramiderne. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 4.

Scholion.

Et Prisma kaldes trekanted, naar de toe hinanden imodsatte og parallele Planer ABC og DEF (see Tab. 1. Fig. 7) ere Triangler; men naar samme Planer ere Firkanter, Femkanter &c. saa kaldes det et firkanted, femkanted &c. Prisma. Eftersom nu et Parallelepipedum lader sig deele i toe lige store trekantede Prismer (28. 11), saa er et trekanted Prisma halvparten af et Parallelepipedum, og kand altsaa alt det, som i den 11te Bogs 29, 30, 31, 32, 33, 34 Prop. er beviist om Parallelepipeder, ogsaa appliceres paa trekantede Prismer (15. 5). Derfore forholde sig de trekantede Prismer LXCOMN, RQFSTY, (see Tab. 4. Fig. 8, 9.) til hinanden ligesom deres Grund-Planer LXC, RQF (32. 11). Et Firkanted Prisma er det samme som et Parallelepipedum, thi det indsluttes ogsaa af sex parallele Firkanter.

Den 5 Proposition.

Theorema.

De Pyramider, som ere af lige Høyde og have trekan-

tede

Tab.4. tede Grund-Planer, forholde sig til hinanden som deres Grund-Planer.

Fig.8,9 Exempel. Lad ABCG, DEFH være toe Pyramider, som have een og den samme Høyde, og trekantede Grund-Planer ABC, DEF: Saa siger jeg, at Pyramiden ABCG forholder sig til Pyramiden DEFH, som Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF.

Demonstration. Thi hvis ikke; da maae Grund-Planen ABC forholde sig til Grund-Planen DEF, som Pyramiden ABCG til et Solidum, som er enten større eller mindre end Pyramiden DEFG. Lad da for det første ABC forholde sig til DEF, som Pyramiden ABCG til et Solidum Z, som er mindre end Pyramiden DEFH, og deel Pyramiden DEFH i toe lige store Pyramider, som ere lige skikkede med den heele Pyramide, og i toe lige store Prismer, saa ere disse toe Prismer tilsammen større end Halvparten af den heele Pyramide (3. 12). Deel ligeledes de Pyramider, som udkom ved den forrige Deeling, efter forskrevne Maade, og giør dette saa længe, indtil man faaer saadanne Pyramider som tilsammen ere mindre end det Stykke, som Pyramiden DEFH er større end det Solidum Z. Lad da for Exempel, de Pyramider DPRS, STYH være de, som tilsammen ere mindre end det Stykke, som Pyramiden DEFH er større end det Solidum Z, saa skal de øvrige Prismer RQFSTY og PEQRST være tilsammen større end det Solidum Z. Lad nu Pyramiden ABCG blive deelt paa samme Maade og i lige saa mange Deele som Pyramiden DEFH; saa skal de Prismer, som ere i Pyramiden ABCG forholde sig til de Prismer, som ere i Pyramiden DEFH, som Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF (4. 12). Da nu Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF, som Pyramiden ABCG til det Solidum Z; saa forholder sig (11. 5) Pyramiden ABCG til det Solidum Z som de Prismer, der ere udi Pyramiden ABCG, til de Prismer, som ere udi Pyramiden DEFH. Men nu er Pyramiden ABCG større end de Prismer, som ere i den. Følgelig

(14. 5)

(14. 5) er og det Solidum Z større end de Prismer, som ere i Pyramiden DEFH. Men det er ogsaa mindre, (efter det som tilforn blev beviist), som er u-rimeligt. Derfore kand da Grund-Planen ABC ikke forholde sig til Grund-Planen DEF, som Pyramiden ABCG forholder sig til et Solidum, som er mindre end Pyramiden DEFH. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at Grund-Planen DEF kand ikke forholde sig til Grund-Planen ABC, som Pyramiden DEFH til et Solidum, som er mindre end Pyramiden ABCG. Jeg siger fremdeles, at ABC kand ikke forholde sig til DEF som Pyramiden ABCG til et Solidum, som er større end Pyramiden DEFH. Thi hvis saadant kand være mueligt, saa lad ABC forholde sig til DEF, som Paramiden ABCG til et Solidum I, som er større end Pyramiden DEFH, saa forholder sig ogsaa ved Omvending (Cor. 4. 5) Grund-Planen DEF til Grund-Planen ABC, som det Solidum I til Pyramiden ABCG. Da nu det Solidum I er større end DEFH, saa skal (14. 5) det Solidum I forholde sig til Pyramiden ABCG, som Pyramiden DEFH til et Solidum, som er mindre end Pyramiden ABCG. Følgelig (11. 5) skal Grund-Planen DEF forholde sig til Grund-Planen ABC som Pyramiden DEFH til et Solidum, som er mindre end Pyramiden ABCG, hvilket tilforn er beviist, at være u-mueligt. Følgelig kand Grund-Planen ABC ikke forholde sig til Grund-Planen DEF, som Pyramiden ABCG til et Solidum, som er større end Pyramiden DEFH. Da nu tilforn blev beviist, at ABC ikke heller kand forholde sig til DEF som Pyramiden ABCG til et Solidum, som er mindre end Pyramiden DEFH; saa er det klart, at ligesom Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF, saa forholder sig ogsaa Pyramiden ABCG til Pyramiden DEFH. Hvilket var det, som skalde bevises. Tab. 4. Fig. 11.

Tab.4.

Den 6 Proposition.
Theorema.

De Pyramider, som ere af lige Høyde og have mangekantede Grund-Planer, forholde sig til hinanden som deres Grund-Planer.

Fig.12, 13. Exempel. Lad ABCDEM og FGHKLN være toe Pyramider, som ere af lige Høyde og som have mangekantede Grund-Planer ABCDE, FGHKL og lad Punkterne M og N være deres Spidser: Saa siger jeg, at ligesom Grund-Planen ABCDE forholder sig til Grund-Planen FGHKL, saa forholder sig Pyramiden ABCDEM til Pyramiden FGHKLN.

Construction. Man deeler Grund-Planen ABCDE i de Triangler ABC, ACD, ADE, og Grund-Planen FGHKL i de Triangler FGH, FHK, FKL. Dernæst stiller man sig for, at paa enhver af disse Triangler Pyramider ere stillede, som ere af lige Høyde med de førstbemeldte toe heele Pyramider.

Demonstration. Efterdi nu (5. 12) Trianglen ABC forholder sig til Trianglen ACD, som Pyramiden ABCM til Pyramiden ACDM: Saa forholder sig ved Sammensætning (18. 5) den Firkant ABCD til Trianglen ACD, som Pyramiden ABCDM til Pyramiden ACDM. Men nu forholder sig (5. 12) Trianglen ACD til Trianglen ADE som Pyramiden ACDM til Pyramiden ADEM. Følgelig forholder sig ved en jevntagen Forhold (22. 5) Grund-Planen ABCD til Grund-Planen ADE, som Pyramiden ABCDM til Pyramiden ADEM og ved Sammensætning (18. 5) Grund-Planen ABCDE til Grund-Planen ADE, som Pyramiden ABCDEM til Pyramiden ADEM. Af samme Aarsag forholder sig ogsaa Grund-Planen FGHKL til Grund-Planen FKL, som Pyramiden FGHKLN til Pyramiden FKLN. Efterdi nu de Pyramider ADEM, FKLN have samme Høyde og trekantede Grund-Pla-

Planer, saa forholder sig Grund-Planen ADE til Grund-Planen FKL, som Pyramiden ADEM til Pyramiden FKLN. Og fordi Grund-Planen ABCDE forholder sig til Grund-Planen ADE som Pyramiden ABCDEM til Pyramiden ADEM og Grund-Planen ADE forholder sig til Grund-Planen FKL, som Pyramiden ADEM til Pyramiden FKLN; saa forholder sig ogsaa ved en jevntagen Forhold Grund-Planen ABCDE til Grund-planen FKL, som Pyramiden ABCDEM til Pyramiden FKLN. Men nu forholder sig Grund-Planen FKL til Grund-Planen FGHKL som Pyramiden FKLN til Pyramiden FGHKLN. Følgelig forholder sig ogsaa ved en jevntagen Forhold (22.5) Grund-Planen ABCDE til Grund-Planen FGHKL, som Pyramiden ABCDEM til Pyramiden FGHKLN. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab.4.

Den 7 Proposition.

Theorema.

Et hvert prisma, som har en trekanted Grund-Plan, lader sig deele i tre lige store Pyramider, som have trekantede Grund-Planer.

Exempel. Lad ABCDEF være et Prisma, som har en trekanted Grund-Plan ABC; Saa siger jeg, at dette Prisma kand deeles i tre lige store Pyramider, som have trekantede Grund-Planer. Fig.14.

Demonstration. Man drager de rette Linier BD, EC, CD. Efterdi nu ABED er et Parallelogram og BD er dets Tver-Linie, saa er Trianglen ABD saa stor (34. 1) som Trianglen EBD. Derfore (5. 12) skal den Pyramide hvis Grund-Plan er den Triangel ABD og hvis Top er den Punkt C, være lige saa stor som den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel EBD og hvis Top er den Punkt C. Men nu

 er

Tab.4. er den Pyramide, hvis Grund-Plan er Trianglen EBD og hvis Top er Punkten C, den samme som den Pyramide, hvis Grund-Plan er Trianglen EBC og hvis Top er Punkten D, thi de indsluttes begge af selvsamme Planer nemlig af de fire Triangler EBD, EBC, ECD og DCB. Følgelig er den Pyramide, hvis Grund-Plan er Trianglen ABD og hvis Top er Punkten C, lige saa stor som den Pyramide, hvis Grund-Plan er Trianglen EBC og hvis Top er Punkten D. Fremdeles, efterdi FCBE er et Parallelogram, hvis Tver-Linie er CE, saa er (34. 1) Trianglen EBC lige saa stor, som Trianglen ECF. Følgelig (6. 12) er den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel EBC og hvis Spidse er den Puukt D, lige saa stor som den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel ECF og hvis Top er den Punkt D. Da nu den Pyramide, hvis Grund-Plan er Trianglen ABD og hvis Top er den Punkt C, er lige saa stor, som den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel EBC og hvis Top er den Punkt D; saa er den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel ABD og hvis Top er den Punkt C, lige saa stor som den Pyramide, hvis Grund-Plan er Trianglen ECF og hvis Top er Punkten D. Altsaa ere de tre Pyramider ABDC, EBCD, ECFD lige store og fordi de udgiøre det heele Prisma ABCDEF, saa er det klart at et Prisma, som har en trekanted Grund-Plan, lader sig deele i tre lige store Pyramider. Hvilket var det, som skulde bevises.

1. Corollarium

Eftersom den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel ABD og hvis Top er den Punkt C, er den samme som den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel CAB og hvis Top er den Punkt D (thi de indsluttes begge af selv samme Planer), og den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel ABD og hvis Top er den Punkt C, er en tredie Part af det Prisma ABCDEF (7. 12). Saa er ogsaa den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel CAB og hvis Top er den Punkt D, den tredie

Part

Part af det Prisma ABCDEF. Heraf seer man da, at en Pyramide CABD, som har en trekanted Grund-Plan CAB, er en tredie Deel af et Prisma, som har samme Grund-Plan CAB og samme Høyde, som Pyramiden. Og heraf følger videre, at ogsaa enhver Pyramide ABCDEG, som har en mangekanted Grund-Plan ABCDE er den tredie Part af et Prisma ABCDEFGHIK, som har samme Grund-Plan og Høyde, som Pyramiden. Thi naar man afdeeler det bemeldte Prisma i trekantede Prismer ABCFGH, ACEFHK, ECDKHI; saa er den Pyramide ABCG den tredie Deel af det Prisma ABCFGH, fordi de have en og den samme Grund-Plan, nemlig Trianglen ABC og en og den samme Høyde. Ligeledes er Pyramiden ACEG den tredie Deel af det Prisma ACEFHK, fordi de staae begge paa samme Grund-Plan ACE og have en og den samme Høyde, thi de staae imellem samme parallele Planer FGHK og ABCE; af samme Aarsag er den Pyramide ECDG den tredie Deel af det Prisma ECDKHI. Da nu de tre bemeldte Pyramider udgiore den heele Pyramide ABCDEG og de bemeldte tre Prismer udgiore det heele Prisma ABCDEFGHIK, saa er det klart at denne heele Pyramide er den tredie Deel af dette heele Prisma. Heraf følger da, at enhver Pyramide, enten den har en trekanted eller mangekanted Grund-Plan, er den tredie Deel af et Prisma, som har samme Grund-Plan og samme Høyde som Pyramiden. Tab. 4. Fig. 15.

2. Corollarium.

Altsaa naar Prismer have en og den samme Høyde, saa forholde de sig til hinanden, som deres Grund-Planer (6. 12 og 15. 5).

Den 8 Proposition.

