

Digitaliseret af | Digitised by



Forfatter(e) | Author(s):

Titel | Title:

Kraft, Jens.

Forelæsninger over Mekanik med hosføjede
Tillæg.

Udgivet år og sted | Publication time and place: Sorø : trykt hos Jonas Lindgren, 1763

Fysiske størrelse | Physical extent:

[28], 659 s., 14 tav.

DK

Materialet er fri af ophavsret. Du kan kopiere, ændre, distribuere eller fremføre værket, også til kommercielle formål, uden at bede om tilladelse. Husk altid at kreditere ophavsmanden.

UK

The work is free of copyright. You can copy, change, distribute or present the work, even for commercial purposes, without asking for permission. Always remember to credit the author.



DET KONGELIGE BIBLIOTEK



130021447601

18. - 335. - 40

Revised Catalogue

1871

of the

Library of the

University of

Cambridge

Printed by

W. Deighton & Sons, 15, Abchurch Lane, London, E.C. 4.

1871

Price 1s. 6d.

Forelæsninger

over

Seftanik

med Høfvoiede

Zillæg.

Efter

Kongelig Allernaadigst Befalning
ved Trykken meddeelte

af

Jens Kraft

Justits-Raad og Professor ubi Mathematick ved Ridder-Akademiet.

Copenhæ, 1763.

Trykt hos Jonas Lindgren, det Ridderlige
Akademies Bogtrykker.



Eil

R o n g e n.

Einleitung
Zur Geschichte
des Reichs

Die Geschichte des Reichs ist eine
sehr wichtige und interessante
Materie, die wir hier kurz
skizzieren wollen. Die Geschichte
des Reichs ist eine sehr wichtige
und interessante Materie, die wir
hier kurz skizzieren wollen.

Stormægtigste,
Allernaadigste
Arve-Herre og Konge!

Deres Kongelige Majestæts allernaadigste
Befalning, i allerunderdanigst Følge af hvilken
dette Bærf er blevet sammenskrevet, anseer jeg med
Føie, som en allernaadigst Tilladelse, at jeg ved dets
Udfærdigelse og endelige Slutning allerunderdanigst
tør nedlægge det ved Deres Majestæts Fodder.
Deres

Deres Majestæts Befalning er Marsagen til dets
Begyndelse, Deres Høi-Kongelig Gæmildhed til
dets Fremgang. Kan jeg deraf gjøre mig andet, end
det allerunderdanigste Haab, at Deres Majestæt
med naadige Dine vil ansee et Arbeid, paa hvilket
hverken Flid eller Møie er blevet spart, for, saa snart
som mueligt og uden Ophold, at efterkomme Deres
Allernaadigste Befalning.

Hvor meget Deres Majestæt er Fædrene-Lan-
dets sande Fader, vidne og bevise utallige Stiftelser,
Raader og Gæmildheder, som have givet alt i alle
Stænder et nyt Liv, og hvorved, i at sørge for det
nærværende, paa mange Raader Planen er tillige
blevet lagt, endog til de sildige Efterkommeres Lykka-
lighed. Himmelen selv synes udi alle disse store Foreta-
gender øiensynlig at have raft Deres Majestæt
Haanden, i at have kronet DEM med Titel af ufor-
færdet Helt og med de Ere-rigeste Laurbær-Krantse
midt i den ønskeligste og mest blomstrende Fred. Midt
iblant

iblant saa mange store Sceptrets Bemøielser og uafsladelige Sorger for det almindelige Beste, have Videnskaberne havt deres lykkelige Dieblif, som Thronen haver værdiget dem. De ere bestandig blevne anseete af Deres Majestæt for det de virkelig ere, for Livet og Sielen i alle menneskelige Indretninger, for Menneskets sande og store Rigdom. De ere derfor og af Deres Majestæt blevne understøttede med særdeles Naade og Nidkierhed. For en Herre, der tænker saa hoit og saa vel, haver det ikke været nok alene at have havt sinæs Lyksalighed i Sigte, den af det hele menneskelige Kion, som ved Forstandens Oplysning befordres, haver tillige været Deres Majestæts Diemeed. Deres Majestæts Værestøtte bør derfor og i Erindringens og Videnskabernes uforgiængelige Tempel til evigt Vreminde blive helliget Efterkommerne, som endnu efter utallige Tider skulle vide at fortælle, hvad **Fride-**
rich den Femte var Wiis, Naadig og Stor.
Denne

Denne er de Store Kongers Løn, at være inderlig
elsket i Tiden, og at blive med en dyb Høiagtelse
omtalte af Eftertiden. Jeg forbliver

Stormægtigste,
Allernaadigste
Arve-Herre og Konge!
Deres Kongel. Majestæts

allerunderdanigste
Arve-Undersaat og Tiener
Jens Kraft.

Fortale.

Det er saa almindelig bekiendt, og en af alle saa antagen Sandhed, at de mathematiske Videnskaber iblant de øvrige menneskelige ere nogle med af de nyttigste og mest fornødne; saa det ikke behøves, derom at handle udførlig. Jeg vil desangaaende derfor ikke tale uden kortelig, for alene i saa Ord at vise Mathematikens Fortieneste af Mennesket, betragtet som Borger, betragtet som fornuftigt.

Nytten i det Borgerlige falder strax i Øinene. Hvo veed ikke, at en Stats Forsvar beroer paa en Mængde Indretninger, som ingen kan udføre eller ioversætte, uden ved Geometriens Hielp? Ligesaa lidet er man uvidende om Maskin-Væsenets Nytte. Der behøvedes vel intet andet til at bringe en heel Stat i Uorden

Fortale.

og et heelt Folk i Forvirring, end om man endog for en ganske kort Tid skulde tabe Brugen af de nødvendigste Maskiner. Hvad Mængde Arme hvile ikke i vor Tid eller bruges til andet, imidlertid at vi overlade Vind og Vand de Forretninger, som kostede vore Forfædres deres egne Kræfter og en ubeskrivelig Møle?

Ei alene det Nødvendige, men endog det Magelige og Behagelige i Livet behøver i utallige Henseender Mathematikens Hielp. Vore Bygninger ere iblant andet derpaa et siensynligt Beviis, skient Architekturen dog aldrig bliver uden en med af de mindst betydelige Videnskaber, hvoraf Geometrien haver gjort Menneſket Foræring: Med mindre at man under Navn af Architektur tilligemed vil forstaae Berg- og Vandverkernes Anlegning. Architektur, taget i en saa vidtseftig Mening, udfordrer en anseelig mathematisk Kundskab.

Alle Konſter, og fast alle Haandverker, laane enten til stor, eller til nogen Deel det af Mathematik, som de behøve til deres Fuldkommenhed og Drift. Land-Maalningen, Seiladsen med Søe- og Land Korterne ere heel igiennem Mathematikens Arbeid. Saas fremt man derfor i en Stat ikke nok skionnede paa Mathematikens Nytte og store Fortieneste af det Almindelige, da kan intet andet deri være Aarsag, end den sædvanlige menneſkelige Efterladenhed i at tænke, som alene elsker at nyde Fordelene, uden at belynre sig om eller at sætte Pris paa de Kilder, udaf hvilke de flyde.

Fortale.

For at giere Brug af Mathematiken i det Borgerlige, eller for at forstaae den saa kaldte anvendte eller applicerte Mathematik, maa man nødvendig først have lært den theoretiske, hvilken sidste bestaaer af Geometrie og Algebra. Den første er en af de mindste, men paa alle Fundamenters Maade den betydeligste af alle mathematiske Videnskaber. Den handler ikke uden om rette Linier og Cirkel-Linien, hvis Egenskaber i den og anvendes til Begemernes Udregning. Den kan derfor med Føie ansees som Mathematikens A, B, C, og man bruger ikke lang Tid, for at giere sig disse første Grunde bekendte, skjønt den menneskelige Forstand haver behøvet hele Aar-Hundrede, for at udvikle dem. Saa indskrenket som Geometrien er, saa uomskrenket er Algebren. Alt maaletigt henhører under dens Metoder, og man siger ikke for meget, naar man kalder den de nyere Tiders Vre, Nøglen til de store geometriske Opdagelser, og den Ariadneiske Traad, hvilken lettere end al andet kan hielpe ud af det store og forvirklede Undersøgningernes-Labyrinth. De bedrage sig derfor meget, som troe, at til at være Geometer, intet andet udfordres, end den egentlig saa kaldte Geometrie og Bogstav-Regning i Algebra, tilligemed de levende Sætninger af den applicerte Mathematik. Intet andet kan være denne Videnskabs Tilværelse og Fremgang meer hinderligt end denne Tanke. Derved alene at blive Geometer, er at blive det med ringe Betsøining, og man tør ikke vente, at Mathematiken vil giere stor Fremgang i et Land, saa længe som man ikke gjør Forskiel imellem Videnskabens første Elementer og Videnskaben selv. Desuagtet vil jeg ikke, ved at sige, at Algebren og dens Anvendelse langs

Fortale.

hen efter i Mathematiken er et betydeligt og besværligt Arbeid, be-
styrke den Tanke, som synes at have rodfæstet sig hos mange, at
nemlig denne Videnskab er saa tung, som om man for at give sig
af med den maatte have tabt Lysten til det Angenemme udi Livet.
Algebren er langt fra ikke saa farlig, sient den paa andre vanske-
lige Videnskabers og Konsters Maade udfordrer Arbeid og Meie,
Naturel, Flid og Skarpsindighed. Langt fra at kunde kalde den
det Tungeste af Mathematiken, her man vide, at den bestaaer af
en Mængde, i Sammenligning med de Synthetiske, lette Metho-
der, hvorved man undgaaer en anseelig Meie, som man maatte
underkaste sig, om man fulgte disse sidste; ikke at tale om, at man
gier ved de analytiske Oplesninger en Mængde Undersegninger muel-
lige, som det maaskee blev plat umueligt at finde og at komme af-
sted med ved de synthetiske alene.

Geometrie og Algebra ere saaledes heist-nødvendige, deels for
at sætte de Videnskaber, som nytte i det Borgerlige, i Udøvelse,
deels og for at bringe dem immerfort til en større Fuldkommenhed,
end den kan være, hvilken de allerede virkelig have. Men ere de,
saavel som de øvrige Matematikens Dele, om ikke plat umistelige,
dog i hei Grad nyttige for Mennesket, ikke meer betragtet som
Borger, men som fornødt? Skierpe de virkelig Forstanden?
Give de den et nyt Lys? Man maa vel agte, at naar jeg dertil
siger Ja! jeg da derved langt fra ikke paastaer, enten at der jo
kunne findes, og findes virkelig, hyperlige og af Naturen opvakte
Genier, som uden al Hjelp af Geometrie ere dannede til at handle

Fortæle.

og tænke paa en meget fuldkommen Maade; og endnu meget mindre, at den, som enten af Naturen er uheldig dannet, eller ved Omstændighederne blevet for derved, med et Ord, at det, som i sig er middelmaadigt og flet, ved Geometrien alene skulde kunde blive noget uligneligt og stort. Det, som her spørges om, bliver alene: Om ikke de i sig store Genier ved Mathematikens Hielp kunde blive bragte til at overgaae sig selv, og de maadelige derimod ligeledes kunde komme til at stige en Grad høiere? Dette, mener jeg, kan sikker bekræftes. Alt hvad der beforder det Lydelige i Forstanden, i sær om det tvinger den til, deri at faae en Bane, maa unegtelig kunde forhoie den. Men Lydelighed og Orden i Tankerne ere Sielen i Mathematik. Ikke det alene. De største Genier have gierne den Feil tilfelles med de smaae, at de troe ofte af Bane og Overilelse, af løse Beretninger, af Ydelse og Had, uden at være nok i Stand til at stille det Meente fra det Sande. Sandheds rette Undersøgning, i sær i praktiske Tilfælde, er Menneskets almindelige Usteds-Steen, og den sædvanlige Klippe, hvorpaa vi alle saa tidt lide Skibbrud. Jeg tør ikke sige, at den Duellighed, som Mathematiken indplanter Forstanden, aldeles kan forekomme dette store Onde, men jeg troer, at den anseelig kan forringe det, da den i og af sin Natur er usikre og indbildte Meningers Sæbe og Riis i alt det, som falder inden for dens Værelse, og meer end alle andre Videnskaber viser os Veien, som maa følges i Henseende til det, som falder uden for dem. Men kan den skaffe Forstanden Færdighed og Bane i at tænke med Orden, og at indsee Sandhedernes sande Sammenhæng. Kan den skaffe Forstanden en Færdighed

Fortale.

dighed i at affkaffe forudsatte Meninger; denne Menneſkets ſande Beſt og de Formuſtiges Banære: Skulde den da ikke og kunde anſees ſom almindelig nyttig, og ſom ſaſt nødvendig for Menneſket; hvad heller at dette var et i ſig ſtort Genie eller lidet.

Ved alt dette bliver diſſe Vidensſkabers Fortieneste af det fornuſtige Menneſke endnu langt fra ikke ſtaaende. Gaaer man tilbage til Forfædrenes ældgamle Tider, og underſøger, hvad der har været Aarſag i den utallige Mængde falſke Meeninger, ſom i den Tid havde overſømmet Verden, da kan der ingen Tvivl være paa, at denne ikke haver været nogen anden end en falſk Forklaring af Naturen. Soel, Maane og Stierner bleve Guder, fordi man ei kiendte Tingenes Væb. Alle falſke Religioner ſpirede ud af denne Plante-Skole. Man meente ſig at ſee overalt onde og gode Aander i Naturen, fordi man fandt den i alle ſine Dele virkſom. Uvidenheden gjorde Menneſket urimeligt nok til at tilbede de foragteligſte Inſekter, ſom de traadde paa, og de Urter, de aade. Men hvad haver heri hiulpet Menneſket til Kette igien, ſer ſaa vidt ſom Formuſtens Dannelſe i deſlige Ting kan have Sted? Intet andet, end den fornuſtige og uimodſigelige Forklaring af Naturen, ſom baade ſerſt og ſidſt haver været, ligesom den endnu er og altid bliver Mathematikkens immervarende Arbeid. Man kan ſige, at den ſaa meget, ſom Formuſten kan giere det, haver kuldkæſtet de falſke Guders Throner ved at give Naturen igien, hvad der ſaa uimodſigelig var dens. Derved aabnede den Døren for alle ſtore og høie Tanſker. Denne Mathematikkens Fortieneste af Menneſket bliver

Fortale.

bliver der sedvanlig ikke lagt saa meget Mærke til, som det sig burde, naagtet at den i sig er den allerstørste og allerædelste.

Det er af denne sidste Aarsag, at man sedvanlig ikke sætter saa stor Priis paa Astronomien, som man burde og skulde. Denne Videnskab haver unegtelig sin meget store Fortieneste af det Borgerlige. Navigationens sidste Guldkommenhed beroer paa den. Borets Kundskab om Tiden, denne saa høit nødvendige Indretning i det Borgerlige, beroer, saa at sige, ikke uden paa nogle saa astronomiske Jagttagelser. Bevise det ikke, hvor høit man bør agte Nøsten? Men Astronomiens Nytte for Mennesket, som Borger, maa være saa stor, som den være vil, dens Fortieneste af Mennesket, som fornuftigt, bliver altid større. Ingen anden Videnskab viser os klarere Tingenes store Herre og Mester. Tanken om Verden, saaledes som Astronomien lærer os den, er noget med af det Lykkeligste og Største i Menneskets Kundskab. Hvor meget seile da ikke de, som holde Astronomien for en simpel Nysgierighed, og tale om dens Opdagelser, som om Folkene i Maanen, fordi de kiende lige meget til begge?

Jeg tør derfor sige, at saasnart som man vilde indføre iblant Mennesket et almindeligt Barbarie igjen, kunde dertil intet bedre Middel foreslaaes, end at bringe, hvad man kalder Mathematik, ud i Forglemmelse. Alt vilde da snart leve ud paa: Jeg mener; Jeg holder for. Og naar ingen meer kunde bevise, kom det endelig an paa, hvad Mening det fik størst Partie. Historien viser,

at

Fortale.

at det Urimeligste haver gemeenslig, naar Tingene stod paa denne Fod, ført det fornuftigste i Triumph. Saa det saaledes vel baade er og bliver unegteligt, at Nødvendigheden af Mathematiken er i det Mennefskelige overmaade stor.

Det allerede sagte giver mig Anledning til at tale om Mathematiken, for saa vidt den læres paa Akademier. At den Eærd, som paa dem gives, er nyttig for Mennefsket, betragtet som fornuftigt, mener jeg, er i det foregaaende meer end nok blevet beviist. Men man kan med en Slags Feie spørge, om de akademiske Theorier og ere ligesaa i det Borgerlige og Praktiske. De, som demme Personer af det, de give sig ud for, ville vel neppe troe det. For dem er det nødvendigt, at den, som skal anses for duelig i Praktisk, skal kalde sig Praktikus. For de fleste Mennefsker behøves ikke stort andet end Titlen, for i deres Tanke at være alt. De, som tænke bedre, ville derimod let finde, at Udvælsen ikke kan gaae videre end Kundskaben; og denne sidste er intet andet end det, som man paa Akademierne kalder Theorie. En Person, som forener med Theorien den Færdighed i at sætte den i Værk, som en lang Øvelse giver, fortjener først det Navn af duelig Praktikus. Et Navn, som tilforladelig er stor Heiagtelse værd. Alle andre arbeide i blinde, hvad der lykkes, lykkes; hvad der vanslykkes, gaaer galt. Til Lykke arbeides der de fleste Tider for Personer, som troe, at Sagen ei kunde gieres bedre, saa man kalder umueligt, hvad der ikke er uden Uvidenhed, og naar noget lykkes til Deels, anses det som magelest og uden Bøje. Dette er en Slags uheldig

Fortale.

uheldig Skiebne, som Mangel af Kundskab haver fast overalt be-
byrdet det Menneskelige med. Men for at komme nærmere til
Sagen, kan videre spørges, om ved Theorien meer er at udrette,
end ved det, man kalder Praktik? Man kan dertil paa en vis
Maade svare baade Nei! og Ja! Naar Praktik udføres som en
Følge af Theorien, saaledes som den bør; da bliver ved Theorien
ikke meget meer at gjøre end ved den, af Marsag; at, saasnart som
noget Nyt ved de theoretiske Undersøgninger findes, bliver det strax
til Nytte i Brugen meddeelt udi lette Regler, hvilke man siden føl-
ger, uden ofte at vide hvorfor? Derimod, da Theorien idelig gaar
videre og videre, skient Anledningerne dertil meget ofte gives saa
vel af heldige som uheldige praktiske Forsøg, saa er intet vissere,
end at de borgerlige Indretningers Fuldkommenhed alt meer og
meer iværksættes ved de theoretiske Undersøgninger af Sandhedernes
almindelige Sammenhæng, imidlertid at Praktiken immer bliver
staaende ved det den veed, uden at kunde selv udvide de Grenser,
inden for hvilke den allerede staaer.

Desuagtet var det høist urimeligt, om nogen vilde troe, at
man i Mathematik havde, i Henseende til det Borgerlige, bragt det
saa vidt, at intet bedre kunde gøres. Langt fra! I de fleste Ting
er det mindste gjort, det meste er endnu tilbage at gjøre. Mathe-
matiken er, som alle andre menneskelige Videnskaber, høist ufulde-
kommen. Man martrer sig længe, man regner, man undersøger,
man tænker efter, man tletter sig omfider, uden derved at vinde
de fleste Lider andet, end en nye Overbeviisning om, at Menne-

Fortale.

Skets Forstand er svag, og at den Mine, man arbejder i, er utaknemmelig og haard. Men her deraf følge andet, end at man, langt fra at forsamme Theorien, bør være uendelig bekymret for at giøre det alt fuldkommere og fuldkommere, endskjønt at dette de fleste Tider maa skee ved at aabne nye Veie, som ere vanskelige at gaae og fortrædelige at bane?

Imidlertid beroer Sandhedernes Tilvæxt ikke alene paa Geometrerens Duelighed og Flid, men de fleste Tider paa de Omstændigheder, hvori de leve, saavelsom paa de Opmuntringer, hvilke de have. Ikke det alene, men da disse Videnskabers Fuldkommenhed i en Mængde Tilfælde beroer paa Forsøg, giorte i Stort, som ikke, uden ved store Fyrsters besynderlige Gærmildhed og Hielp, kunde foretages, saa staaer Opdagelsen af de endnu skjulte Naturens Love til stor Deel ikke i Geometrerens Magt, skjønt det endnu blev uvist, naar man endog fandt Moecenater, og havde alle Hielp-Midler, for hvorvidt Opdagelsen endda stod i Menneskets. Saa længe, som vi saa lidt kiende de sande Naturens Love, som endnu i vor Tid, er det meer at undre, at man i den lærde Verden endda haver bragt Kundskaben saa vidt, som at man ikke haver bragt den videre. Men deri er intet andet Marsag, end de ypperlige geometriske Metoder, skjønt de, som alt Menneskeligt, have deres visse Grændser. Saa snart som man er lykkelig nok til at finde nye, gaaer man gierne ved dem med en utroelig Hastighed en vis Veie fort, som man ser ei kunde betræde. Denne Udsættelse, begynder siden et hvert Skridt at blive meer og

meer

Fortale.

meer meifomt, indtil at man endelig og omsider finder et nyt Grendse-Skiel sat, som ei kan overstiges, før man ved en nye Lykke faaer nye Hjelpe-Midler og Kræfter.

Man seer deraf, hvor meget de Navne fortjene at foreviges, som rekke det hele Menneskelige Haanden i at befordre ved vise Indretninger og sande Opmuntringer saa vanskelige og nyttige Dele af den menneskelige Kundskab. Videnskaberne tabe sig let, dertil behøves ikke meget. De sættes derimod vanskelig igien i Flor. Destomeer ber man sfiene paa et for Videnskaberne saa gunstigt Seculum, som vor Store **Friderichs**, saavelsom paa Dem, der under Hans lykkelige Regiering ere sande Moecenater.

Paa Akademierne, som Videnskabernes faste Sæder, ber man i de offentlige Forelæsninger særdeles see paa, at saa meget læres, som Tilhørerne behøve, for strax at faae Kundskab om det, for dem Nødvendige og Nyttige efter Videnskabernes paa den Tid værende Tilstand. Saa tidt det lader sig giøre, er det tienligt, at lempe sig efter enhver Bestemmelse og Hensigt. Men da dette sidste fast ikke er mueligt, ber i de offentlige Forelæsninger en Middel-vei banes, som nogenlunde kan gaaes af alle. Til Videnskabens Fremvæxt ber man derimod see paa, at de, som af den giøre sig en Hoved-Sag, kunde ved det de lære, siden ved egne Kræfter, uden videre Hjelpe arbeide sig fort i Resten. Dette sidste iwerkfattes til en stor Deel best ved nogenlunde fuldstændige Skrifter.

Fortale.

Det er denne *Idée*, som jeg bestandig haver gjort mig Umage for at følge under Udarbejdelsen af dette Werk, hvilket her overleveres det Almindelige; for ikke at skrive over min Materie meer, og ikke heller mindre, end jeg burde. Jeg haver meent paa denne Maade best at kunde efterkomme Hensigten af den Allernaadigste Befaling, som er Aarsag i dette Arbeide, hvilket jeg meget heller havde ønsket var faldet i Personers Lod af større Sindss og Helbreds-Gaver end mine.

For at giere dette Arbeide desto nyttigere, haver jeg inddeelt det i Forelæsninger og Tillæg. Ved de første, som virkelig læses i de offentlige Timer her ved Akademiet, haver jeg søgt at bane den nylig omtalte Middel-Wei, som af alle kan gaaes. Forelæsningerne kunne læses af enhver, som forstaaer den elementære Geometrie og de quadratiske Ligheder af Algebra. Videre behøves til dem ikke. De indeholde derfor Elementerne af Mechaniken, men saaledes, at efter hvad jeg haaber, ville de fleste Læserne i dem alene finde, hvad de ønske at vide. Ydermere indeholde disse Forelæsninger ei alene det, som angaaer Bevægelsen, men endog til stor Deel Kiernen af Physik; fordi disse to Videnskaber i en Mængde Artikler henge sammen ved et uadskilleligt Baand, og en fast Kundskab i den sidste ikke kan være den første foruden.

I Tillæggene derimod findes de almindelige Metoder anførte, som vise, hvorpaa den almindelige Spørgsmaalenes Opløsning kommer an udi Mechanik, saa de kunde ansees for de store Hjælpe-Midler,

Fortale.

ler, hvorved ei alene det i Mechaniken allerede fundne kan forstaaes, men endog til stor Deel det, som i denne Videnskab søges, endnu ydermere kan opløses. I dem haver jeg i sær anført alt det, som ikke kan bevises uden ved Integral- og Differential-Regning, med mindre at man skulde indlade sig i kedsommelige og vidløftige Beviser paa de Gamles Maade. Det er langt fræ, at jeg derfor ikke sætter Priis paa disse Methoder. Tværtimod! de giere den menneskelige Forstand alt for stor Værd dertil. Men ligesom jeg mener, at de kunde være gode og brugelige for de store Mestere i Konsten, saa er jeg ligeledes af den Tanke, at intet var utiensligere, end at ville efter dem afhandle alt i Værd-Maaden. Euclidis, Archimedis og Apollonii Skrifter ere unegtelig ypperlige Verker; men naar man vil standse Mathematikens Fremgang i et Land, skede det aldrig snarere, end ved at legge dem til Grund for den lærende Ungdom, og siden efter denne Plan fremdeles at gaae fort i den applicerte Mathematik.

Ligesom i Tillæggene de almindelige Methoder overalt forklares, hvorpaa de mekaniske Spørgsmaals Oplosning beroer; saa forekomme i dem ligeledes de Beviis, som behøves, for at forstaae, hvad jeg hist og her, skjønt sielden, i Forelæsningerne haver antaget, uden videre Beviis, som sandt, for at giøre disse sidste derved saa meget desto udførligere og nyttigere. Dog er det ikke i Tillæggene alene, at disse Beviis findes, men endog i egne Anmerkninger under Forelæsningers Paragraffer, hvor de med Flid ere bleve saaledes anførte, saa tidt som Beviserne i Korthed kun-

Fortale.

de gives ; paa det at de Læsere, som derom bekymrede sig, ikke skulde have nødig at søge langt bag efter udi Tillæggene det, som de ventelig ønskede at see i uoverbrudt Sammenhæng med Resten. I Tillæggene selv haver jeg saa meget som mueligt, seet paa, ikke at bebyrde Læseren med vanskelige og mindre nyttige Applikationer af Reglerne og Metoderne. Man kan i dette Slags Materier ikke gjøre alt saa let, som man ønskede og vilde, men dette her Læseren ansee som uadskillelig fra Materien, og for en Sag, der ikke berører paa Skribenten.

De saa Steder i Forelæsningerne, som ere tegnede med *, haver jeg ikke villet skille fra den øvrige Materie, til hvilken de herte hen. De ere derved giorte kiendelige fra de øvrige, hvilke i de offentlige Timer her ved Akademiet foredrages og forelæres. Henviisningerne angaaende, maae jeg kortelig melde ; at saa tidt, som det haver været nødig, er i Tillæggene ved Citationen sat F. eller For., hvilket altid tilkiendegiver en Henviisning til en Paragraph udi Forelæsningerne.