Theorema.

Ligeskikkede Pyramiders, som have trekantede

Tab.4. Grund-Planer, deres Forhold til hinanden er tripleret imod den Forhold, som deres Sider, der ere lige i Forhold, have til hinanden.

Fig.16, 17. Exempel. Lad ABCG og DEFH være toe ligeskikkede Pyramider, som have trekantede Grund-Planer ABC, DEF: Saa siger jeg, at den Forhold, som Pyramiden ABCG har til Pyramiden DEFH, er tripleret imod den forhold, som BC har til EF.

Demonstration. Fuldfør de Parallelepipeder BGML, EHPO. Efterdi nu Pyramiden ABCG er lige skikket med Pyramiden DEFH, saa er Vinklen ABC (9 Def. 11) lige saa stor som Vinklen DEF, og Vinklen GBC saa stor som Vinklen HEF, og Vinklen ABG saa stor som Vinklen DEH, og af samme Aarsag forholder sig AB til DE, som BC til EF og som BG til EH. Altsaa efterdi Vinklen ABC er saa stor som Vinklen DEF og Siderne omkring disse lige store Vinkler ere proportionale, saa er Parallelogrammet BM lige skikket med Parallelogrammet EP. Af samme Aarsag er Parallelogrammet BN lige skikket med Parallelogrammet ER, og Parallelogrammet BK med Parallelogrammet EX. Følgelig ere de tre Parallelogrammer BM, BK, BN lige skikkede med de tre Parallelogrammer EP, EX, ER. Men nu ere de tre BM, BK, BN lige skikkede med deres tre imodsatte Parallelogrammer og ligeledes ere de tre EP, EX, ER lige skikkede med de tre imodsatte (24. 11). Altsaa ere de Parallelepipeder BGML og EHPO indsluttede af lige mange og lige skikkede Planer, og følgeligen (9 Def. 11) er BGML lige skikket med EHPO. Derfore (33. 11) er den Forhold, som BGML har til EHPO tripleret imod den Forhold, som Siden BC har til Siden EF. Men nu forholder sig BGML til EHPO som Pyramiden ABCG til Pyramiden DEFH (15. 5); thi eftersom (1 Cor. 7. 12) disse Pyramider ere tredie Deele af de trekantede Prismer, som staae paa Grund-Planerne GBC og HEF og have samme Høyde som Pyramiderne, og disse Prismer igien ere i følge af den 28 Prop. 11 halve Deele af de Parallelepipeder BGML og EHPO; saa

saa ere de Pyramider ABCG, DEFH siette Deele af de Parallelepipeder BGML, EHPO. Altsaa er ogsaa den Forhold, som Pyramiden ABCG har til Pyramiden DEFH tripleret imod den Forhold, som BC har til EF. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 4.

Corollarium.

Heraf er det klart, at lige skikkede Pyramiders, som have mangekantede Grund-Planer, deres Forhold til hinanden, er tripleret imod den Forhold, som deres Sider, der ere lige i Forhold, have til hinanden. Thi naar bemeldte Pyramider afdeles i Pyramider, som have trekantede Grund-Planer, saa skal deres lige skikkede mangekantede Grund-Planer (20. 6) derved deeles i lige mange og lige skikkede Triangler og følgeligen ligesom en Pyramide, som har en trekanted Grund-Plan, udi en af Pyramiderne, forholder sig til en Pyramide, som har en trekanted Grund-Plan, udi den anden Pyramide, saa skal alle Pyramiderne, som have trekantede Grund-Planer, udi den ene Pyramide, forholde sig til alle Pyramiderne, som have trekantede Grund-Planer, udi den anden Pyramide, det er, saa forholder sig den eene af de Pyramider, som have en mangekanted Grund-Plan, til den anden. Da nu den Forhold, som en Pyramid, der har en trekanted Grund-Plan, har til en anden Pyramid, som ogsaa har en trekandted Grund-Plan, er tripleret imod den Forhold, som de Sider have til hinanden, der ere lige i Forhold; saa er ogsaa den Forhold, som en Pyramide, der har en mangekanted Grund-Plan, har til en anden Pyramid, som ligeledes har en mangekanted Grund-Plan, tripleret imod den Forhold, som de Sider have til hinanden, der ere lige i Forhold.

Den 9 Proposition,

Theorema,

Grund-Planerne og Høyderne af lige store Pyramider

Tab.4. som have trekantede Grund-Planer, ere reciproce proportionale: og naar Grund-Planerne og Høyderne af Pyramider, som have trekantede Grund-Planer, ere reciproce proportionale, saa ere Pyramiderne lige store.

Fig.18, 19. Exempel. Lad ABCG, DEFH være lige store Pyramider, som have trekantede Grund-Planer ABC, DEF: Jeg siger da, at Grund-Planerne og Høyderne af de Pyramider ABCG, DEFH ere reciproce proportionale, det er, Grund-Planen ABC forholder sig til Grund-Planen DEF, som Høyden af Pyramiden DEFH til Høyden af Pyramiden ABCG.

Demonstration. Fuldfor de Parallelepipeder BGML, EHPO. Eftersom nu Pyramiden ABCG er saa stor som Pyramiden DEFH og det Parallelepipedum BGML er sex gange saa stor som Pyramiden ABCG og det Parallelepipedum EHPO er sex gange saa stor, som Pyramiden DEFH, (efter det som i den næstforegaaende Proposition blev beviist), saa (15.5) skal det Parallelepipedum BGML være saa stor som det Parallelepipedum EHPO; og følgeligen skal Grund-Planerne og Høyderne af disse Parallelepipeder være reciproce proportionale (34. 11). Derfore forholder sig Grund-Planen BM til Grund-Planen EP, som Høyden af det Parallelepipedum EHPO til Høyden af det Parallelepipedum BGML. Da nu BM forholder sig til EP som Trianglen ABC til Trianglen DEF; saa forholder sig ogsaa Trianglen ABC til Trianglen DEF som Høyden af det Parallelepipedum EHPO til Høyden af det Parallelepipedum BGML, det er, som Høyden af Pyramiden DEFH til Høyden af Pyramiden ABCG, thi EHPO har samme Høyde som Pyramiden DEFH, og BGML har samme Høyde som Pyramiden ABCG. Altsaa ere Grund-Planerne og Høyderne af de lige store Pyramider ABCG, DEFH reciproce proportionale, Hvilket (1) var at bevise.

2. Lad nu Grund-Planerne og Høyderne af de Pyramider ABCG, DEFH være reciproce proportionale, det er, lad Grund-Planen ABC

forholde sig til Grund-Planen DEF som Høyden af Pyramiden DEFH til Høyden af Pyramiden ABCG: Saa siger jeg, at Pyramiden ABCG er saa stor som Pyramiden DEFH. Tab. 4.

Thi eftersom ABC forholder sig til DEF som Høyden af Pyramiden DEFH til Høyden af Pyramiden ABCG; og ABC forholder sig til DEF (15. 5) som Parallalogrammet BM til Parallelogrammet EP; saa forholder sig ogsaa BM til EP som Høyden af Pyramiden DEFH til Høyden af Pyramiden ABCG, det er, som Høyden af det Parallelepipedum EHPO til Høyden af det Parallelepipedum BGML. Følgelig ere Høyderne og Grund-Planerne af de Parallelepipeder BGML og EHPO reciproce proportionale og altsaa (34. 11) ere de Parallelepipeder BGML, EHPO lige store. Men nu er Pyramiden ABCG den siette Part af BGML og ligeledes er Pyramiden DEFH den siette Part af EHPO. Følgelig er Pyramiden ABCG saa stor som Pyramiden DEFH. Hvilket (2) var at bevise.

Den 10 Proposition.

Theorema.

Enhver Conus eller Kegle er den tredie Deel af en Cylinder, naar de begge have en og den samme Grund-Plan og Høyde.

Exempel. Lad en Kegle og en Cylinder staae paa en og den samme Grund-Plan, nemlig paa Cirklen ABCD og have en og den samme Høyde (see 18, 20, 21 og 23 Def. 11): Saa siger jeg, at Keglen er en tredie Part af Cylindren eller Cylindren er tre gange saa stor som Keglen. Fig. 20

Demonstration. Dersom Cylinderen ikke er tre gange saa stor som Keglen, saa maae den enten være meer eller mindre end tre gange saa stor. Lad den for det første være meer end tre gange saa stor som Keglen og beskriv i Cirklen

Tab.4. ABCD en Qvadrat ABCD, saa skal denne Qvadrat være større end Halvparten af Cirklen ABCD. Lad nu paa Qvadraten ABCD et Parallelepipedum eller et firkanted Prisma blive opreyst, som har samme Høyde som Cylinderen, saa skal dette Prisma være større end Halvparten af Cylinderen; thi dersom man beskriver en Qvadrat omkring Cirklen (see Fig. 21) og derpaa bliver stillet et Prisma af samme Høyde som Cylinderen, saa skal det Prisma, som staaer paa den indskrevne Qvadrat ABCD, være Halvparten af det Prisma, som staaer paa den omskrevne Qvadrat (thi disse Prismer, efterdi de ere lige høye, saa forholde de sig til hinanden som deres Grund-Planer (2 Cor. 7) og den indskrevne Qvadrat er Halvparten af den omskrevne). Da nu Cylindren er mindre end det Prisma, som staaer paa den omskrevne Qvadrat; saa er det Prisma, som er stillet paa den indskrevne Qvadrat ABCD og som har samme Høyde som Cylinderen, større end Halvparten af Cylinderen. Deel nu de Cirkel-Buer AB, BC, CD, DA i toe lige store Deele i de Punkter E, F, G, H og drag de rette Linier AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; saa skal (efter det som forhen er beviist i den 2 Prop. 12) enhver af de Triangler AEB, BFC, CGD, DHA være større end Halvparten af det Cirkel-Stykke, som den staaer udi. Dersom nu paa enhver af de Triangler AEB, BFC, CGD, DHA opreyses Prismer, som have samme Høyde som Cylinderen, saa skal enhver af disse Prismer være større end Halvpaten af det dertil hørende Stykke af Cylinderen, nemlig det Prisma, som staaer paa Triangleu AEB skal være større end Halvparten af det Stykke af Cylinderen, som staaer paa Cirkel-Stykket AEB og saa fremdeles; thi dersom igiennem Punkterne E, F, G, H bliver dragne rette Linier parallel med AB, BC, CD, AD og Parallelogrammerne paa de rette Linier AB, BC, CD, DA blive fuldførte og derpaa blive opreyste Parallelepipeder af samme Høyde som Cylinderen, saa skal enhver af de Prismer, som ere opreyste paa Trianglerne AEB, BFC, CGD, DHA være Halvparten af de opreyste Parallelepipeder; da nu de bemeldte Stykker af Cylinderen ere mindre end samme Parallelepipeder; saa skal ogsaa de Prismer, som staaer paa de Triangler AEB, BFC, CGD, DHA være større end Halvparten af de dertil hørende Stykker af Cylinderen. Derfore naar man atter deeler de øvrige Cirkel-Buer i toe lige store Deele og drager rette Linier og opreyser Prismer paa de udkommende Triangler, af samme Høyde som Cylinderen, og dette skeer saaledes immerfort, saa faaer man omsider (efter det Lemma som følger næst efter den 1 Proposition) saadanne Portioner eller Stykker af Cylinderen tilovers, som tilsammen ere mindre end det Stykke, som Cylinderen er meer end tre gange saa stor som Keglen. Tab. 4.

Lad da de Portioner af Cylinderen som staae paa de Cirkel-Stykker AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA være tilsammen mindre end det Stykke, som Cylinderen er meer end tre gange saa stor som Keglen; saa skal det øvrige Prisma, som har den Polygon AEBFCGDH til sin Grund-Plan og hvis Høyde er den samme som Cylinderens Høyde, være meer end tre gange saa stor som Keglen. Men nu er (1 Cor. 7) dette sidst bemeldte Prisma tre gange saa stor som den Pyramide, som har den samme Polygon AEBFCGDH til sin Grund-Plan og hvis Spidse er den samme som Keglens Spidse. Følgelig skal denne Pyramide være større end Keglen, som har Cirklen ABCD til sin Grund-Plan. Men den er ogsaa mindre end Keglen (thi den indsluttes af Keglen), som er u-rimeligt. Derfore kand da Cylinderen ikke være meer end tre gange saa stor som Keglen.

Jeg siger fremdeles, at den kand ikke heller være mindre end tre gange saa stor som Keglen. Thi hvis saadant kand være mueligt, saa lad Cylinderen være mindre end tre gange saa stor som Keglen; Saa skal Keglen ogsaa være meer end den tredie Part af Cylinderen. Lad nu en Qvadrat ABCD blive beskreven i Cirklen ABCD og lad paa samme Qvadrat en Pyramide blive opstilled, som har samme Top eller Spidse som Keglen, saa skal denne Pyramid være større end Halvparten af Keglen.