Bed begge Delene, saavel nemlig ved Tillæggene, som ved Forelæsningerne, haver jeg søgt at udarbejde alle de Artikler af Mechanik, som vare af nogen betydelig Nytte. Uden Tvivl vil Læseren finde, at jeg i de vanskeligere ikke haver gaaet Vanskelighederne forbi, men tvertimod viist deres sande Beskaffenhed, og hvorpaa Oplesningen beroer. Jeg tvivler ikke paa, at jo en Deel Læsere vilde mene, at jeg haver skrevet for udsørlig : Dogle saa ville

Fortale.

vilde maaskee derimod ønske, at jeg havde skrevet meer. Et saaligt Omdømme er en Forfatter altid underkastet, som intet vissere kan vente sig af sit Arbeid, end alles Critique. Men det er billigt, at man lader den lærde Verden denne Frihed.

Det vi i vor Tid kalde Mechanik, var i det gamle Grækenland, ellers Videnskabernes frugtbare Moder, fast ubekendt. Den ensdanne Bevægelse synes at have været den eneste, som dette Lands Vise og virkelig store Genier havde gjort sig et Begreb om. Denne Videnskabs rette Begyndelse kan ikke regnes uden fra forrige Seculo, først i hvilket den store Galilæus indsaac Lovene for de faldende Tyngher, og gjorde dem almindelig bekendte. Torricelli, Borellus og en Deel andre lærde fortsatte Galilæi Lærdom, og udarbejdede den videre, i sær i det, som angaaer den ensdanne formerte Bevægelse, Bevægelsen af Tynghen i Almindelighed og Tynghdens Center. Omrent paa samme Tid, som Galilæus, levede den store Kepler; Han begyndte at giere Brug af Kræfternes Parallelogram. Med alt dette blev Mechanikens Tilvæxt endnu ikke stor. Wersennius, Cartesius og andre bekvæmde sig vel om at bestemme Kræfterne af Stødet, men de bestemte dem ikke. Imod Aar 1679 fandt først Wallis, Huygens og Wren, den ene uden at vide af den anden, de sande Love for Tynghens Stød, hvorved Mechaniken vandt anseelig, uagtet at Kræfternes Maal endnu blev ubekendt. Men strax efter kom de store Hugenianiske Opfindelser, angaaende Pendulerne, Cykloiden og Svingets Center, for Lyset. Mechaniken vandt derved en nye

Glands

Fortale.

Glands, og begyndte nu at blive en ordentlig Videnskab, da den før var indsluttet inden for meget smaa og trange Grændser.

Al denne Tilvæxt uagtet, var den største endnu tilbage, som den lærde Verden stutsede over, da den store Newton udgav sine *Principia Philosophiæ Naturalis Mathematica*. Det var da ikke meer de Galileianske Fyngdens Love, der blev handlet om, men om de, som regierde hele Naturen; om en almindelig Fyngde. Fra den Tid af kan man først sige, at den menneskelige Forstand begyndte at forstå de store Naturens Love; Central-Kræfterne og den almindelige Gravitation viste Aarsagerne til det, som ingen menneskelig Eftertanke før havde været i Stand til at gjøre sig det mindste Begreb om. De Newtonske Principia vare et rigt Magasin af nye Sandheder i sig, og endnu rigere paa Metoder, efter hvilke utallige andre kunde undersøges og findes. Dette sidste er og virkelig, hvad en Mængde Lærde efter Newton have gjort. Bernoullierne tilkommer i sær den Berømmelse, at de ikke alene have i denne Henseende givet Mekanismen en nye Tilvæxt, men de have i sær forbundet sig den lærde Verden derved, at de have bragt de tungere Newtonske Metoder til de lette analytiske, hvilke sidste ikke mindre have befordret Opdagelsernes Mængde, end de Newtonske Principes selv.

Videnskabernes Selskaber og en Mængde andre høist-berømmelige Geometrer have paa mange Maader udvidet Mekanismens Grændser, ved at følge dels den Newtonske, dels Bernoulliernes

Plan.

Fortale.

Plan. Det blev her alt for vidtloftigt, at ville handle om hver i sær af de hyppelige Genier, som utrettelige i at arbejde, og lykkelige i at tænke, have efterladt sig et Navn, hvilket Efterkommerne aldrig uden Erbødighed ber nævne. Gregori, Tailor, MacLaurin, Herman, Euler, Clairault, Maupertuis, d'Allembert, ere Skribenterne af første Klasse, hvis Skrifter ville blive ærede, lige saa længe som Videnskaben selv.

Desuagtet er og bliver, i Henseende til de almindelige Naturens Love, den store Theorie dog altid Newtons Arbeid, endsskient dette sidste af Eftertiden er blevet fuldkommnere udarbejdet. Siden den Tid ere de mekaniske Metoder endnu idelig blevene formerede. Bernoullierne have viist Maaden, hvorledes man kan i en Mængde Tilfælde afhandle Bevægelsen af et heelt System, som om det var et eneste Punkt. Den berømte Daniel Bernoulli i sær haver arbeidet udi denne vanskelige Deel af Mekaniken. I det, som angaaer Omvæltnings-Bevægelsen, haver saavel han, som den store Geometer Leonhard Euler, lagt en nye Plan. Den zittrende Bevægelses Bestemmelse have vi den berømte Brof Tailor at takke, og denne Theorie er ikke en af de mindst agtbare udi Mekaniken.

Maalet af de levende Kræfter er den store Leibnizes Arbeid. Intet i den hele Mekanik haver fundet meer Modsigelse paa den ene og Medhold paa den anden Side, end dette Princip. Det af den mindste Virkning er af Mr. Maupertuis. Det

Fortale.

sandt og Imodsigelse, og den Deel af det, som angaaer Bevægelsen, er endnu ikke fuldkommen blevet bevist.

Læseren vil finde alt det hidtil anførte nogenlunde fuldstændig behandlet udi dette Werk, hvis Indretning er den, at om ikke flere Dele skulde komme for Lyset, tabe dog derved hverken Kiebere eller Læsere, fordi denne Deel er fuldstændig i sig, uden Hensigt paa andre. Da alle de Tings Fremgang, som udfordre Tid, beroer paa Omstændighederne og Tidernes Forandringer, som ingen forud kan see, saa kan jeg fer det nærværende alene love, at om Gud sparer Liv, Hælbred og Kræfter, skal, saa snart skee kan, den selgende Deel blive meddeelt, hvilken indeholder Statiken og Hydrodynamiken med Maschin-Værkets Theorier.

Jeg haver overalt besittet mig paa at være tydelig og klar, dog saa, at jeg ikke tillige blev Læserne kedsonnelig. De Ord af Theoreme, Probleme o. s. v. haver jeg ikke brugt, for i et Werk, som decuden blev nogenlunde vidtløftigt, at spare Rummet og Papiret. Tydeligheden, vil jeg haabe, bliver derfor ikke desto mindre. Men ihvormeget jeg end haver holdt et Øie med denne sidste, foresalder dog et og andet udi Werket, hvorefter jeg i Forveien kortelig maa erindre Læseren. Saaledes forstaaer jeg i den første og femtende Forelæsning ved den absolute Kraft Inertien eller Massen multiplicert med den hastiggjørende, eller med et Ord, det, der kan ansees paa samme Fod, som Tingenes Vægt. Andre kalde dette Slags Pressioner de relative. Benævningerne ere ligegyldige, alene at de
af

Fortale.

af Bæserne først forstaaes, men enhver seer let, at den første er den rigtigste.

Paa den 56de Side §. 21. Lin. 10. bør den Lighed

$$h = \frac{r^n a^n - 1}{1 + n}$$

alene forstaaes om de Tilfælde, udi hvilke Hastigheden er endelig. Hvilket og udsærlig siges Side 57. No. 2.

Paa den 59de Side sees måaffee ikke strax, hvorledes man Lin. 19 og 20 kommer til den Lighed $gx = Pr$. Man kan da agte, at Central-Kraften kaldes P i den Distance fra Centret x , og at den ansees at være saa stor som Tyngden i den Distance fra Centret r . Men i r forandres Kraften P til $\frac{rP}{x}$, fordi den er overalt Distancen fra Centret proportionert, i Følge Hypotesen; saaledes bliver $\frac{rP}{x} = g$, og $rP = gx$. Følgelig maa flere Kræfter, som i den Distance fra Centret x ere af adskillig absolut Sterrelse, i den Distance r forholde sig som $\frac{1}{r}$, fordi g og x da ansees som bestandige, men P og r som foranderlige.

I den ottende Forelæsning §. 159 tales om de sammensatte Pendulers dobbelte Eving, det ene hen efter Basen, og det andet hen efter Eiden. Jeg kalder og det første Evinget hen efter det horizontale Plan, det andet hen efter det vertikale. Den første Benævning haver egentlig Sted, naar

Fortale.

Svinget ikke er uden lidet, men jeg haver deraf gjort Benævning for alle dette Slags Sving, af Aarsag; at hele Svinget igiennem ligge alle Punkterne i Grund-Linien af Figuren ligedan situerede imod Horizontal-Linien, uagtet at de igiennemvandre under Svinget adskillige horizontale Planer.

Pag. 233. d. 2. kan agtes, at ved r forstaaes Kuglens Halv-Diameter.

Pag. 395. S. 197. sees maaskee ikke strax, hvorfor $B = 2sch$. Til desto større Oplysning kan agtes, at Ordinaten y faaer bestandig to ulige Værdier, fordi den fra Abscissen $\pm x$ af at regne overskier Parabolen i to Punkter. Naar derfor $x = 0$, skulde og $y = 0$, men da bliver $y = 2sch$, saa at $2sch$ er den bestandige Forskiel imellem begge Værdierne af y . Og derfor Taf. XI. Fig. 6. $2sch = GM = AL$. Følgeslig, naar baade y og $x = 0$, bliver og $2sch - B = 0$, og $B = 2sch$.

Det ovrigt, mener jeg, vil ikke holde en eftertænkfuld Læser under Læsningen oppe, i sær om Trykfeilene før eller under Læsningen rettes, saaledes som de ere blevne anførte. Jeg havde ønsket, at forekomme dem alle; men da Trykning og Korrektur er i dette Slags Materier uendelig vanskelig, og jeg iblandt en Mængde Embeds-Jorretninger ikke altid haver haft den Tid, saa neie at eftersee Korrektoren, som jeg ønskede og vilde, ere en Deel Feil indløbne, hvoraf dog de fleste ere i høi Grad ubetydelige.

Mefæ=

M e f a n i f.

Den 1sten Decr

1791

1791

1791

1791

1791

1791

Den første Deel
af
M e k a n i k,
som handler
om Bevægelsen.

Første Forelæsning.

Almindelige Grunde.

§. I.

Hele Naturen, i alle dens Dele, de mindste med de største foregaa i en uoverbrudt Orden utallige og idelige Forandringer, som alle iværksættes ved Bevægelsen. Den og dens skjulte Aarsager, de, som vi sædvanlig kalde Tingenes Kræfter, ere de store Hiul og de virksomme Drive-
Fiedre, som give alt det Materielle det Liv, hvorved Skues-
Pladsen af Verden idelig deels vedligeholdes, deels fornyes.
I det at snart nye Ting begynde, vore og tage til, snart de igien, som have været, forandres eller tage af eller veye om med

Hvorved de
naturlige Virk-
ninger i sær
kunne forstaaes.

hverandre, eller forgaae: Men for at forstaae, saavidt mueligt, hvorfor alt dette skeer og hvorved, er os intet andet Middel øvrigt, end at kiende Kræfterne i Naturen og den af dem forarsagede Bevægelse, for at indsee de usvækkede Love, som i Virkningerne altid iagttages og aldrig forandres.

§. 2.

Hvad Mekanik er, saavel som, hvori den er adskillig fra Statik.

Den Videnskab derfor, som man sædvanlig kalder Mekanik, eller den Videnskab om Bevægelsen, og de den forarsagende Kræfter, ansees med Ret som Nøglen til Naturen. Den er det, høistærede Tilhørere! som vi i disse vore offentlige Forelæsninger ville handle om, for at giøre os fremdeles bekendt med Naturen selv, og for at indsee, hvorledes man kan betjene sig af dens Love og Kræfter, dens Virkninger og brugbare Tilægnelser til Nytte for det borgerlige, til Hielp i det menneskelige Liv. Men for vi gaa videre, ville vi agte, at denne Videnskab sædvanlig inddeles i Mekanik og Statik. Den første handler om Lovene for Bevægelsen og deres Følger, den sidste om Kræfternes Egevaagt, forstaa; naar den ene af dem ei kan udrette noget i Henseende til en virkelig Bevægelse, som skulde forarsages i den anden.

Vi ville her betragte begge, og hver for sig, dog altid saaledes, at vi tillige see paa den letteste Orden i Sandhedernes Følge.

§. 3.

Om hvad Ting Mekaniken handler.

Strax i Begyndelsen er det nødvendigt, at giøre nogle almindelige Anmerkninger over de materielle Ting, uden dog at

at indlade os i vidtloftige Betragtninger over Tingenes første Natur, siden alt den angaaende hører andensteds hen. Enten til den egentlig saa kaldte Physik og Videnskab om Naturen, eller til de høiere Betragtninger, som man med et Ord kalder Metaphysik. Vi erindre derfor, at her alene handles om den materielle Verden, og om de sammensatte Ting, af hvilke den bestaaer.

§. 4.

Det Ord Materie behøver Forklaring: Imidlertid at hele Naturen er i alle sine Forandringer det den er ved Bevægelsen; ytrer alt, hvad den bestaaer af, det mindste med det største, en Modstand imod Bevægelsen, og viser, om jeg saa skal tale, en naturlig Seendragtighed og Modbydelse imod al Forandring. Vil man for Exempel skyde en Ting afstød, den frider da unegtelig ligesaa stærk imod: Heste trække en Bogn, og den disse Dyr igien imod sig med lige Magt. Man behøver til at overbevise sig om denne første store og almindelige alle Tings Lov i Naturen, intet andet, end de allergemeneste og hvert Øyeblik forekommende simpleste Erfaringer. Det er utænkeligt, at en Virkning skulde kunde skee paa det, som ei stod imod; paa det, som da ei længere blev en Ting, men en Art Skygge af Tingene, noget saadant, som de Billeder, vi have seet, Høistarede! male sig af i Brende-Punktet af de hule Brende-Speile. Just fordi Tingene kunde staae det Virkende imod, ere de Ting, og noget adskilligt fra Rummet's Dele, der have Ud-

Hvad der for-
staaes ved Ma-
terie; Den y-
trer altid en
Modstand imod
Bevægelsen, der
er ligesaa stor
som Virknin-
gen.

strækning, ligesaa vel som de. Den første store Lov i Naturen er derfor, at Virkning og Igien-Virkning ere hverandre lige. For saavidt en Ting ei kan virke imod en anden, for saavidt er det ei heller mueligt, at den kan af den lide, eller tage imod nogen Forandring. Følges en Ting, saa at sige, af den anden, i det de bevæges efter hverandre, da lider den dog aldrig nogen Forandring af den Deel af den Følgendes Kræfter, der beroer paa den Fart af Hastigheden, som er fælles for begge.