 Thi

Tab. 4. Thi dersom man beskriver en Qvadrat omkring Cirklen og paa samme Qvadrat stilles en Pyramide, som har samme Spidse som Keglen; saa skal den Pyramide, som er stilled paa den indskrevne Qvadrat være Halvparten af den Pyramide, som er stilled paa den omskrevne Qvadrat (6. 12), thi den indskrevne Qvadrat er Halvparten af den omskrevne. Da nu Pyramiden, som er stilled paa den omskrevne Qvadrat er større end Keglen, thi den indslutter Keglen, saa er ogsaa den Pyramide, som er stilled paa den indskrivne Qvadrat, større end Halvdeelen af Keglen. Deel da fremdeles de Cirkel-Buer AB, BC, CD, DA i toe lige store Deele i de Punkter E, F, G, H og drag de rette Linier AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; saa skal enhver af de Triangler AEB, BFC, CGD, DHA være større end det Cirkel-Stykke, som den staaer udi, og dersom paa Trianglerne AEB, BFC, CGD, DHA opreyses Pyramider, som have samme Top som Keglen, saa skal enhver af disse Pyramider være større end Halvparten af det dertil hørende Stykke af Keglen: Altsaa naar man atter skiærer de øvrige Cirkel-Buer og drager rette Linier og paa de udkommende Triangler opreyses Pyramider, som have samme Spidse som Keglen og dette skeer immerfort, saa bliver der tilsidst (efter det forhen bemeldte Lemma,) saadanne Portioner eller Stykker af Keglen tilovers, som tilsammen ere mindre end det Stykke, som Keglen er større end en tredie Part af Cylinderen. Lad nu de Stykker af Keglen, som staae paa de Cirkel-Stykker AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA være af bemeldte Beskaffenhed, saa skal den øvrige Pyramide, som har den Polygon AEBFCGDH til sin Grund-Plan og hvis Top er den samme som Keglens, være større end den tredie Part af Cylinderen. Men nu er denne Pyramide, som har den bemeldte Polygon AEBFCGDH til sin Grund-Plan og hvis Top er den samme som Keglens, en tredie Part af det Prisma, hvis Grund-Plan er den Polygon AEBFCGDH og hvis Høyde er den samme som Cylinderens Høyde, følgelig er dette Prisma større end Cylinderen, som er u-rimeligt, thi samme

Prisma

Prisma indsluttes af Cylinderen, eftersom de have begge en og den samme Høyde, og Polygonen AEBFCGDH, som er Grund-Planen af bemældte Prisma, er mindre end Cirklen ABCD som er Grund-Planen af Cylinderen. Altsaa kand Cylinderen ikke være mindre end tre gange saa stor som Keglen. Men den kand ikke heller være meer end tre gange saa stor som Keglen, som tilforn blev beviist. Følgelig er Cylinderen tre gange saa stor som Keglen. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab,4.

Den II Proposition.

Theorema.

Kegler og Cylindrer, som have en og den samme Høyde, forholde sig til hinanden, som deres Grund-Planer.

Exempel. Lad der være toe Kegler og toe Cylinderer, som have en og den samme Høyde og hvis Grund-Planer ere de Cirkler ABCD, EFGH og lad KL være den ene Kegles og Cylinders Axel (Axis) og MN den anden Kegles og Cylinders Axel (see 19 og 22 Def. 11) og lad AC og EG være Grund-Planernes Diametrer eller Middel-Linier: Saa siger jeg, at ligesom Cirklen ABCD forholder sig til Cirklen EFGH, saa forholder sig Keglen AL til Keglen EN. Fig.22, 23.

Demonstration. Dersom Cirklen ABCD ikke forholder sig til Cirklen EFGH, som Keglen AL til Keglen EN, saa maae Cirklen ABCD forholde sig til Cirklen EFGH som Keglen AL til et Solidum, som er enten større eller mindre end Keglen EN. Lad da først Cirklen ABCD forholde sig til Cirklen EFGH som den Conus eller Kegle AL forholder sig til et Solidum X, som er mindre end Keglen EN og lad det Solidum I være saa stor som det Stykke, som Keglen EN er større end det Solidum X; saa er Keglen EN lige saa stor som de toe Solider X og I tilsammen. Bestriv nu en Qvadrat EFGH i Cirklen EFGH og paa samme Qvadrat stilles en Pyramide af samme Høyde som Fig.24, 25.

Tab. 4. Keglen, saa skal denne Pyramide være større end Halvparten af Keglen (see Demonstrationen til den næstforegaaende Proposition). Deel fremdeeles de Cirkel-Buer EF, FG, GH, HE i toe lige store Deele i Punkterne P, R, S, O og drag de rette Linier HO, OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH. Naar nu paa de Triangler HOE, EPF, FRG, GHS opreyses Pyramider af samme Høyde, som Keglen; saa skal enhver af disse Pyramider være større end det dertil hørende Stykke af Keglen. Altsaa dersom man paa ny deeler de øvrige Cirkel-Buer i toe lige store Deele og drager rette Linier og opreyser Pyramider paa de udkommende Triangler af samme Høyde som Keglen og dette skeer immerfort, saa bliver der tilsidst (efter det forhen bemeldte Lemma) saadanne Stykker af Keglen tilovers, som tilsammen ere mindre end det Solidum I. Lad da de Stykker af Keglen, som staae paa Cirkel-Stykkerne HO, OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH være tilsammen mindre end det Solidum I; saa er den overblivende Pyramid, som har den Polygon HOEPFRGS til sin Grund-Plan og hvis Høyde er den samme som Keglens Høyde, større end det Solidum X. Beskriv i Cirklen ABCD en Polygon DTAYBQCV af samme Skikkelse og ligedan sadt, som Polygonen HOEPFRGS og lad paa samme Polygon DTAYBQCV en Pyramid blive opreyst af samme Høyde som Keglen AL. Efterdi nu Qvadraten af AC forholder sig til Qvadraten af EG som Polygonen DTAYBQCV til Polygonen HOEPFRGS (1. 12) og Qvadraten af AC forholder sig ogsaa til Qvadraten af EG som Cirklen ABCD til Cirklen EFGH (2. 12); saa forholder sig (11. 5) Cirklen ABCD til Cirklen EFGH, som Polygonen DTAYBQCV til Polygonen HOEPFRGS. Men nu forholder sig Cirklen ABCD til Cirklen EFGH som Keglen AL til det Solidnm X, og (6. 12) Polygonen DTAYBQCV forholder sig til Polygonen HOEPFRGS som den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Polygon DTAYBQCV og hvis Spidse er Punkten L, forholder sig til den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Polygon HOEPFRGS og hvis Top er den Punkt N. Derfore forholder sig Keglen

AL

AL til det Solidum X, ligesom den Pyramide, hvis Grund-Plan Tab. 4. er den Polygon DTAYBQCV og hvis Top er Punkten L, forholder sig til den Pyramide, hvis Grund-Plan er Polygonen HOEPFRGS og hvis Top er Punkten N. Men nu er Keglen AL større end Pyramiden, som er i den, og derfore (14. 5) er ogsaa det Solidum X større end Pyramiden, som er i Keglen EN. Men samme Solidum X er ogsaa mindre end denne sidst bemeldte Pyramide (som tilforn blev beviist), hvilket er u-rimeligt. Følgelig kand Cirklen ABCD ikke forholde sig til Cirklen EFGH, som Keglen AL til et Solidum, som er større end Keglen EN. Paa samme Maade kand bevises, at Cirklen EFGH kand ikke forholde sig til Cirklen ABCD som Keglen EN til et Solidum som er mindre end Keglen AL. Jeg siger fremdeeles, at Cirklen ABCD ikke forholder sig til Cirklen EFGH, som Keglen AL til et Solidum, som er større end Keglen EN. Thi hvis saadant kand være muligt, saa lad Cirklen ABCD forholde sig til Cirklen EFGH som Keglen AL til et Solidum Z, Fig. 26. som er større end Keglen EN; saa skal ogsaa (ved Omvending Cor. 4. 5) Cirklen EFGH forholde sig til Cirklen ABCD, som det Solidum Z forholder sig til Keglen AL: Og efterdi det Solidum Z er større end Keglen EN, saa (14. 5) skal det Solidum Z forholde sig til Keglen AL, som Keglen EN forholder sig til et Solidum, som er mindre end Keglen AL. Derfore (11. 5) skal Cirklen EFGH forholde sig til Cirklen ABCD som Keglen EN til et Solidum, som er mindre end Keglen AL, hvilket er u-muligt (efter det, som tilforn blev beviist). Følgelig kand Cirklen ABCD ikke forholde sig til Cirklen EFGH som Keglen AL til et Solidum som er større end Keglen EN. Da nu ogsaa tilforn blev beviist, at Cirklen ABCD kand ikke forholde sig til Cirklen EFGH, som Keglen AL til et Solidum, som er mindre end Keglen EN; saa er det klart, at ligesom Cirklen ABCD forholder sig til Cirklen EFGH, saa forholder sig Keglen AL til Keglen EN. Hvilket (1) var at bevise.

(2) Og eftersom den ene Kegle forholder sig til den anden, som den ene Cylinder til den anden (15. 5), thi Keglerne ere

(10.

Tab.5. (10. 12) tredie Deele af Cylindrene; saa er det klart, at ligesom Cirklen ABCD forholder sig til Cirklen EFGH, saa forholder sig ogsaa Cylinderen, som staaer paa Cirklen ABCD til Cylinderen, som staaer paa Cirklen EFGH, naar Cylindrene have samme Høyde. Hvilket (2) var at bevise.

Den 12 Proposition.

Theorema.

Lige skikkede Keglers og Cylindrers Forhold til hinanden er tripleret imod den Forhold, som Grund-Planernes Diametrer eller Middel-Linier have til hinanden.

Fig.1,2 Exempel. Lad der være toe ligeskikkede Kegler og toe ligeskikkde Cylindrer, som have de Cirkler ABCD, EFGH til deres Grund-Planet og lad KL og MN være deres Axler og BD, FH Grund-Planernes Diametrer: Saa siger jeg, at den Forhold, som den Kegle, der staaer paa Cirklen ABCD og har Punkten L til sin Spidse, har til den Kegle, hvis Grund-Plan er den Cirkel EFGH og hvis Spidse er Punkten N, er tripleret imod den Forhold som BD har til FH.

Demonstration. Thi lad, om mueligt er, den Forhold som Keglen ABCDL har til et Solidum X som er mindre end Keglen EFGHN, være tripleret imod den Forhold, som BD har til FH; og beskriv en Qvadrat EFGH i Cirklen EFGH. Naar nu paa samme Qvadrat opreyses en Pyramide, som har samme Høyde som Keglen; saa skal denne Pyramide være større end Halvparten af Keglen. Deel Cirkel-Buerne EF, FG, GH, HE i toe lige store Deele i Punkterne O, P, R, S og drag de rette Linier EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE; naar da paa Trianglerne EOF, FPG, GRH, HSE opreyses Pyramider af samme Høyde, som Keglen, saa skal enhver af disse Pyramider være større end Halvparten af de dertil hørende Stykker af Keglen. Følgelig dersom man deeler de øvrige Cirkel-Buer i toe lige store Deele og drager rette Linier og opreyser

ser paa Trianglerne Pyramider, som have samme Høyde som Keglen og dersom dette skeer immerfort, saa bliver der til sidst (efter det forbemelte Lemma) saadanne Stykker af Keglen tilovers, som tilsammen ere mindre end det Stykke, som Keglen EFGHN er større end det Solidum X. Lad nu de Stykker af Keglen, som staaer paa de Cirkel-Stykker EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE være af bemeldte Beskaffenhed; saa skal den øvrige Pyramide, som har Polygonen EOFPGRHS til sin Grund-Plan og hvis Top er Punkten N, være større end det Solidum X. Lad nu i Cirklen ABCD en Polygon ATBYCVDQ blive indskreven, som er af samme Skikkelse og ligedan sadt som Polygonen EOFPGRHS og lad paa Polygonen ATBYCVDQ en Pyramid blive opreyst, som har samme Høyde som Keglen ABCDL og lad LBT være en af de Triangler, som indslutte den bemeldte Pyramide ATBYCVDQ og lad NFO være en af de Triangler, som indslutte Pyramiden EOFPGRHSN og drag de rette Linier KT, MO. Efterdi nu Keglen ABCDL er lige skikket med Keglen EFGHN (efter Hyp.), saa forholder sig (24 Def. 11) BD til FH som den Axel (Axis) KL forholder sig til den Axel MN. Men som BD forholder sig til FH, saa forholder sig BK til FM (15. 5); følgelig ligesom BK forholder sig til FM, saa forholder sig KL til MN og altsaa forholder sig skifte-viis BK til KL som FM til MN. Altsaa efterdi Vinklerne BKL, FML ere rette (see Def. 18. 11) og Siderne omkring dem ere proportionale, saa (6. 6) ere Trianglerne BKL og FMN lige skikkede. Fremdeles, eftersom BK forholder sig til KT som FM til MO og Vinklen BKT er saa stor som Vinklen FMO (thi Vinklen BKT er den samme Deel af de fire rette Vinkler, som ere omkring Middel-Punkten K, som den Vinkel FMO er af de fire rette Vinkler, som ere omkring Middel-Punkten M); saa ere de Triangler BKT, FMO lige skikkede (6. 6): Og fordi BK forholder sig til KL, som FM til MN (som tilforn blev beviist) og BK er saa stor som KT og FM saa stor som MO, saa forholder sig TK til KL som OM til MN og disse Sider ere desforuden omkring lige store Vinkler TKL, Tab. 5

Tab. 5. OMN, thi disse toe Vinkler ere begge rette; følgelig ere de Triangler LKT og NMO lige skikkede. Efterdi nu Trianglerne BKL, FMN ere lige skikkede, saa forholder sig LB til BK, som NF til FM; og fordi Trianglerne BKT, FMO ere lige skikkede, saa forholder KB til BT, som MF til FO; følgelig forholder sig (ved en jevntagen Forhold 22. 5) LB til BT som NF til FO. Fremdeles eftersom Trianglerne LTK, NOM ere lige skikkede, saa forholder sig LT til TK, som NO til OM, og fordi Trianglerne KBT, OMF ere lige skikkede, saa forholder sig KT til til TB, som MO til OF. Følgelig forholder sig (22. 5) LT til TB som NO til OF. Men tilforn blev beviist, at TB forholder sig BL som OF til FN; følgelig forholder sig ved en jevn tagen Forhold (22. 5) TL til LB som ON til NF. Altsaa ere Siderne udi de toe Triangler LTB, NOF proportionale og følgelig have disse toe Triangler LTB, NOF lige store Vinkler og altsaa ere de lige skikkede med hinanden; og derfore er den Pyramide, som har den Triangel BKT til sin Grund-Plan og Punkten L til sin Spidse lige skikket med den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Triangel FMO og hvis Spidse er den Punkt N; thi disse toe Pyramider indsluttes da af lige mange og lige skikkede Planer. Følgelig (8. 12) er den Forhold, som Pyramiden BKTL har til Pyramiden FMON, tripleret imod den Forhold, som BK har FM. Dersom man drager rette Linier fra Punkterne A, Q, V, C, Y til Punkten K og ligeledes fra Punkterne E, S, R, G, P til Punkten M og paa de Triangler, som man da faaer, opreyses Pyramider, som have samme Spidser som Keglerne: Saa kand paa selv samme Maade bevises, at den Forhold, som enhver Pyramide i den ene Kegle har til enhver Pyramide i den anden Kegle, er tripleret imod den Forhold, som BK har til FM, det er, som BD har til FH. Men ligesom en af de foregaaende forholder sig til en af de efterfølgende, saa forholde sig alle de foregaaende til alle de efterfølgende (12. 5). Følgelig ligesom Pyramiden BKTL forholder sig til Pyramiden FMON, saa forholder sig den heele Pyramide, som har den Polygon ATBYCVDQ til sin Grund-Plan og hvis Spidse er Punkten L,

til

til den heele Pyramide, som har Polygonen EOFPGRHS til sin Grund-Plan og hvis Spidse er den Punkt N. Folgelig er ogsaa den Forhold, som den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Polygon ATBYCVDQ og hvis Spidse er den Punkt L, har til den Pyramide, hvis Grund-Plan er Polygonen EOFPGRHS og hvis Spidse er den Punkt N, tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Da nu den Forhold, som Keglen ABCDL har til det Solidum X, er tripleret imod den Forhold, som BD har til FH; saa forholder sig Keglen ABCDL til det Solidum X, som den Pyramide, hvis Grund-Plan er Polygonen ATBYCVDQ og hvis Spidse er den Punkt L, til den Pyramide, hvis Grund-Plan er den Polygon EOFPGRHS og hvis Spidse er Punkten N. Men nu er Keglen ABCDL større end Pyramiden ATBYCVDQL, thi den indslutter den. Derfore er ogsaa det Solidum X større end Pyramiden EOFPGRHSN. Men tilforn blev beviist, at den er ogsaa mindre, som er u-rimeligt. Folgelig kand den Forhold, som Keglen ABCDL har til et Solidum som er mindre end Keglen EFGHN, ikke være tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Paa samme Maade kand ogsaa bevises, at den Forhold, som Keglen EFGHN har til et Solidum, som er mindre end Keglen ABCDL, kand ikke være tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Tab. 5.

Jeg siger fremdeles, at den Forhold, som Keglen ABCDL har til et Solidum, som er større end Keglen EFGHN, kand ikke heller være tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Thi hvis saadant holdes for at være muelig, saa lad den Forhold, som Keglen ABCDL har til et Solidum Z, som er større end Keglen EFGHN, være tripleret imod den Forhold som BD har til FH; Fig. 4. saa er ogsaa ved Omvending (Cor. 4. 5) den Forhold som det Solidum Z har til den Kegle ABCDL, tripleret imod den Forhold, som FH har til BD. Men eftersom det Solidum Z er større end Keglen EFGHN, saa skal (14. 5) det Solidum Z forholde sig til Keglen ABCDL, som Keglen EFGHN til et Solidum, som er mindre end Keglen ABCDL, og derfore er den Forhold, som Keglen EFGHN har til et Solidum, som er mindre end Keglen ABCDL, tripleret imod den Forhold, som FH har til BD,

Tab. 5. hvilket tilforn er beviist at være u-rimeligt. Følgelig kand den Forhold, som Keglen ABCDL har til et Solidum, som er større end Keglen EFGHN, ikke være tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Da nu ogsaa tilforn blev beviist, at den Forhold, som Keglen ABCDL har til et Solidum, som er mindre end Keglen EFGHN, kand ikke heller være tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Saa er det klart at den Forhold, som Keglen ABCDL har til Keglen EFGHN, er tripleret imod den Folhold som BD har til FH. Hvilket (1) var at bevise.

2. Men nu forholder sig den ene Kegle til den anden, som den ene Cylinder til den anden (15. 5), thi naar en Cylinder og en Kegle staae begge paa en og den samme Grund-Plan og have samme Høyde, saa er Keglen (10. 12) den tredie Deel af Cylinderen og følgelig er Cylinderen tre gange saa stor som Keglen. Derfore er ogsaa den Forhold, som de lige skikkede Cylinderer, der staae paa Cirklerne ABCD og EFGH, have til hinanden, tripleret imod den Forhold, som BD har til FH. Hvilket (2) var at bevise.

Den 13 Proposition.
Theorema.

Dersom en Cylinder deeles ved en Plan, som er parallel med de imodsatte Planer: Saa skal Cylindrerne forholde sig til hinanden, som deres Axler.

Fig. 5. Exempel. Lad AD være en Cylinder og EF dens Axel og lad Cylinderen AD blive deelet ved Planen GH, som skal være parallel med de imodsatte Planer AB, CD og lad samme Plan GH overskiære Axelen EF i Punkten K: Saa siger jeg, at Cylinderen BG forholder sig til Cylinderen GD, som Axelen EK forholder sig til Axelen KF.

Demonstration. Man drager Axlen EF længere ud til begge Sider hen imod L og M og man tager deri saa mange rette Linier, som man vil, saa store som EK, saasom EN og

NI

NL og ligeledes tages paa den anden Side saa mange rette Linier, som man vil, af samme Størrelse som FK, saasom FX og XM. Siden stiller man sig for, at Planer ere dragne igiennem Punkterne L, N, X, M parallele med AB og CD og at i disse Planer udaf Punkterne L, N, X, M, som Middel-Punkter, ere beskrevne Cirkler OP, RS, TY, VQ, som ere hver i sær saa store som AB, CD, og endelig at de Cylindrer PR, RB, DT, TQ ere fuldførte. Eftersom nu de tre Axler LN, NE, EK ere lige store med hinanden, saa (11. 12) forholde sig de Cylindrer PR, RB, BG til hinanden som deres Grund-Planer og følgelig ere de Cylindrer PR, RB, BG lige store, thi deres Grund-Planer ere lige store. Efterdi nu de tre Axler LN, NE, EK ere lige store, saa vel som ogsaa de tre Cylindrer PR, RB, BG, og LN, NE, EK ere lige saa mange i Tallet som PR, RB, BG: Saa er Axelen KL lige saa mangefold af Axlen EK, som Cylinderen PG er af Cylinderen GB. Af samme Aarsag er Axlen MK lige saa mangefold af Axlen KF, som Cylinderen GQ er af Cylinderen GD; og dersom fremdeles Axlen KL, som er ogsaa Høyden af Cylinderen PG, ere lige saa stor som Axlen KM, som er Høyden af Cylinderen GQ, saa er (11. 12) Cylinderen PG ogsaa lige saa stor som Cylinderen GQ, fordi disse Cylinderer staae paa en og den samme Grund-Plan GH, og følgelig dersom Axlen KL er større end Axelen KM, saa er Cylinderen PG ogsaa større end Cylinderen GQ og dersom KL er mindre end KM, saa er PG ogsaa mindre end GQ. Derfore (5 Def. 5) forholder sig Cylinderen BG til Cylinderen GD, som Axlen EK forholder sig til Axelen KF. Hvilket var det, som skulde bevises. Tab. 5.

Den 14 Proposition.

Theorema.

Kegler og Cylindrer, som staae paa lige store Grund-Planer, forholde sig til hinanden som deres Høyder.

Tab. 5. Fig. 6,7 Exempel. Lad de Cylindrer EB, FD staae paa lige store Grund-Planer AB, CD: Saa siger jeg, at Cylinderen EB forholder sig til Cylinderen FD, som Axelen GH forholder sig til Axelen KL.

Demonstration. Drag Axelen KL ud hen til N og gior LN saa stor som GH og lad Cylinderen CM være beskreven omkring Axelen LN. Efterdi nu de Cylinderer EB, CM ere af lige Høyde, thi Axelen GH er Høyden af Cylinderen EB og Axelen LN er Høyden af den Cylinder CM, saa (11. 12) forholde de sig til hinanden, som deres Grund-Planer. Følgelig, efterdi deres Grund-Planer ere lige store, saa ere ogsaa Cylindrene EB, CM lige store. Videre er Cylinderen FM skaaren ven Planen CD parallel med de imodsatte Planer, følgelig (13 12) forholder sig Cylinderen CM til Cylinderen FD, som Axelen LN til Axelen KL. Da nu Cylinderen CM er saa stor som Cylinderen EB, og Axelen LN er saa stor som Axelen GH; saa forholder sig Cylinderen EB til Cylinderen FD, som Axelen GH til Axelen KL. Hvilket (1) var at bevise.

2. Eftersom nu (15. 5) Cylinderen EB forholder sig til Cylinderen FD, som Keglen ABG til Keglen CDK; thi Cylindrer ere tre gange saa store som Kegler (10.12): Saa forholder sig ogsaa Keglen ABG til Keglen CDK, som Axelen GH til Axelen KL. Hvilket (2) var at bevise.

Den 15 Proposition.

Theorema.

Grund-Planerne og Høyderne af lige store Kegler og Cylindrer ere reciproce proportionale; og de Kegler og Cylindrer, hvis Grund-Planer og Høyder ere reciproce proportionale, ere ligestore.

Fig. 8,9 Exempel. Lad AX, EO være lige store Cylindrer, men ABCDL, EFGHN lige store Kegler, og ABCD, EFGH deres Grund-Planer og AC, EC

EG Grund-Planernes Diametrer, og KL, MN Cylindrenes og Keglernes Axler, som ere ogsaa Cylindrenes og Keglernes Høyder: Jeg siger da, at Grund-Planerne og Høyderne af de Cylindrer AX, EO ere reciproce proportionale, det er, Grund-Planen ABCD forholder sig til Grund-Planen EFGH, som Høyden MN til Høyden KL. Tab. 5.