§. 5.

Hvad Inertien er og naar den ytrer sig.

Vi kalde derfor Tingene Materielle, for saavidt, de ei allene ere sammensatte, men ytre og en virkelig Modstand, eller en saa kalden Inertie imod al Bevægelse. Denne deres Kraft eller naturlige Modstand er dem indvendig, og ytrer sig ikke, uden i det Dieblis, da de virkende Årsager søge at forandre deres Tilstand.

§. 6.

Hvad det er at bevæges. Hvad Direction, Hastighed og Tid ere. Og for hvorvidt al Bevægelse kan siges at ske i ret Linie.

De første Sandheder ere saa nøie forbundne, een i at opløse den anden, saa man maa, saa at sige, paa eengang have dem alle i Sigte, for desto bedre at see enhver af dem i sær, ved det Lys den laaner af de andre. Bevægelsen er Tingenes Modstand naturlig Viis imod, men behøves til at forstaa den, saa vi derfor agte følgende:

I. Gaaer en Ting bestandig fort efter en Linie, hvilken (saalænge som en eneste Kraft altid virker paa den ensdan, er altid ret,) da siges den at bevæges, fordi den i denne Tilstand

stand aldrig kan tænkes paa et Sted, men altid fra Sted til Sted.

2. I Bevægelsen maa derfor to Ting vel sættes ud af hverandre, naar den tænkes. Den ene er, det vi kalde Direction eller Drive-Linien. Den anden er, hvad vi kalde Hastighed. Directionen er den rette Linie, hvorhen efter en Ting idelig enten bevæges, eller og søger at bevæge sig. Forandres under Bevægelsen denne Linie end idelig, fordi flere adskillige Kræfter tumle det Bevægede paa adskillige Maader, kan dog for en uendelig liden Tid ingen Bevægelse tænkes at kunde skee uden i den, saa man kan med denne Indskrænkning sige, at al Bevægelse skeer i ret Linie.

3. Hastigheden er det andet, som i Bevægelsen maa agtes. Den er den Formue, som det Bevægede besidder i en vis given Tid, at igiennemløbe et vist given Rum. Den er derfor den Henseende, som det igiennemløbne Rum haver til Tiden, hvori det igiennemløbes. Den kan saaledes være mindre og større efter utallige Grader.

4. Det tredie, som i Bevægelsen kan agtes, er Tiden, at forflyttes fra Sted til Sted udfordrer en Folge af Forandringer; den nemlig, som vi kalde Tid.

§. 7.

Alt Materielt derfor, indeholder under sin ydere Omkreds Deele, som have lige Begjærlighed til at staae Bevægelsen imod, og at tage imod den. De ere det, som vi i det følgende ville kalde Materie eller Massen. Saavidt man kan erfare, Bevægelsen deeler sig ligedan ud over alle Materiens Deele, og Inertien er altid Materiens

gaaer

Mangde pro- gaaer deres Delelighed overmaade vidt. Vi ville derved
portionert. paa dette Sted ei opholde os, men derimod erindre, at den
Bevægelse, som af Kræfterne meddeles, inddeler sig over
dem alle ensdan. Thi, om efter Virkningen, Hastigheden ei
var den samme i alle de allermindste Deele, maatte Tingene
splittes ad, og de langsomme eller mindre hurtige Dele un-
der Bevægelsen blive forladt af de, som gik frem med større
Fart. Desuden da alle disse Dele staa naturlig Wiis ved
deres Inertie ligemeget Bevægelsen imod, er det klart, at de
alle i lige Grad maa tage imod den. Og man seer deraf
videre.

At Inertien altid er Materien proportionert. Saa
en dobbelt Materie kan giøre dobbelt Modstand imod samme
Kraft, en tredobbelt tre Gange meer end en enkelt, o. s. v.

§. 8.

Hvad Hvile er.
Materien kan
ei af sig selv for-
andre sin Bevæ-
gelse eller Hvile.

Intet er klarere, end at jo alt, hvad vi kalde Mate-
rie, er i og af sin Natur ligevel skicket til at antage alle Gra-
der af Bevægelse. En Kanon-Kugle for Exempel, som et
Dieblis hoiler, som et andet stød med Jorden, triller lang-
som hen ad Jorden, med hvad ugemeen Hastighed bevæger
sig den ikke ud af en Kanon, om Ladningen haver været i no-
gen Grad anseelig? Hvile og al Slags Bevægelse er derfor
i Henseende til Materien lige mulige. Men Hvile er Man-
gel af Bevægelse og denne imodsat. Da saaledes alt Mate-
rielt i og af sin Natur ei meer er skicket til den ene af disse for-
anderlige Omstændigheder end til den anden af dem, saa føl-
ger

ger og, at det heller ikke kan af sig selv enten forandre sin Hastighed, eller dens Grader, eller sin Bevægelse til Hvile, eller denne igien til Bevægelse. Det er en Folge af Inertien, §. 4. at i Materien al Forandring maa komme udbendig fra. Den selv, langt fra at forårsage nogen ny, staaer al Forandring imod.

§. 9.

Ligesaa lidet kunne Tingene forandre af sig selv deres Direction. Vilde vi for et Dieblis sætte, (see Taf. I. Fig. I.) at det skulde kunde fæe. Af hvad Årsag maatte da en Ting *a*, som bevæges efter *fa*, meer tage den Direction *ba* end den imodsatte *ea*, eller en som *da*, o. s. v.? Det samme gielder alt om den Tilstand, hvori Tingene hvile, saa de naturlig Viis besidde ingen Kræfter til at forandre sig selv.

ei heller Directionen i Bevægelsen.

§. 10.

Jeg kaldte *ae* og *ab* imodsatte Direktioner. Dersom nemlig to Kræfter virke paa hverandre over samme Linie, men efter de dens Deele, som løbe imod hverandre, *ea* og *ba*, da kaldes *ea* og *ba* imodsatte Direktioner. Dette hjælper endnu bedre til at forstaa Inertien, Maaden nemlig, hvorpaa den yttres sig: I det Dieblis, da der virkes paa en materiel Ting, virker den efter en imodsat Direktion ligesaa stærk igien paa det, som vilde forandre den. Men, endskjønt at Tingene saaledes virkelig staae Bevægelsen imod i det Dieblis, da den meddeles, er det dog efter det forhen sagte §. 4. allene for

Hvad imodsatte og overensstemmende Direktioner ere. Inertien virker altid i en imodsat Direktion imod de virkende Kræfter, men tager tillige imod Bevægelsen.

desto bedre at kunde tage imod deres Forandring. Just naaar de staaer alt imod, meddeeles alt. Man seer ellers let af det allerede sagte, at dersom Krafternes Virkninger yttre sig over den samme Linie efter den samme Deel af den, for Ex. om flere Krafter virke efter *ea*, da kaldes deres Direktioner overensstemmende Direktioner.

§. II.

Inertien, eller den naturlige Materiens Modstand er derfor altid i lige Forhold med Virkningen. Hører man en Ting løslig, dens Modstand er neppe kiendelig. Slaaer man den med Magt, den hæver sig net op, man føler, hvad den burde føle, om den kunde. I øvrigt kan agtes, at endskjønt Inertien sædvanlig kaldes en Kraft, hører den dog ingenlunde til de bevægende Krafter i Naturen. Thi, som vi have sagt, ved Inertien have Tingene en Drift til at blive bestandig i den Stand de ere. Saa at, om alt i Verden hvilede, og ingen anden Kraft levedegjorde Naturen, end Inertien, hvilede alt i den evig, uden mindste Forandring.

§. 12.

Hvad den eensdanne Bevægelse er, og hvordens Love bestaaer.

De simpleste Betragtninger over Tingene ere efter den menneskelige Tænke-Maaade de, som bane Veien saa got for de allervanskeligste. Det er i vores Nærværende det samme. Al af Slags Bevægelse kan ingen tænkes mere simpel, end den vi kalde den eensdanne, den nemlig, som hele Tiden igigennem, i hvilken Tingen bevæger sig, bliver uforandret og i alle

alle Henseende den samme. I Henseende til den seer man:

1. At saafremt Hastighederne i to Ting, som bevæges, ere de samme, maa de af Tingene igiennem løbne Rum være som Tiderne, hvori de bevæges. 2. Er derimod Tiden i begges Bevægelse den samme, men Hastighederne adskillige; da ere de igiennemløbne Rum Hastighederne proportionerte.

§. 13.

Kaldes derfor i den eensdanne Bevægelse det igiennemløbne Rum R, Hastigheden H, Tiden T. Da er det igiennemløbne Rum altid, som Hastigheden multipliceret i Tiden, eller $R = HT$. §. 12. Forflares videre.

§. 14.

Følgelig er og $\frac{R}{T} = H$ eller Hastigheden i Forhold med Rummet dividert ved Tiden, og ligeledes

$2 \frac{R}{H} = T$, eller Tiden i Forhold med Rummet dividert med Hastigheden.

§. 15.

Videre sees. At om de i en eensdan Bevægelse igiennemløbne Rum ere lige store, og i den Forhold $\frac{R}{T} = H$. sættes R bestandig, T og H foranderlige. Da blive Hastighederne i forkeert eller omvendt Forhold af Tiderne. $H = \frac{1}{T}$.

2. Ligeledes; at Tiderne ere i omvendt Forhold af Hastighederne, om de igiennem løbne Rum ere lige store.

§. 16.

Forfællen imellem de bevægende Kræfter. De trykkende, og de, som virker med en virkelig Bevægelse, eller imellem døde og levende Kræfter. Hvad man forstaaer ved hastiggjørende Kræfter.

Efter at have betragtet Lovene af Bevægelsen i den simpleste Tilfælde, bliver det nødvendigt, at gjøre sig en Tanke om det, hvorved den bliver tilvejebragt i Naturen.

Nemlig 1) denne sidste bruger dertil ikke uden een af to Maader, thi enten meddeles Bevægelsen ved Ting, hvilke i Henseende til den Virkning de ioversætte, selv ingen Bevægelse have, og som for et Dieblik ingen kiendelig Bevægelse forarsage; eller og ved Ting, som forandre andre ved deres virkelige Bevægelse, saa at, saa tit som Modstanden er overvindelig, en kiendelig Bevægelse i et Dieblik bliver frembragt. De første kalder man trykkende Kræfter og deres Virkning en Trykning eller Pression. De sidstes Virkning derimod forklarer man ved de Ord at støde og at slaae. Disse ere de to store Hoved-Maader, hvorpaa der virkes i Naturen; i det mindste kiende vi i det Materielle ikke andre, og alt lader sig deraf forklare i Mechanik. Man kalder, saa tit som man seer alene paa Tingenes Bequemhed i og Dygtighed til at virke, de første eller de trykkende Kræfter døde, de sidste eller de stødende, levende Kræfter. Vi finde i det følgende Leilighed til at vise begges sande Forfæll. De saa kaldte trykkende Kræfter ere i Naturens Forklaring, som tidest de vigtigste, hvorfors vi og her først ville ved dem særdeles opholde os.

Man seer imidlertid 2) at de begge ere bevægende Kræfter, thi man forstaaer i Almindelighed under dette Navn alt, hvad der kan forarsage og forandre Bevægelsen i Tingene.

3. De trykkende kaldes hastiggjørende Kræfter, naar deres vedvarende Virkning i en vis given Tid forårsager i det Bevægende en vis given Hastighed.

4. Pressionen selv, som man og kalder den absolute Kraft, er derfor at ansee som noget virkende, der er Tingene selv indvendigt, af hvad Årsag det end kommer. Thi om end den trykkende Kraft virkelig bevæges tillige med Modstanden, skeer dog Trykningen aldeles, som om begge hvilede, §. 16. Den hastiggjørende Kraft derimod, er igien at ansee som dennes Virkning, i Henseende til Hastigheden paa et hvert givet Punkt af Materien. Thi Virkningen af Pressionen deler sig over alle Materiens mindste Partikler ensdan, §. 7. og driver enhver af dem lige stærk med mindre eller større Hastighed udi samme Tid, eftersom Pressionen eller den Tingene indvendige Kraft selv er i sig større eller mindre til. Man kan videre agte, at i de tunge Ting er Pressionen deres Begt, og at i Almindelighed, saa tidt som Inertierne ere lige store, ere Pressionerne udi samme Forhold, som de hastiggjørende Kræfter.

§. 17.

Kræfterne og deres Størrelse kunne ei forstaaes uden af deres fulde Virkninger. Deres virkelige Væsen er os ubekendt. Kræfterne maa dommes af den Modstand de kunde overvinde i samme Tid. Følgelig maa de dommes af den Modstand, som de kunne overvinde i samme Tid, eller af den Drift, de kunne give een og den samme Materie i samme Tid. Denne Anmærkning i Henseende til Tiden er saa meget meer nødvendig, som de trykkende Kræfter i Naturen, der overalt forårsage den ide-

lige Bevægelse i dens store, og en idelig Drift til samme i dens mindre Dele; alt det nemlig, som vi kalde med det Navn af Tyngde, altid over en uophorlig vedvarende Trykning. Man maa derfor agte, at de trykkende Kræfter ere under sig i samme Forhold, som de Virkninger, de forårsage paa hvad der staaer imod, udi lige store Tider.

§. 18.

Hvorledes de
trykkende Kræf-
ter virke.

Egentlig betragter man de trykkende Kræfters Tryk-
ning eller Pression, ikke som andet, end det, der staaer paa
allene en uendelig liden Tid. Derimod fornyes den hvert
Øieblik igien uden Ophør i Løbet af Naturen. Saaledes
tynger en Ting paa den anden bestandig. Vi dele Virkningen
i Tankerne, den varer uophorlig ved i Tingene selv; fuld-
kommen, som man seer dette at skee i en Vægt, hvis begge
Skaaler staae inde med hverandre, legges da paa den ene et
Lod, synker Skaalen bestandig med Loddet og trykkes af dette
uophorlig: Eet af to treffer derfor altid ind, naar Kræfter-
ne trykke paa. Enten kan det, som staaer Trykningen imod,
overvindes eller ikke. Det første burde naturlig viis altid
skee, §. 4. 10. dersom udbortes fra forhindrende Årsager ei
standsede Bevægelsen. Den største Materie maatte da drives
fort og blive bevæget, skönt uendelig langsom, af den mindste
Kræfternes Trykning, og saaledes vinde en Slags Bevægelse,
om intet uden Inertien stod imod. Saa tidt derimod nogen
anden Modstand haver Sted. da kan den sidste Tilfælde treffe
ind. En Trykning tilintetgøres da af en anden imodsat og
ligesaa

ligesaa stærk; saa at om den i første Øieblik ei forårsager en Bevægelse, forårsager den den aldrig, med mindre at de udvortes Omstændigheder forandres.

§. 19.

Saa tidt derimod, som udvortes Åarsager ei ere Bevægelsen imod, forårsages den altid ved de trykkende Kræfters Virkning. Bevægelsen vøyer lidt efter lidt, og fra at have været i Begyndelsen liden, bliver den kiendelig og endelig anseelig stor, om Trykningen bestandig varer ved. Derved faaer Materien Fart (vim insitam) og levende Kræfter, som imodsatte Trykninger kunde tilintetgjøre paa samme Maade, som de for bragte den til Veie.

Jeg taler her om Pressionerne, saaledes som Naturen tilveiebringer dem, hvilke altid ere vedvarende, som de af Tyngden. Men i Mechanik, for saavidt, som man i den tillige affhandler Statik, behøves endnu at betragte et andet Slags Trykninger, hvilke ikke i og af deres Natur kunde virke uophørlig, som for Ex. Menneskenes og Dyrenes Kræfter. Men da disse høre allene til Statik, og vi i den egentlig saa kaldte Mechanik ikke handle om andre end de naturlige Kræfter, saa ville vi her paa dette Sted derved ikke opholde os.

§. 20.

Da Virkningen af de trykkende Kræfter deler sig endsdan over alle Materiens Dele, saa er det klart, at Virkningen af en og den samme Trykning paa adskillige

De forårsage altid en Bevægelse, naar intet staaer imod.

Et andet Slags Trykninger.

Den samme Tryknings Virkning er i forskere Forhold af Materien.

skillige Materier er i forkeert Forhold af Materier-
nes Sterrelse.

§. 21.

Abkillige Tryk-
ninger, som vir-
ke i samme Tid, i
ere under sig
som deres Virk-
ninger paa en
og den samme
Inertie.

Ligeledes sees, at om Trykningerne ere af adskillig Grad
Henseende til deres indvendige Beqvemhed i at virke udi
samme Tid paa en og den samme Materie eller Inertie; da
ere de under sig i Forhold med deres Virkninger paa samme,
siden man ikke kan tvivle paa, at jo Aarsagerne ere som deres
fulde uhindrede Virkninger.

§. 22.

Hvoraf Kræf-
terne i Almin-
delighed maa
dommes, og
hvad man kal-
der Kræfternes
Modstand.

Vi have sagt §. 17. at Kræfterne bør dommes af deres
fulde Virkninger. Disse maa og bør derfor sluttes af den
Modstands Størrelse, som bevages. Jeg forstaaer her og i
det følgende ved Modstand den materielle Ting, som staaer
imod; og ved den hele Virkning den hele Forandring, som
samme lider; hvad heller man vil domme denne sidste af Ha-
stighedens eller af Rummet's Forandring; thi af en af begge
maa den altid sluttes.

§. 23.

Fortsættes vi-
dere.

Følgelig er det sandt om alle Kræfter, naar deres hele
eller fulde Virkninger betragtes; at, dersom de virke udi sam-
me Tid, uhindrede i at ytre deres fulde Kræfter, da ere de
under sig, som den Modstand de bevage, multiplicert med de
Rum, igiennem hvilke samme med en eensdan Bevægelse bevæ-
ges.

ges. Thi er Modstanden dobbelt, Rummet det samme; da bliver Virkningen dobbelt, og ligeledes; om Rummet er det samme, som Modstanden bevæges igiennem, men dennes Inertie derimod er dobbelt, saa bliver Virkningen og dobbelt, o. s. v. Saa ingen Tvivl er paa, at jo de hele Virkninger ere proportionerte Modstandens Størrelse, multiplicert med det Rum, igiennem hvilket at samme bevæges. Følgelig maa og Kræfterne selv være ubi denne Forhold, naar de dømmes af deres fulde Virkninger.

§. 24.

Deraf sees, at de hele Kræfter, som trykke i samme Tid, Hoved-Reglen for lige store Kræfter. ere under sig som den Modstand de bevæge, og det Rum, hvorigiennem de bevæge den. Hvoraf følger videre: at om Trykningerne kaldes T og t , de Modstand, de virke paa M og m ; de Rum, igiennem hvilke de bevæge dem r og R da bliver

$$T : t = Mr : mR.$$

hvoraf flyder følgende vigtige Regel,

At om de Modstand der virkes paa, skulle være ulige, M nemlig og m ei af samme Størrelse, men Trykningerne eller Pressionerne lige store, $T = t$

da bliver $Mr = mR$ og $M : m = R : r$ det er, Kræfternes Modstand, maa være de Rum, igiennem hvilke de i samme Tid bevæges, forkeert Viis proportionerte, om Kræfterne skulle være lige store.

§. 25.

Og atter igien: Kræfterne ere altid lige store, saa tidt som de Inertier, eller den Modstand, som de bevæge, ere af Størrelser, hvilke ere de Rum forkeert-viis proportionerte igiennem hvilke de i samme Tid af disse Kræfter bevæges.

§. 26.

Agt somhed,
som behøves, i
at stille Kræf-
terne fra hver-
andre, naar de
dømmes af den
Hastighed, som
de meddele de
Ting, hvilke de
bevæge.

Alf den Lighed $TmR = rMr$ kan enhver, som er nok i Proportioner, ved at sætte snart $M = m$, snart $r = R$, o. s. v. Enhver, siger jeg, kan giøre sig mange flere Regler, som ei ere unyttige, men vi ville ved dem ei opholde os, for at agte, at denne Regel er almindelig for alle Kræfters hele Virkning. Vil man derimod domme Kræfterne af de Hastigheder, de forårsage; da er det klart, at siden i den eensdanne Bevægelse, naar Tiden er den samme, Hastighederne ere som de igiennemløbne Rum, §. 12. 2. saa tit da, som man kan betragte den hele Bevægelse fra Begyndelsen af Tiden til dens Ende som eensdan, kan man ligesaavel sige, at Kræfterne ere under sig i Forhold af Inertien multiplicert med Hastigheden, som at vi §. 24. have sagt, at de ere under sig, som Inertien multiplicert med det igiennemløbne Rum. Thi imellem begge Forhold er da ingen Forskiel.

Da derfor Pressionerne altid tænkes, som at skee i en uendelig liden Tid §. 18, saa kan man altid uden Forskiel, om Tiden er den samme, sige, at disse saa kaldne døde Kræfter ere under sig som Inertien multiplicert med det igiennemløbne

løbne Rum, eller som Inertien multiplicert med Hastigheden. Thi en Kraft, som ytrer sig i en udelelig eller uendelig liden Tid, kan ikke tænkes, at meddele sin Modstand en større Bevægelse i Enden end i Begyndelsen af denne Tid.

Med de levende Kræfter derimod, eller de, som virke ved Stød, er det noget andet. Man kan om dem ikke sige, naar de end virke udi samme Tid sammen, at den Bevægelse, som de meddele deres Modstand, er udi Begyndelsen og Enden af den Tid, der virkes i, den samme; skiont vi i det følgende skulle faae at see, at Stødet meddeler sig i en overmaade liden Tid. Thi Virkningen formindskes idelig, alt som den meddeles, og der er desuden en anseelig Vanskelighed i at sammenligne disse Kræfters Virkning i Henseende til den samme Tid.

Saa deraf sees, at man altid vel maa giøre Forskiel imellem, hvad man i Kræfterne kalder Trykning og Stød, eller Pression og levende Kræfter.

§. 27.

I Anledning af det, som i denne Forelæsning er bleven talt om Bevægelsen, kunne vi fast ikke forbigaa at røre ved det her sædvanlige Spørgsmaal, hvori at Bevægelsens Størrelse bestaaer. Der skal da ikke meget til at see, at, naar et Legeme er i Bevægelse og støder an paa et andet, virker det paa dette andet ikke alene med sin Hastighed, men endog med sin hele Masse, fordi Bevægelsen er lige fordeelt over alle Materiens Dele, saa der er den samme Fart i enhver Parti-

Bevægelsens
Størrelse er
proportionert
Hastigheden,
multiplicert med
Massen.

kel af Materien, og folgelig maa Tingens hele Fart, eller dens Bevægelses hele Størrelse, være proportionert Materiens Mængde i det Legeme, som bevæges, multiplicert med Hastigheden, hvormed det bevæges.

§. 28.

Bevægelses
Størrelse er ei
Maalet til Kräf-
ternes Virkning
i de Ting, der
bevæges med
virkelig Hastig-
hed.

Denne Bevægelses Størrelse reigne nogle som Maalet af de Kræfter, hvilke de Ting besidde, der ere i virkelig Bevægelse, og man haver lang Tid anseet den almindelig som et saadant Maal. Vi skulle derom handle udforligere siden. Her paaminde vi alene derom, for strax i Begyndelsen at forekomme alle falske Begreb om de første Grunde, og for at sige, at Virkningerne af Tingenes Stød, eller hele Kræfter paa denne Maade ei kan udreignes, men alene Pressionerne, §. 26.

§. 29.

Lige store imod-
satte Trykninger
tilintetgiøre
hverandre.

Vi ville til Slutning af denne Forelæsning betragte de Trykninger, som virke imod hverandre efter imodsatte Drive-
Linier, da man strax seer. At dersom de ere lige store, gjør den ene den anden til intet, saa at ingen Bevægelse følger. Og deraf kan man altid domme lige store Pressioner.

§. 30.

Hvorledes en
Modstand vir-
ker, som ei kan
vige.

Virker en Pression paa en Modstand, som ikke kan vige, da virker denne ligesaa stærk imod ved sin Inertie §. 11, saa man da har net op det samme Tilfælde, som §. 29.

Hvoraf

Hvoraf sees, hvorledes man bør domme om al den Modstands Virkning, som ei kan vige.

§. 31.

Men hvad skeer, om efter imodsatte og stridige Drives ^{Bevægelsens} Linier to Kræfter eller Pressioner virke paa hverandre, som un- ^{Beskaftenhed,} der sig ere ulige? f. E. Om Taf. I. Fig. I. efter *ea* og *ba* to Kræf- ^{naar ulige Tryk-} ter virke imod hverandre, som ere ulige store. Da tilintetgøres ^{ninger efter} den mindre, og den tilintetgør ligesaa meget, som den selv er, ^{imodsatte Di-} i den større. Med Forskiellen af Pressionerne skeer siden ^{rektioner virke} Bevægelsen efter den stærkeres Direktion. ^{paa hverandre.}

§. 32.

Denne ringe Grundslægning er stor nok, for paa den ^{Bærets foresat-} videre at anlægge den uendelige Mængde af Betragtninger, ^{te Grundser.} hvilke en saa vidtloftig Videnskab, som den om Bevægelsen, kan give Anledning til at gøre. Vi ville af en ubestridelig Mængde herhid hørende, og i Mængde af de berømte Geometrer oploste Spørgsmaal i vore Forelæsninger og i dette hele Verk alene afhandle de, som ere i sær nyttige, betydelige, og hvoraf Resten siden let forstaaes, som her ikke anføres. I en Mark, skatteret med et uendeligt Broderie af utallige prægtige Blomster, ville vi forundre os over de store Forandringer i Skienhed, imidlertid at vi ikke søge for os selv uden de nyttigste Frugter.

Første Tillæg.

Om Maaden, at bestemme de hastiggjørende Kræfters Forhold under sig.

§. I.

Den Lighed
 $pdt = m dv$ er
Hoved : Lige-
den, hvoraf de
trykkende hastig-
gjørende Kræf-
ter kunne vur-
deres.

Da paa de i denne Forelæsning forklarte Sandheder fasttalt det beroer, som den hele høiere Mechanik igiennem bør legges til Grundvold i de forekommende Spørgsmaals Opløsning, saa kan jeg ikke undlade at anføre følgende for de, som ville gaae videre.