Demonstration. Thi Høyderne KL og MN ere enten lige store eller ikke. Dersom de ere lige store, saa forholder sig (11. 12) Cylinderen AX til Cylinderen EO, som Grund-Planen ABCD til Grund-Planen EFGH; følgelig, efterdi Cylindrerne AX og EO ere lige store, saa ere ogsaa deres Grund-Planer ABCD, EFGH lige store og derfore forholder sig Grund-Planen ABCD til Grund-Planen EFGH, som Høyden MN til Høyden KL. Men dersom Høyderne KL og MN ere ikke lige store, saa lad MN være den største af dem og giør PM saa stor som LK og lad Cylinderen EO blive skaaren igiennem Punkten P ved en Plan TYS, som ier parallel med de imodsatte Planer EFGH og RO, og lad ES være en Cylinder, som har den Cirkel EFGH til sin Grund-Plan og MP til sin Høyde. Efterdi nu Cylinderen AX er saa stor som Cylinderen EO, saa forholder sig Cylinderen AX til Cylinderen ES, som Cylinderen EO forholder sig til samme Cylinder ES (7. 5). Men nu forholder sig Cylinderen AX til Cylinderen ES, som Grund-Planen ABCD til Grund-Planen EFGH, thi de Cylinderer AX og ES have lige Høyde. Videre forholder sig Cylinderen EO til Cylinderen ES som Høyden MN til Høyden MP (13. 12); thi Cylinderen EO er skaaren ved Planen TYS parallel med de imodsatte Planer. Derfore forholder sig (11. 5) Grund-Planen ABCD til Grund-Planen EFGH, som Høyden MN forholder sig til Høyden MP. Da nu Høydtn MP er saa stor som Høyden KL, saa forholder sig Grund-Planen ABCD til Grund-Planen EFGH, som Høyden MN til Høyden KL. Altsaa ere Grund-Planerne og Høyderne af de lige store Cylindrer AX, EO, saa vel som og af de lige store Kegler ABCDL, EFGHN, reciproce proportionale. Hvilket (1) var at bevise.

(2) Lad

Tab.5 (2) Lad Grund-Planerne og Høyderne af de Cylinderer AX, EO og af de Kegler ABCDL, EFGHN være reciproce proportionale, det er, lad Grund-Planen ABCD forholde sig til Grund-Planen EFGH, som Høyden MN til Høyden KL: Saa siger jeg, at de toe Cylindrer AX, EO ere lige store med hinanden og ligeledes de toe Kegler ABCDL, EFGHN

Thi lad den forrige Construction blive her igieutagen. Efterdi da Grund-Planen ABCD forholder sig til Grund-Planen EFGH, som Høyden MN til Høyden KL, og Høyden KL er saa stor som den Høyde MP*; saa forholder sig Grund-Planen ABCD til Grund-Planen EFGH som Høyden MN til Høyden MP. Da nu (11. 12) Grund-Planen ABCD forholder sig til Grund-Planen EFGH, som Cylinderen AX til Cylinderen ES, thi disse toe Cylinderer have eens Høyde; og Høyden MN forholder sig til Høyden MP, som Cylinderen EO til Cylinderen ES: Saa forholder sig Cylinderen AX til Cylinderen ES, som Cylinderen EO til Cylinderen ES. Følgelig er Cylinderen AX saa stor som Cylinderen EO. Og efterdi disse Cylindrer ere hver i sær tre gange saa store som Keglerne ABCDL, EFGHN; saa ere ogsaa disse Kegler lige store. Hvilket (2) var at bevise.

Den 16 Proposition.

Problema.

Naar toe Cirkler ere omkring et og det samme Centrum, da at indskrive i den største af dem en Polygon, som ikke rører den mindste Cirkel og hvis Sider ere lige store med hinanden og af et lige Antal.

Fig.10. Exempel. Lad ABCD, EFGH være toe Cirkler, som ere omkring et og det samme Centrum K: Det begiæres, at indskrive i den største Cirkel ABCD en Polygon, som ikke rører den mindste Cirkel EFGH og hvis Sider

Sider ere lige store og af et lige Antal, det er, Sidernes Antal skal være Tab. 5.
et lige Tal eller et Tal, som gaaer op i 2, saasom 6, 8, 10 &c.

Construction og Demonstration. Igiennem Middel-Punkten K drages en ret Linie BD og udaf Punkten G opreyses en Perpendicular-Linie AG paa BD, og AG drages længere ud indtil C, saa skal denne Linie AC røre Cirklen (16. 3). Naar man nu deeler Cirkel-Buen BAD i toe lige store Deele i O, og Halvparten deraf igien i toe lige store Deele og dersom dette skeer immerfort, saa faaer man til sidst (efter forhen bemeldte Lemma) en Cirkel-Bue, som er mindre end Cirkel-Buen AD. Lad nu denne Cirkel-Bue være LD og drag fra Punkten L til BD en Perpendicular-Linie LM, som drages længere ud hen til N, og drag de rette Linier LD, DN. Saa er LD saa stor som DN (29. 3). Og eftersom LN er parallel med AC, og AC rører Cirklen EFGH, saa kand LN ikke røre Cirklen EFGH; følgelig kand de rette Linier LD, DN langt mindre røre bemeldte Cirkel EFGH. Altsaa dersom (1. 4) man afpasser rundt omkring i Cirklen ABCD rette Linier af samme Størrelse med LD eller DN, saa bliver derved i Cirklen ABCD indskreven en Polygon, som ikke rører den mindre Cirkel EFGH og hvis Sider ere lige store og af et lige Antal, (thi der kand afpasses lige saa mange Sider af Polygonen i den halve Cirkel BAD, som i den anden halve Cirkel BCD og følgelig er Sidernes Antal et lige Tal eller et Tal, som gaaer op i 2). Hvilket var det, som skulde giøres.

Den 17 Proposition.

Problema.

Udi den største af toe Kugler, som ere omkring et og det samme Centrum, at beskrive et Polyedrum, som ey rører den mindste Kugels Superficies eller yderste Omtrek.

Tab. 5. Fig. 11. Exempel. Lad der være toe Kugler (Sphæræ) omkring en og den samme Middel-Punkt A: Det begiæres, at man i den største af samme Kugler skal indskrive et Polyedrum, det er, et mangekanted Solidum, som ikke rører den mindste Kugles Superficies.

Construction og Demonstration. Man forestiller sig, at begge Kuglerne blive igiennemskaarne ved en Plan, som gaaer igiennem deres fælles Middel-Punkt A og lad Cirklen BCDE være Sectionen eller Giennemskaaret af den største, og Cirklen FGH Giennemskaaret af den mindste Kugle. Lad fremdeles BD og CE være toe Diametrer, som giøre rette Vinkler med hinanden og lad i den største Cirkel BCDE (16. 12) en Polygon blive indskreven, som ikke rører den mindste Cirkel FGH og hvis Sider ere lige store og af et lige Antal, og lad de rette Linier BK, KL, LM, ME, som ere i Cirkel-Buen BE, som er en Qvadrant, det er, den fierde Part af den heele Cirkel BCDE, være Sider af den bemeldte Polygon. Drag KA og træk den længere ud hen til N. Paa Planen af Cirklen BCDE og udaf Punkten A opreyses en Perpendicular-Linie AX, som møder den største Kugles Superficies i Punkten X. Lad dernæst en Plan blive dragen igiennem AX og BD, og en anden Plan igiennem AX og KN og lad de halve Cirkler BXD, KXN, som staae paa de Diametrer BD, KN, være de Giennemskaar, som de bemeldte Planer giøre i den største Kugle. Efterdi nu AX er perpendicular paa Planen af Cirklen BCDE, saa skal ogsaa (18. 11) de toe halve Cirkler BXD, KXN, som gaaer igiennem AX, være perpendicular paa Planen af Cirklen BCDE. Og fordi de halve Cirkler BED, BXD, KXN ere lige store, thi de staae paa lige store Diametrer BD og KN; saa skal ogsaa deres halve Deele nemlig de Cirkel-Buer BE, BX, KX være lige store. Lad derfore i enhver af de Cirkel-Buer BX og KX blive afpassede (1. 4) rette Linier BO, OP, PR, RX, KS, ST, TY, YX, som ere lige saa store og lige saa mange i Tallet, som de rette Linier BK, KL, LM, ME, som ere i Cirkel

Buen

Buen BE; og drag de rette Linier SO, TP, YR og lad Perpendicular-Linier blive dragne fra de Punkter O, S til Planen af Cirklen BCDE; saa skal (38. 11) disse Perpendicular-Linier falde paa Skiærings-Linierne BD og KN, thi de halve Cirkler BXD, KXN ere perpendicular paa Planen af Cirklen BCDE. Lad da disse Perpendicular-Linier være OV og SQ og drag VQ. Efterdi nu udi de lige store halve Cirkler BXD, KXN ere tagne lige store Cirkel-Buer BO og KS, og OV, SQ ere Perpendicular-Linier, saa er OV saa stor som SQ og BV saa stor som KQ. Men nu er den heele Linie BA saa stor som den heele KA, følgelig er den øvrige VA saa stor som den øvrige QA. Derfore forholder sig BV til VA som KQ til QA og følgelig (2. 6) er VQ parallel med BQ. Og eftersom OV og SQ ere begge perpendiculare til Planen af Cirklen BCDE, saa (6. 11) er OV parallel med SQ; da nu OV ogsaa er saa stor som SQ, saa ere (33. 1) QV, SO ogsaa lige store og parallele med hinanden; og fordi QV er parallel baade med SO og KB, saa skal (9. 11) SO være parallel med KB. Følgelig, efterdi BO, KS sammenføye SO og KB, saa er den Firkant KBOS (7. 11) i en og den samme Plan. Af samme Aarsag er ogsaa enhver af de Firkanter SOPT, TPRY i en og den samme Plan og den Triangel YRX er (2. 11) ogsaa i en og den samme Plan. Derfore dersom der drages rette Linier fra Punkterne O, S, P, T, R, Y til Punkten A, saa faaer man et Polyedrum eller et mangekanted Solidum inden for de toe Cirkel-Buer BX, XK, som er sammensat af Pyramider, som have de Firkanter KBOS, SOPT, TPRY og den Triangel YRX til deres Grund-Planer og som støde sammen med deres Spidser udi Punkten A. Dersom man nu paa samme Maade, som hidindtil er skeet, beskriver rundt omkring i den heele største Kugle Firkanter og Triangler, som ere lige skikkede med de Firkanter KBOS, SOPT, TPRY og med Trianglen YRX, saa bliver derved i den største Kugle indskreven et Polyedrum Tab. 5.

 lyedrum

Tab. 5. lyedrum, som er indsluttet med de forbemeldte Firkanter og Triangler.

Jeg siger nu, at dette Polyedrum ikke rører den mindste Kugles Superficies, som Cirkklen FGH er udi. Drag fra Punkten A (11. 11) en ret Linie AZ perpendicular paa Planen af den Firkant KBOS og lad den møde samme Plan i Punkten Z og drag BZ, ZK. Drag fremdeles fra Punkten G en ret Linie GL perpendicular paa AG og drag AL. Efterdi nu AZ er perpendicular paa Planen af KBOS, saa er AZ ogsaa perpendicular paa BZ og ZK (3 Def. 11), fordi disse Linier ere dragne i den bemeldte Plan og røre AZ. Og fordi AB er saa stor som AK, saa er Qvadraten af AB saa stor som Qvadraten af AK. Men nu ere (47. 1) Qvadraterne af AZ, ZB saa store som Qvadraten af AB, fordi AZB er en ret Vinkel; og Qvadraterne af AZ, ZK ere saa store som Qvadraten af AK. Følgelig ere Qvadraterne af AZ, ZB saa store som Qvadraterne af AZ, ZK. Tag den fælles Qvadrat af AZ fra dem, saa er den øvrige Qvadrat af BZ saa stor som den øvrige Qvadrat af ZK; følgelig er den rette Linie BZ saa stor som den rette Linie ZK. Paa samme Maade kand og bevises, at de rette Linier, som drages fra Z til O og S, ere hver i sær saa store som BZ, ZK. Følgelig skal den Cirkel, som beskrives af Middel-Punkten Z udi en af de Distancer ZB, ZK, ogsaa gaae igiennem Punkterne O, S, og altsaa kand der beskrives en Cirkel omkring Firkanten BKSO (see Fig. 12). Følgelig fordi OB, BK, KS ere lige store og OS er mindre end BK, saa er BZK en stumpet Vinkel og følgelig er BK større end BZ (19. 1). Men nu er GL større end BK, følgelig er GL ogsaa større end BZ og altsaa er ogsaa Qvadraten af GL større end Qvadraten af BZ. Og eftersom AL er saa stor som AB, saa er Qvadraten af AL saa stor som Qvadraten af AB. Men nu ere (47. 1) Qvadraterne af AG, GL, tilsammen saa store som Qvadraten af AL, og Qvadraterne af BZ, ZA ere tilsammen saa store som Qvadraten af AB.

AB. Følgelig ere Qvadraterne af AG, GL tilsammen saa store som Qvadraterne af BZ, ZA; og af disse er Qvadraten af BZ mindre end Qvadraten af GL: Derfore er Qvadraten af ZA større end Qvadraten af AG og følgeligen er den rette Linie ZA større end den rette Linie AG. Da nu ZA er dragen til en af det indskrevne Polyedrums Grund-Planer, men AG til den mindste Kugles Superficies; saa er det klart, at det bemeldte Polyedrum ey rører den mindste Kugles Superficies. Altsaa er der i den største af toe Kugler, som have et og det samme Centrum, indskreven et Polyedrum, som ikke rører den mindste Kugles Superficies. Hvilket var det, som skulde giøres. Tab. 5

Corollarium.

Heraf følger da, at dersom i en anden Kugle bliver indskrevet et Polyedrum, som er lige skikket med det forskrevne Polyedrum, saa er den Forhold, som det Polyedrum i den ene Kugle har til det Polyedrum i den anden Kugle, tripleret imod den Forhold, som Kuglernes Diametrer have til hinanden. Thi eftersom disse Polyedrer ere lige skikkede, saa ere de indsluttede af lige mange og lige skikkede Planer; følgelig naar man drager rette Linier fra Kuglernes Middel-Punkter til alle Vinklerne i bemeldte Planer, saa bliver disse Polyedrer derved inddeelede i lige mange og lige skikkede Pyramider, følgelig (Cor. 8. 12) er den Forhold, som enhver Pyramide i det ene Polyedrum har til enhver Pyramide af samme Skikkelse i det andet Polyedrum, tripleret imod den Forhold, som deres Sider, der ere lige i Forhold have til hinanden, det er, som Kuglernes Diametrer have til hinanden, som for Exempel, den Forhold som den Pyramide, der har den Firkant KBOS til sin Grund-Plan og Punkten A til sin Spidse, har til en Pyramide af samme Skikkelse i det andet Polyedrum, er tripleret imod den Forhold som AB, der er dragen fra Kuglens Middel-Punkt A, har til en Linie som er

Tab. 5. dragen fra den anden Kugles Middelpunkt, eller som den ene Kugles Diameter DB har til den anden Kugles Diameter. Folgelig (12. 5) er ogsaa den Forhold, som alle Pyramider i det ene Polyedrum har til alle Pyramider i det andet Polyedrum, det er, som det ene heele Polyedrum har til det andet heele Polyedrum, tripleret imod den Forhold, som den ene Kugles Diameter har til den anden Kugles Diameter.

Den 18 Proposition.

Theorema.

Kuglers Forhold til hinanden er tripleret imod den Forhold, som deres Diametrer have til hinanden.

Fig. 13. 14. Exempel. Lad ABC, DEF betegne toe Kugler og lad BC og EF være Kuglernes Diametrer: Saa siger jeg, at den Forhold, som Kuglen ABC har til Kuglen DEF, er tripleret imod den Forhold, som BC har til EF.

Demonstration. Lad, om muligt er, den Forhold, som Kuglen ABC har til en anden Kugle GHK, som er mindre end Kuglen DEF, være tripleret imod den Forhold, som BC har til EF, og lad Kuglen DEF være beskrevet omkring Kuglen GHK. I den største Kugle DEF beskrives da (17. 12) et Polyedrum, som ikke rører den mindste Kugles GHK Superficies. I Kuglen ABC beskrives ligeledes et Polyedrum af samme Skikkelse med det førsthemeldte. Saa er den Forhold som det Polyedrum, der er indskreven i Kuglen ABC, har til det Polyedrum, der er indskreven i Kuglen DEF, tripleret imod den Forhold, som BC har til EF (Cor. 17. 12). Da nu ogsaa den Forhold, som Kuglen ABC har til Kuglen GHK, er tripleret imod den Forhold, som BC har til EF; saa forholder sig Kuglen ABC til Kuglen GHK, som det Polyedrum, der er indskreven i Kuglen ABC til det Polyedrum, der er indskrevet

i Kui Kuglen DEF. Da nu Kuglen ABC er større end det Polyedrum, der er beskreven i den, saa er ogsaa Kuglen GHK større end det Polyedrum, der er indskrevet i Kuglen DEF, hvilket er u-rimeligt, thi den indsluttes af den. Følgelig kand den Forhold, som Kuglen ABC har til en Kugle som er mindre end Kuglen DEF, ikke være tripleret imod den forhold, som BC har til EF. Paa samme Maade bevises ogsaa, at den Forhold, som Kuglen DEF har til en Kugle, som er mindre end Kuglen ABC, kand ikke være tripleret imod den Forhold, som EF har til BC. Jeg siger fremdeles, at den Forhold, som Kuglen ABC har til en Kugle som er større end Kuglen DEF, kand ikke heller være tripleret imod den Forhold, som BC har til EF; thi dersom saadant holdes for at være mueligt, saa lad den Forhold som Kuglen ABC har til en Kugle LMN, som er større end Kuglen DEF, være tripleret imod den Forhold, som BC har til EF: Saa er ogsaa ved Omvending (Cor 4. 5) den Forhold som Kuglen LMN har til Kuglen ABC, tripleret imod den Forhold, som EF har til BC. Men nu forholder sig Kuglen LMN til Kuglen ABC, som Kuglen DEF til en Kugle, som er mindre end Kuglen ABC (14. 5), thi Kuglen LMN er større end Kuglen DEF. Derfore er den Forhold, som Kuglen DEF har til en Kugle, som er mindre end Kuglen ABC, tripleret imod den Forhold, som EF har til BC, hvilket man forhen har beviist at være u-mueligt; derfore kand da den Forhold, som Kuglen ABC har til en Kugle, der er større end Kuglen DEF, ikke være tripleret imod den Forhold, som BC har til EF. Da nu ogsaa tilforn blev beviist, at den Forhold, som Kuglen ABC har til en Kugle, der er mindre end Kuglen DEF, er ikke tripleret imod den Forhold, som BC har til EF: Saa er det klart, at den Forhold, som Kuglen ABC har til Kuglen DEF er tripleret imod den Forhold, som BC har til EF. Hvilket var det, som skulde bevises.

Tab. 5. Fig. 15.

Tab. 1.

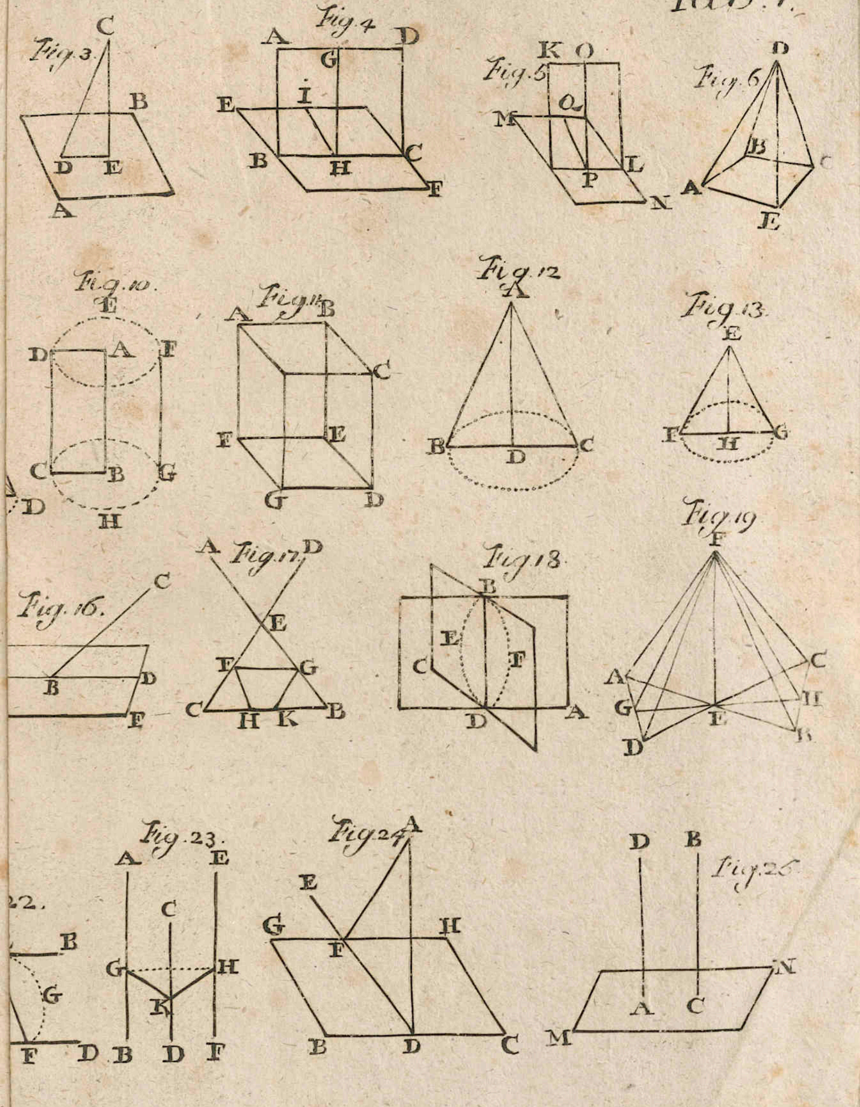
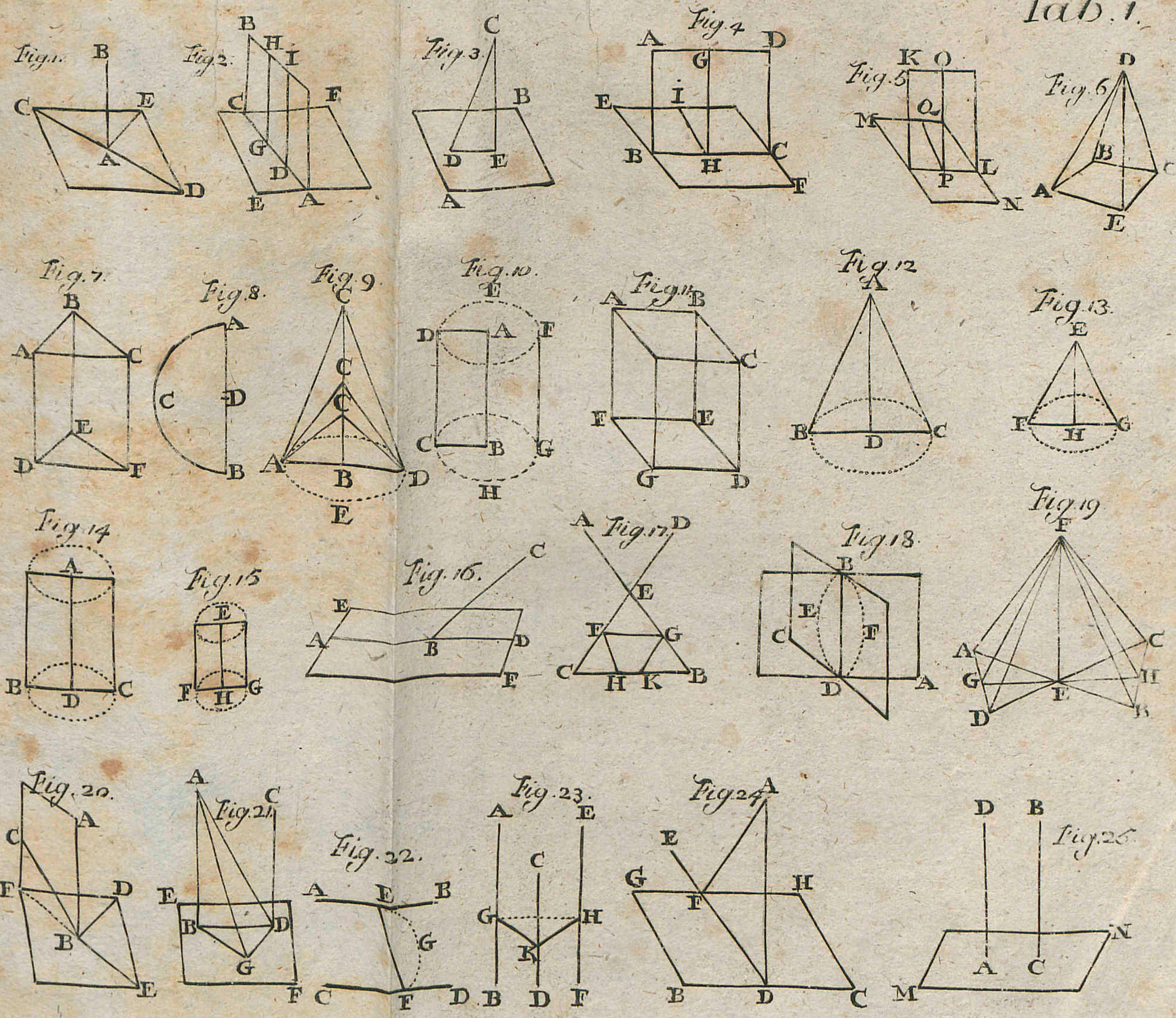


Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 16.
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
22.
Fig. 23.
Fig. 24
Fig. 25

Tab. 1.



Tab. 2.