Da efter §. 26 i Forel. Trykningens Størrelse i en vis given Tid bør bestemmes af den Materies Størrelse, som bevæges, og af Hastigheden, hvormed den, i den Tid Pressionen staaer paa, bevæges. Videre : Da Trykningerne altid betragtes at skee, som i en uendelig liden Tid, §. 18. og følgelig, som de der ei kunne i samme tiløbe bringe uden en uendelig liden Hastighed, saa sees; at om man kalder en uendelig liden Deel af Tiden eller et dens Element dt ; et Element eller en uendelig liden Tilvæxt af Hastigheden dv ; Pressionen eller Trykningen p ; Materien, som skal bevæges, m ; da bliver §. 17. 26.

$$pdt = m dv.$$

eller Pressionen multipliceret med det Dieblis den varer, er proportio- nert den Mængde Elementær-Bevægelse, som den imidlertid bringer til Veie. Man maa her nødvendig betragte den hele Tid, hvori der virkes, thi derpaa beroer Maalet af Pressionens hele Virkning, og den hele elementære Bevægelse. I denne uendelig liden Tid er ligeledes

den

den hele Virkning Bevægelsens Størrelse. Følgelig bliver pdt den hele Virkning af Pressionen, mdv ligeledes, og derfor

$$pdt = mdv$$

som er den store Hoved-Lighed for Bevægelsens Tilvæxt i Almindelighed.

§. 2.

Man kan deraf giøre en Mængde Slutninger, for at domme om og at sammenligne de trykkende Kræfter under sig, og i Henseende til deres Virkninger. Thi antager man Tiden dt , i vores forrige Sætning $Pdt = mdv$, altid som bestandig, da er det klart §. 12.

Dette forklarer nærmere i de fornemteste enkelte Tilfælde.

2. at de i uendelig smaae Tider ved de trykkende Kræfter tilførte Elementer af Hastighederne maa være som de igiennemløbne Rum, kaldes da et Element af Rummet, eller en dets uendelig liden Deel dy , da forandres den Forhold $Pdt = mdv$ til denne anden

$$Pdt = mdv,$$

hvoraf følger følgende Hoved-Slutninger, som tildeels og ere blevne afhandlede i Forelæsningen :

a) At om i samme Tid ulige store Materier drives af trykkende Kræfter igiennem lige store Rum, da forholde disse Kræfter sig til hverandre, som de bevægede Materier. Thi da dy og dt ere i denne Tilfælde i Følge vores antagne bestandige, bliver $P = m$, siden man i en Forhold af foranderlige Størrelser alene haver at see paa det foranderlige, og det bestandige hverken gjør til eller fra i at domme om Forholden.

b) Ere derimod Materierne, som bevæges, de samme. Da ere i Sætningen, $Pdt = mdv$, P og dy alene foranderlige, følgelig de i samme Tid trykkende Kræfter i samme Forhold til hverandre, som de igiennemløbne Rum.

c) Ere

c) Ere baade Rummene og de bevægede Materier adskillige, men Tiden den samme; da blive de trykkende Kræfter under sig, som Materierne multiplicerede med de igiennemløbne Rum. Eller, hvilket er det samme, i sammensat Forhold af begge, thi da er $P = mdy$.

d) Vil man finde, hvad der udfordres til, at de i samme Tid trykkende Kræfter kunne blive lige store i Henseende til Virkningen. Da sees, at i den Forhold $Pdt = mdy$, maa, forinden at d ansees som bestandig, mdy og blive en bestandig Sterrelse, dertil udfordres, at naar n betyder en bestandig Sterrelse, dy maa forholde sig som $\frac{n}{m}$ eller i en bestandig forkeert Forhold af den bevægede Materie, thi da bliver $Pdt = mdy = \frac{mn}{m}$ selgelig og $P = n$, det er, P bliver en bestandig Sterrelse, fordi n er ei foranderlig, men en bestandig Sterrelse,

saa Trykningerne paa adskillige Materier ere lige store, dersom de i samme Tid igiennemløbne Rum ere i forkeert eller omvendt Forhold af de bevægede Materier.

e) Man kan deraf ligeledes dømme Modstandens Sterrelse. Er nemlig Tiden den samme, bliver den som Pressionen ligestrem og det igiennemløbne Rum forkeert taget. Men man maa i alt dette vel agte, at her ikke handles om vedvarende, men alene om elementære Pressioner, for saavidt som Rummet betragtes.

Den anden Forelæsning.

Om Tyngden, og de fra den nedstammende Hoved-Love i Naturen.

§. 33.

Vi saae, Høistærede! i vores forrige Forelæsning de trykkende Kræfters almindelige Beskaffenhed. hvad Tyngden er og Tingenes Vægt. Den af dem alle, som vi i det nærværende bør ansee som mest betydelig, er den vi kalde Tyngden: Den er, saa at sige, Livet og Sielen i det, der henhører til Mechanik, ligesom den er det i hele Naturen. Men hvad forstaa vi under dette Navn? For desto bedre at forklare vore Tanker, ville vi kaste Blikket hen paa Fig. 2., hvor den Cirkel G H I forestiller os Jorden. Vi antage her det, som siden, uden Sammenhæng med det nærværende, og uden Cirkel i at slutte, skal blive bevist, at Jorden er rund, og kan ansees som en fuldkommen Kugle. Forestiller man sig en Materie enten inden i Jorden, eller i dens yderste Omkreds, eller over Jorden, som i A for Exempel, da beviser al Erfaring, at den bestandig trykkes ned imod Jordens Middelpunkt T. Den skjulte Kraft, som uopherlig, naar og hver det er, trykker Materierne ned imod Jordens Middelpunkt, kaldes Tyngden. Den meddeeler derfor alle Ting i en uendelig liden Tid en elementair

D Hastig-

Hastighed, hvormed de synke ned efter imod Jorden §. 18, denne er det, som vi kalde Tingenens Vægt, saa Vægten i Tingen er intet andet, end en elementær eller uendelig liden Hastighed, hvormed de selv og alle deres Dele ligedan drives ned imod Jordens Center. Staaer noget imod, da tilintetgøres Tyngdens Virkning, enten ganske eller tildeels af denne Modstand, og det er egentlig i denne Tilfælde alene, at vi tillegge Tingen Vægt.

§. 34.

Hvad Brug
Naturen gjør af
deslige Kræfter,
som Tyngdens.

Det henhører egentlig til Physik at afgjøre, hvad Tyngden virkelig er i Naturen, i Henseende til sit Væsen. Vi ville her alene erindre, at vi uimodsigelig kunne bevise, at den ei alene virker paa, i, og omkring vores Jord, men endog i Planeterne og overalt hele Verden igiennem, saavidt vi ved vore Erfaringer og de paa dem anlagte Udregninger kunne være i Stand til at komme paa Sporene af Naturens hemmelige Love og skjulte Virkninger. Imidlertid bør denne Anmerkning gjøre os desto opmerksommere til ret at lære og at forstaa Lovene for Tyngden, da de saa meget bruges i Naturens Huusholdning, og ere, saa at sige, dens anden Haand.

§. 35.

Tyngden vir-
ker, som om
den var Tingen
indvendig, og
disses Vægt er
derfor altid Na-

Saa meget kunne vi ikke undlade her at sige, at den trykkende Kraft i Naturen, som vi kalde Tyngden, er noget, som er Tingen indvendigt, og som overalt følger dem, som ytrer sig paa deres mindste Dele, og ei alene paa deres

deres yderste Omsvøb eller den saa kaldte Superficie af Tin-^{teriens Mæng-}
 gene. Derfor er det, at i et luftledigt Rum en Fieder og et ^{de proportio-}
 Stykke Guld, eller det Lætteste og det Tungeste falde lige ^{nerf.}
 hastig ned efter, fordi alle Tingenes mindste Dele drives, hver
 for sig, lige stærk af Tyngden. Dette kan ikke skee udi Lusten,
 fordi denne staaer meer det Lettere, end det under samme ud-
 vortes Omsvøb tungere, imod. Men da denne Sags nær-
 mere Undersøgning henhører egentlig til Physik, saa ville vi
 her i sær deraf alene giøre en Slutning, som vi i det følgende
 overalt antage, at nemlig Tyngden giver Tingene en
 Vægt, som er deres Materies Størrelse proportionert.
 Saa Ting af dobbelt Vægt have dobbelt mange Partikler, af
 tredobbelt, tredobbelt mange, o. s. v. Dette kan ikke man-
 gle at være, saasnart som Tyngden udøver altid en indvendig
 og ligedan Trykning paa Materiernes mindste Dele, og paa
 hver af dem i sær, som om den ei stod i Sammenhæng med
 de andre.

§. 36.

Denne vigtige Sætning fortæller at gøres saa tydelig
 som muelig. Er et Pund Bly, som det sædvanlig antages,
 20 gange saa let som et Pund Guld, saa er det klart, at det
 og maa rumme og indtage 20 gange saa stor en Plads, som
 et Pund Guld. Var nu Tyngden en Kraft, der var Ting-
 ene udbendig og virkede alene omkring Peripherien, maatte
 den hvert Dieblis drive et Pund Bly 20 gange stærkere ned
 imod Jordens Center end et Pund Guld, thi Blyets Peri-
 pherie, som den virkede paa, var 20 gange større.

Følgelig maatte de tunge Ting falde langsommere end de lette, hvilket er imod al Erfaring.

Men en Ting falder hverken fastere eller langsommere end den anden. Tingene falde de letteste med de tungeste lige hastig og følge hverandre bestandig jevnside*s* i et luftledigt Rum. Altsaa kan Tyngden ikke virke paa Peripherien, den maae nødvendig virke indvendig paa Tingenes mindste Dele, saa hver drives for sig, ellers kunde denne Virkning ikke stee.

§. 37.

Naar Tingene
siges at falde.
Hvad hori-
zontale og verticale
Linier ere.

Naar de elementære Virkninger af Tyngden ei tilintetgøres hvert Diebl*ik* af en hindrende Modstand, iwerksættes de og tilveiebringe i Tingene paa alle de trykkende Kræfters Maade §. 18. 19. en Bevægelse i Materien. Saa snart den er bleven til, sig vi at Tingene falde, og dette deres Fald, saavelsom de Love, hvorefter det bor altid stee, naar intet hindrer, ere just, hvad vi i denne Forelæsning ville undersøge. Men for at handle desto ordentligere, ville vi igien kaste Dinene paa Fig. 2, og forud agte, at vi forstaa

- 1.) ved Horizontal-Linie enhver Linie AF, hvis alle Punkter staa bestandig lige langt fra Jordens Mitte T.
- 2.) ved verticale Linier alle de, som BT, TC, der staa lodret eller perpendiculair paa den horizontale Linie AF.

§. 38.

Forfællen imel-
lem de synlige
og sande Hori-

Da i de store Cirkler over et anseeligt Stykke af den krumme Linie, Nore-Linien eller Tangenten AC paa et temmelig

melig stort Stykke AD ikke løber fiendelig af fra Cirkel-Buen, horizontal- og Vertical-Linier. men kan ansees som at falde ind i og at giøre en Linie med den, saa kaldes Nore-Linien AC derfor ligeledes Horizontal-Linien; men for at giøre Forskiel imellem begge, kaldes man AF den sande, og AC den synlige eller apparente Horizontal-Linie.

Ligeledes kaldes alle Perpendicularerne, som DE; eller de Linier, der ere lodrette paa den synlige Horizontal-Linie, de synlige Verticaler, da derimod de forømtalte, som BT, CT, kaldes de sande Verticaler.

§. 39.

Man seer derfor let, i Følge §. 37 og 38,

- I.) at den sande Horizontal-Linie er en Cirkel-Linie eller et Stykke af en Cirkel, hvis Middelpunkt er Jordens Center. Forflares videre.
- 2.) at de sande Verticaler ere Jordens Diametre, forlængede, om nodig gøres.
3. at paa smaa Løb i ret Linie, saavel den synlige Horizontal-Linie, som de synlige Verticaler, kunne bruges i Steden for de sande af samme Navn, uden fiendelig Feil. Thi endskjønt de sande Verticaler løbe sammen i Jordens Middelpunkt, er dog Jordens Halv-Diameter saa lang, at paa smaa Løb i ret Linie som AD, Vinklen ATD kan ansees for intet, og selgelig Linierne AT og DT som ligeløbende eller parallelle.

§. 40.

De tunge Ting
falde altid i de
sande Verticaler
ned imod Jor-
dens Center.

Vi skulle i det følgende faae at see, at saa ujevn som den øvrige Jord er, saa horizontale derimod staae Vandene, man kalder derfor med Det Horizontal-Linien Vand-Linien. Virkelig er det og deraf, at nemlig alle tunge Ting falde lodret ned paa Vandene, at vi vide og overbevise os om, at de tunge Tings Fald altid skeer i Verticalen. Man kunde derfor kalde denne sidste den Vand-Lodrette Linie.

§. 41.

Maade at be-
stemme den syn-
lige Vand-Linies
Afvigning fra
den sandes.

Da vi have begyndt at tale om Forskiellen imellem den sande og synlige Vand-Linie, saa ville vi til videre Brug i det følgende fortsætte disse Betragtninger. Da man strax seer, at i store Løb over AC Forskiellen imellem Nøre-Linien AC og Buen AF (see Fig. 2.) altid maa blive anseelig; i C nemlig er man virkelig borte fra den sande Horizontale-Punkt om den Linie CF. Denne Forskiel er imidlertid let at finde, alene at Jordens Halv-Diameter er bekiendt. Thi vil man antage, at AF er en Bue af Jordens Cirkel-Runding, da bliver

$$CK. CF = AC^2.$$

Men FC bliver altid i de Maalninger, vi kunne foretage, en uendelig liden Deel af KF eller af Jordens Diameter, folgelig $CK = FK$. Og altsaa

$FK. CF = AC^2$ eller $\frac{AC^2}{KF} = FC$, som var den søgte Linie, eller den synlige Vand-Linies Afvigning udi C fra den sande i F.

§. 42.

§. 42.

I vore Geographiske Forelæsninger skulde vi vise, hvorledes Jordens Diameters Størrelse kan findes. Man Det samme i enkelte Tilfælde. har, under Betingning af, at den holdt i Længde 6538594 franske Roder, forferdiget følgende Tabelle, hvilken og paa en Længde af synlig Vand-Linie, der ei er større end 1000° kan ansees, som gandske nøie og rigtig, skiont Jordens Diameter virkelig er omtrent $\frac{1}{464}$ længere end det i Udreigningen antagne Maal. Man seer af Tabellen, at Udreigningen er gjort i 12 Tomme Maal.

Synlig Horizontal-Længde.