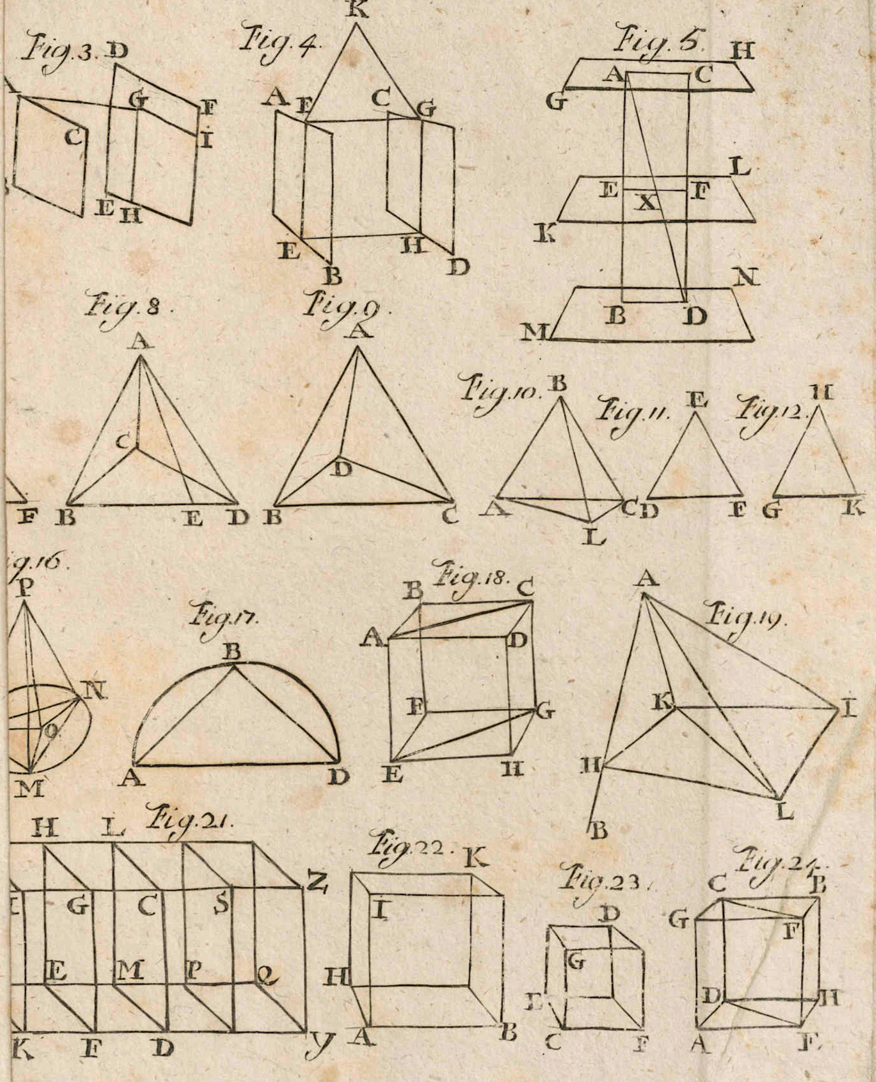


Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.

Tab. 2.

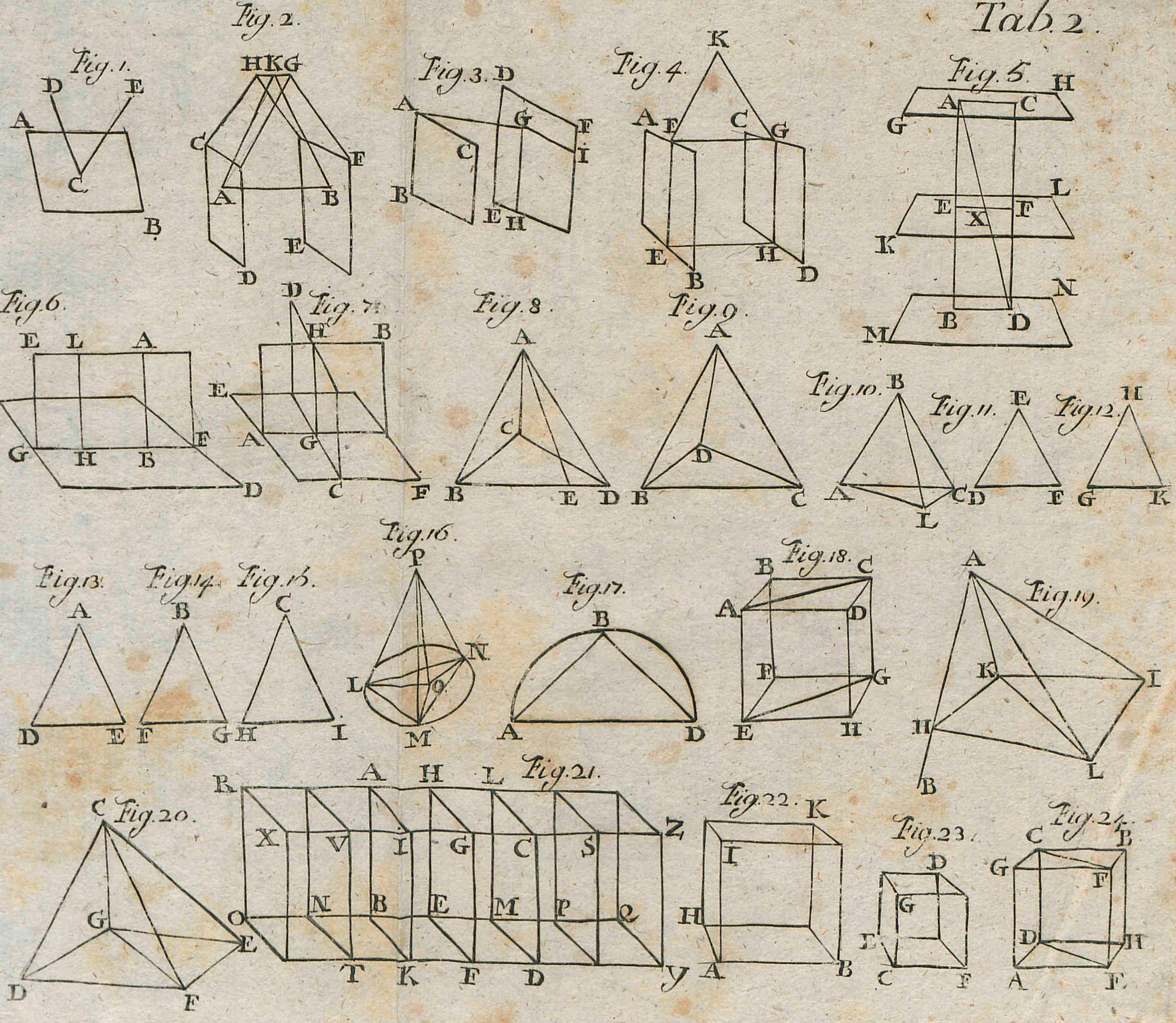


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.

Tab. 3.

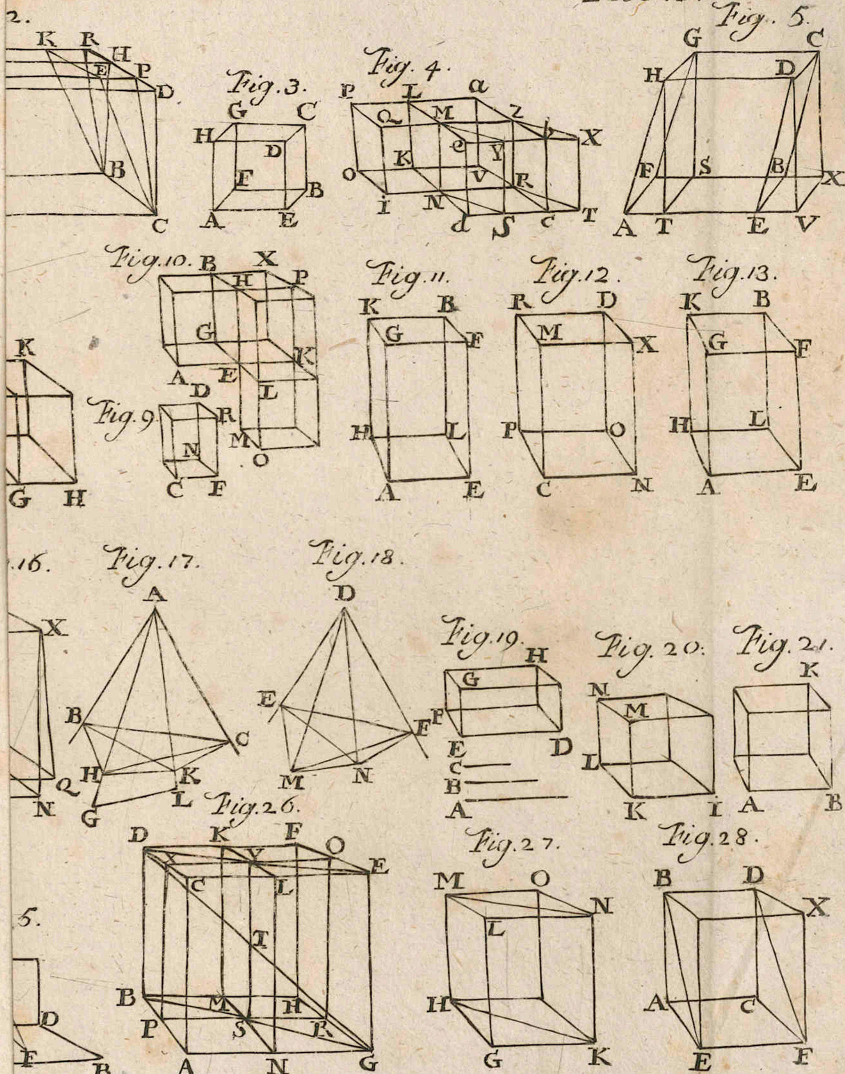


Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

Tab. 3.

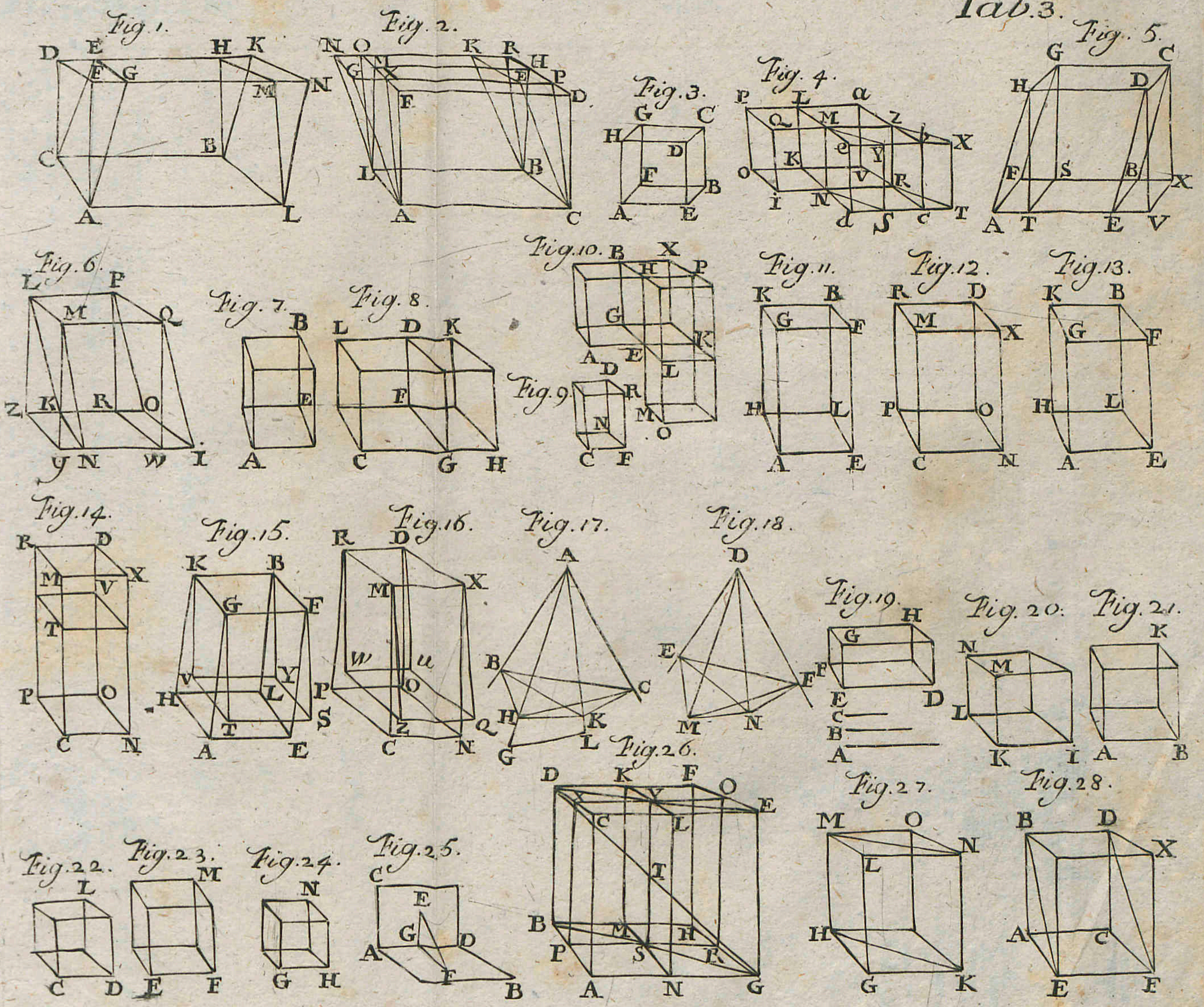


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

Tab. 4

Fig. 3.

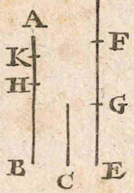


Fig. 4.

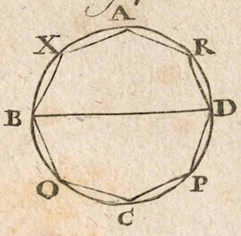


Fig. 5.

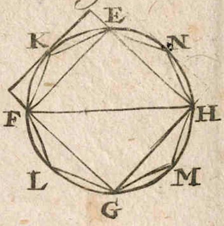


Fig. 6.

Fig. 10.

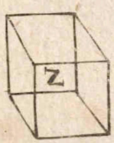


Fig. 11.

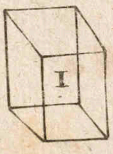


Fig. 12.

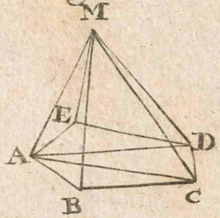
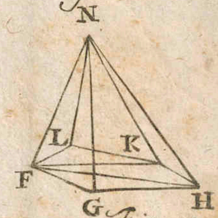


Fig. 13.



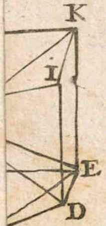


Fig. 16.

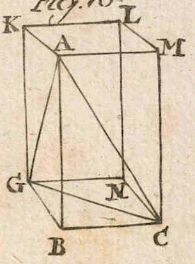


Fig. 17.

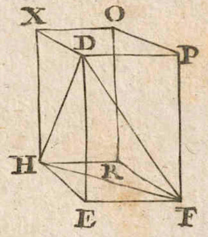


Fig. 18.

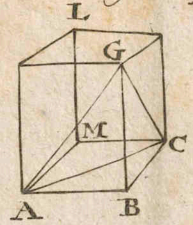


Fig. 19.

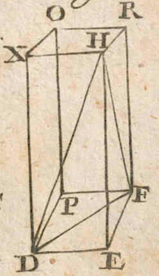


Fig. 22.

Fig. 23.

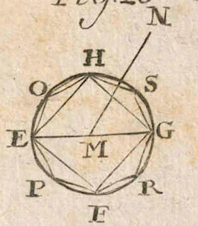


Fig. 24.

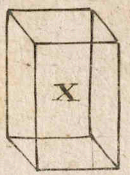


Fig. 25.

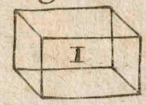
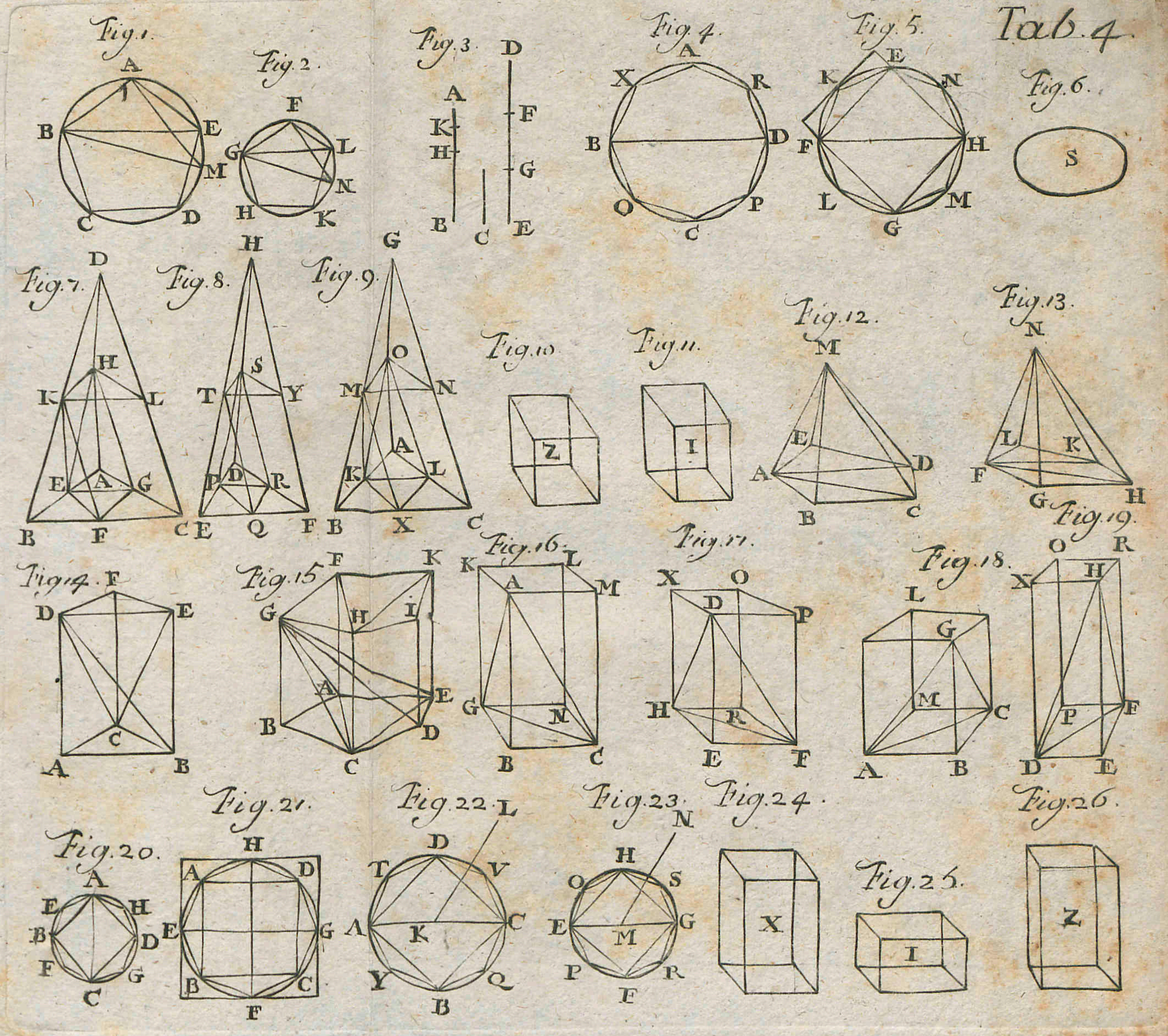


Fig. 26.


Tab. 4
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

Tab 5

Fig. 5.

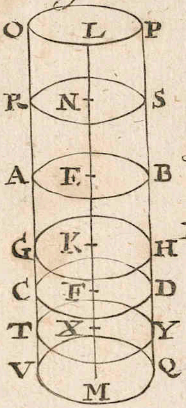


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

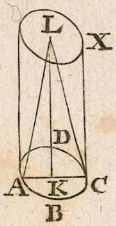


Fig. 9.

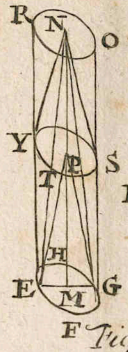
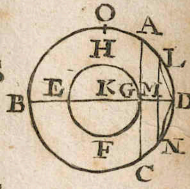


Fig. 10.



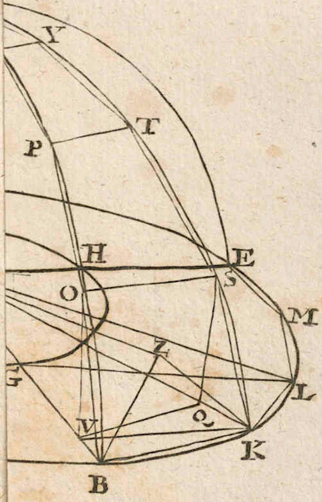


Fig. 12.

Fig. 13.

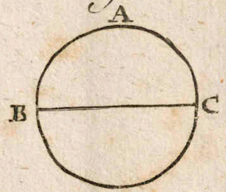


Fig. 14.

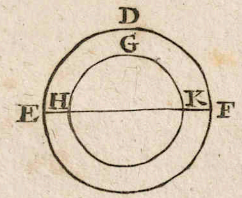
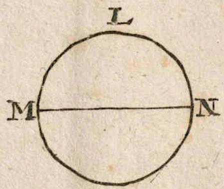


Fig. 15.



Tab 5

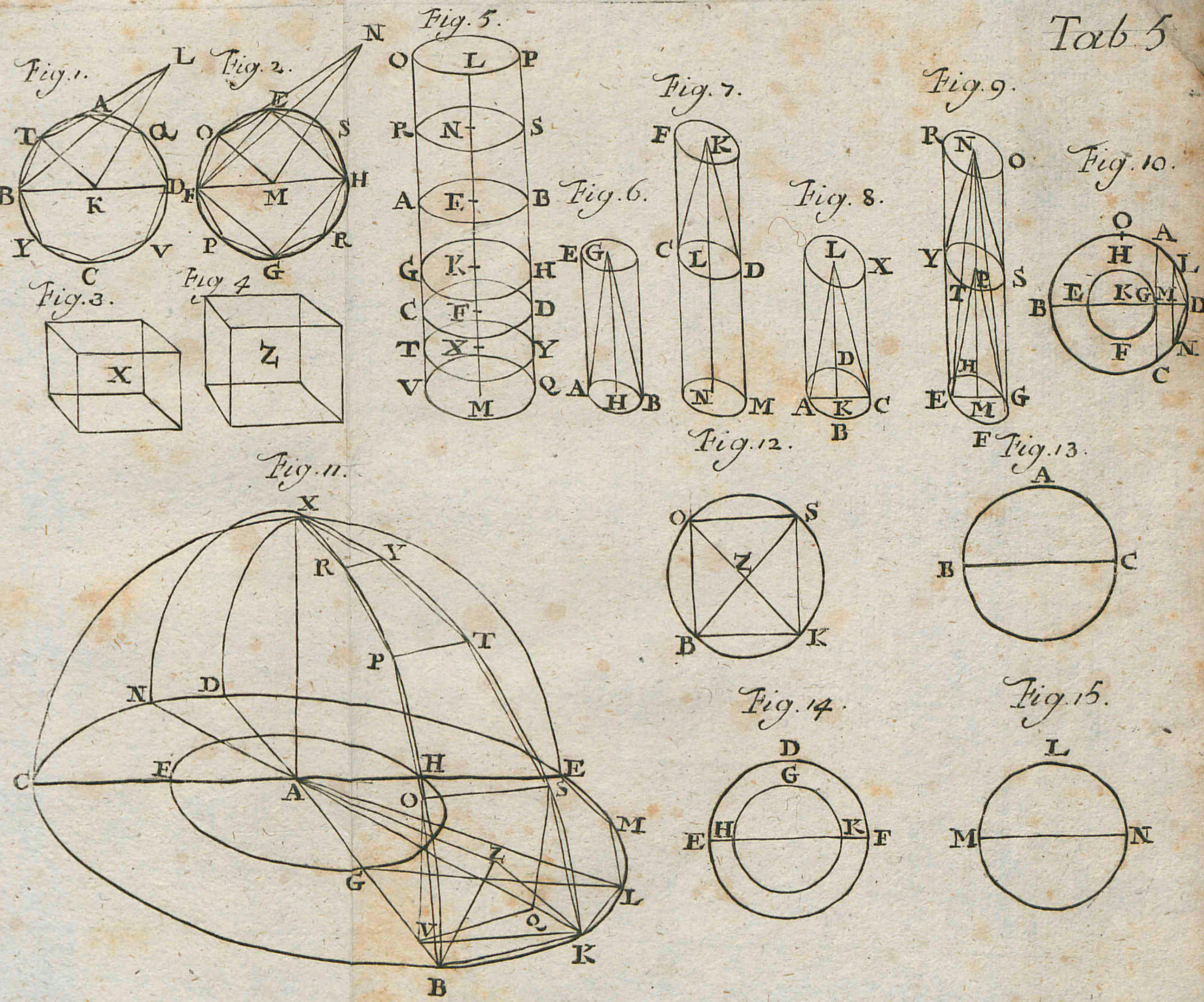


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.