Udsvigninger eller CF.

Ruter.					Ruter.	Fod.	Tom.	Linier.
50°	—	—	—	—	0	0	0	$\frac{1}{3}'''$
100°	—	—	—	—	0	0	0	$1\frac{1}{3}'''$
150°	—	—	—	—	0	0	0	3'''
200°	—	—	—	—	0	0	0	$5\frac{1}{3}$
250	—	—	—	—	0	0	0	$8\frac{1}{3}$
300	—	—	—	—	0	0	1''	0
350	—	—	—	—	0	0	1''	$4\frac{1}{3}$
400	—	—	—	—	0	0	1''	$9\frac{1}{3}$
450	—	—	—	—	0	0	2''	3
500	—	—	—	—	0	0	2''	9
550	—	—	—	—	0	0	3''	6
600	—	—	—	—	0	0	4''	0
650	—	—	—	—	0	0	4''	8
700	—	—	—	—	0	0	5''	4
750	—	—	—	—	0	0	6''	3

800

800°	—	—	—	—	0 . 0 . 7" . 1"
850°	—	—	—	—	0° . 0° . 7" . 11½"
900	—	—	—	—	0 . 0 . 8 . 11
950	—	—	—	—	0 . 0 . 10 . 0
1000	—	—	—	—	0 . 0 . 11 . 0

Man seer let, hvorledes en saadan Tasse videre kan fortsættes, saavidt man selv vil, thi da $FC = \frac{AC^2}{KF}$, og KF er bestandig, imidlertid at AC^2 og FC ere foranderlige, saa er FC altid som AC^2 , og folgelig alle Afvigningerne fra den sande Horizontale-Linie som Quadraterne af Længderne udi den synlige Band-Linie.

§. 43.

Tyngden paa Jorden er egentlig som Quadraterne af Distancen fra Jordens Centrum, men den kan desuden antages her hos os, som en bestandig hastiggjørende Kraft.

Man beviser i Physik, og vi skulle i disse Forelæsninger forklare de didhen hørende Grunde, at Tyngden uden for Jorden yttre sig i dens Virkninger Af- og Tiltagelse efter Quadraterne af Distancerne fra Jordens Centrum forkeert tage. For desto bedre at forstaae dette, ville vi antage (see Taf. I. Fig. 2.), at T er Jordens Middelpunkt, LT en simpel Distance fra samme, AT derimod entredobbelt, da forholder sig Tyngden i L til Tyngden i A, som Quadraterne af TL og TA. forkeert tage som 9 : 1. Det er, Tyngdens Trykning udi A er ikke uden $\frac{1}{9}$ af Trykningen udi L. Var $AT = 4TL$, blev Tyngden udi A $= \frac{1}{16}$ af Tyngden udi L, eller Tyngden i L forholdt sig til den i A $= 16 : 1$. o. s. v. Men deraf sees, at om det Fald, Tingen gjør igiennem en Linie, som AM, er af den Beskaffenhed, at

AM

AM altid er som Intet at regne i Henseende til AT eller MT, da bliver altid $\frac{I}{AT^2} = \frac{I}{MT^2}$ hele Faldet igiennem, og selvfølgelig Trykningen af Tyngden over den hele Linie AM, eller igiennem det hele Fald, eensdan.

Da nu i alle de Tilfælde, som ei alene i vores Mechanik kunde forekomme, men endog i alle mulige, i hvilke vi kunne bruge Tyngderne, AM altid bliver, som intet imod AT, eller imod den hele Distance, reignet fra Jordens Centro af, Saa kan og over alle de Distancer, igiennem hvilke tunge Ting her hos os kunde falde, Trykningerne af Tyngden bestandig, hele Faldet igiennem, ansees for at være eensdanne. Saa Tyngden med Ret siges her hos os at være en Kraft, som alle Pieblis meddeler Tingene en ligedan Fart, eller, som alle Pieblis virker eensdan. Og dette er, hvad vi i Machin-Væsenet og i Tyngdens Virkninger her hos os, herefter bestandig antage; da vi derimod, saa tidt vi handle om de store Naturens Virkninger i store Distancer uden for Jorden, holde os til den anden Hypothese af Tyngden, den, der er som Quadraten af Distancen forkeert.

§. 44.

Disse to Hypotheser; den ene, at Tyngden paa korte Distancer hos os er bestandig, den anden, at den er, som Quadraten af Distancen forkeert; ere iblant en utallig Mængde, som de mekaniske og physiske Skribentere, i sær under Navn af Central-Kræfter, gjøre over Tyngden, de to eneste, som stemme med Naturen. Deres Nytte er derfor og

E

ubeskri-

ubestribelig stor. Imidlertid maa man ikke troe, at de geometriske Undersøgelser ere unyttige, som i adskillige andre Hypotheser ere blevene giorte med en saa besynderlig Konst og med saa megen Genie. Tvertimod; iblant Naturens Handlinger forekomme nogle vanskeligere, hvor flere Aarsager stode sammen, hvis Virkning de sædvanlige Tyngdens Love ei ere tilstrekkelige nok til at forklare, der er det, at man maa giette sig fort; der er det, at disse Hypotheser behøves.

§. 45.

Bevægelsen af Tyngden her hos os er en eensdan formert Bevægelse. Og Hastighederne i de tunge Tings Fald ere proportionerte Tidene, i hvilke Faldet staaer paa.

Bevægelsen af Tyngden, eller de tunge Tings Fald her hos os kaldes en eensdan formert Bevægelse, fordi Hastigheden maa nødvendig i den vore og formeres i lige Forhold med Tiden. Thi da vi her antage, at ingen udvortes Forhindring gjør Virkningerne af Tyngden til intet, saa følger, at den i første Dieblis tilveiebragte Hastighed bliver ved, §. 8. 19. men, da i det andet en ligesaa stor bliver til ved den anden Trykning af Tyngden, og begge blive ved; imidlertid at Tyngdens tredie Virkning forarsager en endnu ligesaa stor Hastighed, som de forrige; saa er det klart, §. 43, at Hastighederne i de tunge Tings Fald altid blive i samme Forhold som Tidene.

§. 46.

De, som ikke med desto større Altsomhed have eftertænkt det foregaaende, ville maaskee troe, at det er en blot Hypothese, naar vi antage, at Tyngden her hos os virker alle

alle Dieblig eensdan, og ville maaskee spørge, hvorfor vi antage dette sidste saa tilforladelig. Sikkerlig bør Grundsætningen til den største Deel af Mechanik og Physik ei være hypothetisk. Man maa derfor agte, at foruden, at vi i det følgende skulle bevise denne Sag ved experimentale Beviis, er den allerede bleven beviist §. 43. Thi at Tyngden er i sig som Quadraten af Distancen forkeert, veed man vist, og det skal i det følgende blive uimodsigelig beviist, uden Hielp af det her antagne: men deraf flyder, §. 43. at Tyngden, her hos os, maa blive alle Dieblig eensdan i sin Virkning paa de smaa Distancer, over hvilke Legemerne her kunde falde. Saa det er egentlig af Maaden, hvorledes Tyngden virker i Planeterne, at vi vide, hvorledes den virker hos os.

§. 47.

Deraf følger, at de fra Begyndelsen af Faldet indtil Enden igiennemløbne Rum i adskillige Ting's Fald, ere som Quadraterne af Tiderne; eller, om man vil, som Quadraterne af de ved det hele Fald vundne Hastigheder; begge Dele kommer paa et ud, da Hastighederne og Tiderne ere hoerandre proportionerte. §. 45.

Thi, om i Trianglet EFG. (Taf. 1. Fig. 3.) Tiden forrestilles ved den Linie EF: saa i E Faldet begynder, varer siden i saa lang Tid ved som EF, og endes udi F, da kunde Hastighederne, som ved Faldet ere bleve vundne i de Tider Ea og EF, forestilles ved de ligeløbende eller parallelle Linier ab og FG, §. 45. hvoraf følger, at siden i en uendelig liden

I de tunge Ting's Fald ere de igiennemløbne Rum under sig som Quadraterne af Tiderne, hvori Faldet staaer paa, eller, som Quadraterne af de ved det hele Fald vundne Hastigheder.

Deel af Tiden Hastigheden maa i Bevægelsen være eensdan, §. 35; om da ca er en saadan uendelig liden Deel af Tiden, blive ab og dc lige store, og $abcd$ et Parallelogram, thi ab falder uendelig nær ved dc og den Parallel. Men dette Parallelogram forestiller det i den Tid eller Element af Tid ca igiennemløbne Rum, hvilket er som Hastigheden multiplicert med Tiden, §. 13. Men betragter man den hele Tid EF , som inddeelt i lutter deslige uendelig smaa Tider, som ca , da er det klart, at det hele Triangel-Rum EFG bliver derved inddeelt i lutter smaa Parallelogrammer, som $abcd$, og følgelig, at det igiennemløbne Rum i Tiden Ea er i Forhold med Trianglet Eab , og ligeledes i Tiden EF med Trianglet EFG . Følgelig ere de i Tiderne Ea og EF igiennemløbne Rum som Trianglerne Eab og EFG : Men disse Triangler ere ligedanne Triangler, fordi ab er parallel eller ligeløbende med FG , og ligedanne Trianglers Rum forholde sig som Quadraterne af deres proportionelle Sider, altsaa er Trianglet Eab til EFG , det er; de i Tiderne Ea og EF igiennemløbne Rum ere som $Ea^2 : EF^2$. Det er, som Quadraterne af Tiderne, følgelig og som Quadraterne af Hastighederne. §. 45.

§. 48.

Tiderne derimod og Hastighederne ere som Quadraterne af de igiennemløbne Rum.

Deraf flyder; at saavel Tiderne, som Hastighederne ere under sig som Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum, ved at falde igiennem hvilke, Hastighederne vindes.

§. 49.

§. 49.

Og endnu meer. At i samme Tid, i hvilken ved en idelig formert Bevægelse et Rum A kan igiennemløbes, kan med den i Enden af Faldet vundne Hastighed FF et dobbelt Rum 2 A igiennemløbes.

Thi det i Tiden EF i idelig formert Bevægelse igiennemløbne Rum er som Trianglet EFG, §. 47. men, om i samme Tid EF med den usforandrede Hastighed FG et Rum var bleven igiennemløbet, da var det som Parallelogrammet EFGH, der med Trianglet EFG haver samme Grund-Linie og Høide. Thi i den eensdanne Bevægelse ere de igiennemløbne Rum, som Tiderne multiplicerte med Hastighederne. §. 13. Følgelig er det sidste Rum dobbelt saa stor som det første.

§. 50.

Bidere følger, at de i lige Dele af Tiden, i hvilken Faldet varer, igiennemløbne Rum forholde sig i den arithmetiske Forhold af de ulige Tal: 1. 3. 5. 7. 9. 11. o. s. v.

Thi, dersom den Deel af Rummet, som i den første Deel af Tiden er igiennemløben, kaldes 1, da er den i to lige Tider igiennemløbne = 4, §. 47, i 3 Tider igiennemløbne = 9, i 4 Tider igiennemløbne = 16, o. s. v. trekkes de første idelig fra de sidste, saa er

Tider =	1.	2.	3.	4.	5.	6.	o. s. v.
igiennemløbne Rum i de hele Tider =	1.	4.	9.	16.	25.	36.	o. s. v.
igiennemløbne Rum i enkelte Tider =	1.	3.	5.	7.	9.	11.	o. s. v.

§. 51.

At bestemme,
hvor langt en
ting Ting fal-
der i frie og u-
hindret Fald i en
given Tid.

Man veed; at en Ting, som falder frit uden Modstand, igiennemløber i et Secund af Tid $15\frac{1}{2}$ Pariser Fod, eller $15\frac{1}{2}$ Danske Fodder, (naar Forholden imellem den første Fod til den sidste sættes at være den af 7200 : 7017) og vi skulle i det følgende vise, hvoraf man veed det. Vi ville her sætte, at det i et Secund igiennemløbne Rum er $15'$, folgelig findes deraf let, hvad Rum der igiennemløbes i enhver given Tid t . Thi

$$1'' : 15' = t^2 : 15t^2. \text{ §. 47.}$$

Saa man haver alene nodig at multiplicere Quadraten af den givne Tid med $15'$, for at finde de i den ved Faldet igiennemløbne Fodder.

§. 52.

De tunge Ting
kunde, om intet
svækkede deres
Fald i et Minut
igiennemløbe et
Rum, større end
3 og tre femte
deel Wiil.

Man seer deraf, at om Luften ei svækkede Hastigheden, blev den, endog i en kort Tid, overmaade anseelig. Thi sættes Tiden alene et Minute eller $60''$, og man vil søge det i samme igiennemløbne Rum, da er det 3600 multiplicert med 15, eller 54000. Regnes nu Milen til 3000 geometriske Skrit, hver paa 5 Pariser Fod, og altsaa paa 15000 Foder, da igiennemløbes af en faldende Tyngde i et Minut saa omtrent $3\frac{2}{3}$ Wiil.

§. 53.

At finde de i
lige Tider hele
Faldet igiennem

Naar man saaledes veed, hvad Rum der igiennemløbes i en Deel af Tiden, er det let, at finde de i andre ligesaa store

store Dele igiennemløbne Rum ved de §. 50 givne Forhold: igiennemløbne Rum.
 $1 : 3 : 5 : 7$. o. s. v.

Thi er det i en Deel af Tiden igiennemløbne Rum $= a$,
 bliver det i den anden næstfølgende lige store Deel igiennemløbne
 $3a$, i den tredie $5a$, o. s. v. Saaledes, naar i det første Se-
 cund igiennemløbes $15'$, igiennemløbes i det andet 45 , i det
 tredie 75 , o. s. v.

§. 54.

Ligeledes; om man vil, af det i en heel Tid t igiennem- Ligeledes, at
 løbne og bekiendte Rum a finde, hvad Rum der i en anden finde af det i en
 Tid d fra Begyndelsen af Faldet til Enden skal igiennemløbes, givne heel Tid
 da om samme Rum kaldes x , er igiennemløbne
Rum, det hele

$$\frac{a : x = t^2 : d^2}{\frac{ad^2}{t^2} = x.} \quad \text{§. 47.}$$

Faldet igiennem
i en anden Tid
igiennemløbne
Rum.

§. 55.

Vi have seet, hvorledes de i givne Tider igiennemløbne Den uligedans-
 Rum kunde findes. Men for at gjøre de nødvendige Udreg- ne Bevægelse
 ninger, som høre til denne Theorie af Tyngden, og som i maa, for at kun-
 Mechanik og Machin-Væsenet i utallige Tilfælde behøves, er ne forstaaes, al-
 dette langt fra ikke nok. Man maa vide, at sammenligne tid bringes paa
 Hastighederne med de igiennemløbne Rum, og Tiderne med den eensdanne,
 begge, og i alt dette agte, at saa tidt, som man vil have et og denne igjen
 tydeligt Begreb om den eensdan formerte Bevægelse, og den gives i Secun-
 ved samme tilveiebragte Hastighed, maa man altid bringe det
 dertil,

dertil, at denne sidste i Enden af Faldet saaledes forklæres, at man veed, hvor mange Fod den faldende Ting i eensdan Bevægelse kan igiennemløbe i et Secund af Tid; thi ellers har man intet nyttigt og tydeligt Begreb om Hastigheden. Vi ville oplyse dette videre, ved at igiennemgaae de fornem- meste og vigtigste herhid hørende Tilfælde, i hvilke vi ikke ville see paa de simple Forhold, men paa de virkelige Storrelser's virkelige Bestemmelse.

§. 56.

At finde, hvor mange Fodder i eensdan Bevægelse og i et Secund af Tid et Legeme kan løbe, som er Faldet igiennem et vist Rum.

Saaledes spørges, naar et Legeme falder igiennem et Rum R, hvad Hastighed haver det da vundet i Enden af Faldet, det er, hvor mange Fodder kan det i eensdan Bevægelse igiennemløbe i et Secund af Tid?

For at opløse dette Spørgsmaal, maa man agte, at den store Hoved-Unité, til hvilken, som Maal, vi henføre alt, faaes ved den Erfaring, at et Legeme ved sin Tyngde i det første Secund af Faldet, falder 15 Pariser Fod; hvilket man i Bru- gen eller Praxis altid kan antage, uden at faae for lidet, fordi Luften, ved at staae imod, svekker Bevægelsen.

Legger man til denne Anmerkning den anden, §. 49, saa er det klart, at et Legeme, ved at falde igiennem 15', vinder en eensdan Hastighed i et Secund af 30'. Følgelig opløses let det foresatte Spørgsmaal, thi da Hastighederne ere som Quadrat-Rodderne af de igiennemløbne Rum, saa bliver, om den søgte Hastighed kaldes x,

$$\sqrt{15} : 30 = \sqrt{R} : x \text{ og } x = \frac{30\sqrt{R}}{\sqrt{15}} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot R}$$

$$\text{følgelig } x = \sqrt{60R}$$

saa man deraf let forstaaer følgende Regel.

For at finde, hvad Hastighed i eensdan Bevægelse henregnet til et Secund, et Legeme kan vinde, ved at falde igiennem en vis Høide R, behøves intet andet, end at multiplicere denne Høide med 60, og af det udkommende at trække Quadratkoden.

Exempel. Et Legeme falder igiennem 400', saa bliver den eensdanne Hastighed i et Secund $= \sqrt{400 \cdot 60} = \sqrt{24000}$, eller noget næsten 155 Pariser Fod.

§. 57.

Ligeledes, naar den Hastighed er given, hvormed et Legeme i eensdan Bevægelse i et Secund af Tid løber fort, da at finde den Høide, ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed kan vindes. Af den givne Hastighed at finde den til samme svarende Rum.

Uniteten er her ligeledes de 15 Pariser Fod i et Secund. Thi da en eensdan Hastighed i et Secund af 30' vindes ved at falde igiennem et Rum af 15 Pariser Fod, saa om den givne Hastighed kaldes H, det Rum, igiennem hvilket den ved Faldet skulde vindes, x, da siden, ligesom i nest forrige Oplosning, Hastighederne ere som Quadratkoderne af de igiennemløbne Rum, saa bliver

$$30 : \sqrt{15} = H : \sqrt{x}, \text{ og } x = \frac{H^2}{60}$$

hvoraf flyder følgende Regel.

§

For

For at finde den Heide, ved at falde igiennem hvilken en vis Hastighed kan vindes, behøves alene at tage Quadraten af denne Hastighed, og at dividere den med 60, saa faaes i Fodder den søgte Heide.

Exempel. En faldende Tings eensdanne Hastighed i et Secund er i Enden af Faldet $\sqrt{24000}$, hvad er Rummet, ved at falde igiennem hvilket denne Hastighed vindes.

Saa sees, at det bliver $\frac{24000}{60}$ eller 400 Fod.

Vi kunde her gjøre ligedanne Anmerkninger i Henseende til Tidens Sammenligning med Rummet og Hastigheden, men da disse Betragtninger ikke ere saa vigtige, som de forrige, ville vi derved ei opholde os. (*)

Andet Tillæg.

Almindelig Theorie for Bevægelsen, i sær for den, som skeer udi ret Linie, saavel som Udregning af de fornemmeste Tilfælde i Inertiernes frie og retlinede Bevægelse.

§. 3.

I den frie Bevægelse er Ligebeden imellem Tiden, Hastigheden og den høi- **A**lt hvad der henhører til at udreigne og at forstaa Beskaffenhederne af Tingenes frie Bevægelse udi ret Linie, beror paa det hidtil sagte, og kan ved Hielp af følgende Anmerkninger let forrettes.

Man

(*) Man finder dem i Tillægget til denne Forelæsning.

Man maa agte, at alle de herhid hørende Spørgsmaal beroe paa ^{stiggierende} at finde enten Hastigheden af Bevægelsen, eller den Tid, hvori den ^{Kraft, som ide-} skeer, eller Rummet, som uden Hinder og Modstand igiennemløbes, ^{lig driver et} eller Kræfterne, som forårsage Bevægelsen. Saa maa man see paa ^{Punkt, $npdt =$} de almindelige Sætninger, hvilke, naar visse foranderlige Størrelser ^{mdv .} efter Omstændighederne forandres, da kunne passe sig til alle Tilfælde. Af deslige Sætninger have vi i det foregaaende §. 1. allerede anført den fornemmeste, $pdt = mdv$, som er den Forhold, der er imellem den trykkende Kraft, Tiden, hvori den virker, og Hastigheden, som den i den bevægede Materie tilveiebringer eller forandrer. Men da $pdt = mdv$ er her alene en Forhold, og vi antage, at Virkningerne ere bestandig deres Årsager paa samme Maade, fuldkommen nemlig, proportionerte; saa bliver $npdt$ saa stor som mdv , n er her en altid bestandig og uforanderlig Størrelse, som man engang for alle bestemmer udi et enkelt Tilfælde ved Erfaring.

§. 4.

I den Lighed $npdt = mdv$, som kan forandres til denne anden Lighed den $dv = \frac{np}{m} dt$, er $\frac{p}{m}$ det man kalder den accelererende eller ^{stiggierende} $\frac{p}{m}$ den hastiggierende Kraft, thi da p er den hele Trykning paa Inertien ^{Kraft.} eller Materien m , fordi vi betragte her ingen anden Modstand end Inertiens, saa er $\frac{p}{m}$ Virkningen af den trykkende Kraft paa et hvert Punkt i Materien eller enhver dens mindste Deel; altid noget saadant, som det vi kalde Tryngen, i Henseende til Maaden, hvorpaa der virkes. Dette er og Årsagen, hvorfor vi her ansee den bevægede Materie, som et Punkt. See §. 35. Forelæs.

§. 5.

Er $\frac{p}{m}$ en altid
ligedan virkende
Kraft, som
Tynaden hos os,
da bliver Lighet
den $ngdt = dv$.

Vi ville giere Brug af det allerede sagte, for at see dets Myt-
te, og derfor undersøge, hvad Henseende Hastigheden faaer til Rummet
i det feremtalte Tilfælde, da Tynngen eller en anden saadan Kraft
virker, og naar den virker som her hos os, altid eensdan og lige stærk.

I dette Tilfælde bliver $\frac{p}{m}$ en bestandig Størrelse. Thi p kan ellers være
givet i foranderlige Størrelser, algebræiske eller transcendente og
bestandige, som man selv vil, og enhver givet enkelt Tilfælde det
udfordrer. Sættes da $\frac{p}{m} = g$, da forandres saaledes Ligheden $\frac{np}{m} dt$
 $= dv$ til denne anden

$$ngdt = dv.$$

som er den simpleste, men fast nyttigste Tilfælde af alle.

§. 6.

Den almindere
lige Lighed imel-
lem Rummet og
Hastigheden i en
uendelig liden
Tid er $dy = vdt$

Her vi nu kunne deraf udlede, hvad vi ville, i Henseende til
Rummet, der igiennemløbes; maa vel agtes, at dertil behøves en
Sætning, hvilken viser, hvad Forhold Hastigheden haver til det
Rum, som igiennemløbes i en uendelig liden Tid. Da nu i denne
sidste Hastigheden altid er eensdan, saa er Rummet i Forhold med
Hastigheden multiplicert med Tiden, og altsaa, om Hastigheden kaldes
 v , Tiden dt , som før et uendelig lidet Stykke Rum, som igien-
nemløbes udi Tiden dt , dy . Da bliver

$$dy = vdt. \text{ §. 13. Forelæsn. (*)}$$

§. 7.

(*) Vil man, at den Lighed $dy = vdt$ skal være i sit Slags den allermin-
deligste, da bliver $y = \int vdt$, hvor Hastigheden v kan være, hvad den
skal, eller, som man kalder det, hvad for en Function af Størrelser, som
man vil, af algebræiske foranderlige og bestandige, af transcendente, af

§. 7.

Saaledes bliver $\frac{dy}{v} = dt$. Hvilket om sættes i Steden for dt i Ligheden §. 5. $ngdt = dv$, da faaes $\frac{ngdy}{v} = dv$ eller $ngdy = vdv$, som er en Lighed, der altid viser Forholden af Hastigheden til det igiennemløbne Rum. Og for Kræfterne i Almindelighed bliver $\frac{np}{m}dy = vdv$.

Den almindelige Plads for Kræfterne, Rummet og Hastigheden i en uendelig liden Tid er $\frac{np}{m}dy = vdv$.
For Tyngden $ngdy = vdv$.

§. 8.

Slutningerne selv ere nu i det Tilfælde, da g er en bestandig Størrelse, overmaade lette. Man kan alene forud agte, at naar en trykkende Kraft driver bestandig mod et og det samme Punkt B,

Hvad Krafternes Center er.

§ 3

(Taf.

Størrelser, som indeholde andre, der ikke kunne integreres, af exponentialte, med et Ord; af alle de, som man i Algebre kiender og kunde tænkes. men saa tidt som $\sqrt{vdt}$ ei kan integreres, eller i det mindste af integrable Ligheder construeres, er denne almindelige Lighed i enkelte Tilfælde til ingen Nytte.

Hvad der i Mechanik beroer paa mekaniske Constructioner af utallige Punkter og uintegrable Formuler, tiener ikke stort til almindelig Nytte. Imidlertid kan jeg, i Anledning af dette, ikke undlade, at sige med et par Ord, hvad det er, man i de mekaniske Skrifter kalder Hastighedernes Sted, (Locus eller Scala celeritatum). Det er da (see Taf. 2. Fig. 2.) en Linie, krum eller ret, som ADL, udi hvilken i vor Tilfælde, da $dy = vdt$. AB Afsnit af den krumme Linie forestiller Tiden, den krumme Linies Ordinater BD og CE forestille v eller de idelig foranderlige Hastigheder, saaledes som den givne Hypothese det medfører. Saa bliver BDEC $= dy =$ det igiennemløbne Rum, som man veed, hvad er, saa tidt som den krumme Linies ADL innere Rum, som ABD, ere integrable. Man kan gjøre ligesaa almindelige Anmerkninger, i Henseende til Rummet, Tiden og Kræfterne. De krumme Linier, hvis Ordinater, eller Duer, eller Rum, eller visse Dele, paa hvad Maade de end tages i en uoverbrudt Orden, vise

(Taf. 1. Fig. 4.) saaledes, for Ex . som Tyngden bestandig driver imod Jordens Middel-Punkt, da kaldes det Punkt B Kræfternes Center.

§. 9.

Naar den hastiggjørende Kraft er hele Virkningen igiennem bestandig, er altid det igiennemløbne Rum proportionert Quadraten af Hastigheden i Enden af Faldet.

Er da AB den Linie, igiennem hvilken en Tyngde falder, (Taf. 1. Fig. 4.) B Kræfternes Center; i A Begyndelsen af Faldet; $Ad = x$, $de = dx$, og den trykkende Kraft eller Tyngden er en bestandig Størrelse $= g$. Da er §. 7. $ngdx = vdv$, (thi dy forandres her til dx), af hvilken Differential Lighed, naar tages hele Summen eller Integralen, bliver $ngx = \frac{1}{2}vv + B$. B betyder en bestandig og altid uforanderlig Størrelse, som, fordi den er uforanderlig, under Differentiationen altid forsvinder. For at bestemme B, maa agtes, at i A, hvor $x = 0$ er og $v = 0$, selvselig bliver og $B = 0$, thi man faaer $0 = 0 + B$, saa at man finder simpel hen $ngx = \frac{1}{2}vv$.

Da nu ng og $\frac{1}{2}$ ere uforanderlige Størrelser, i Følge vores antagne: saa bliver altid $x = vv$, eller det igiennemløbne Rum, i Forhold med Quadraten af Hastigheden. Saa at, saa tidt som den hastiggjørende Kraft er bestandig, hvad heller den er saa stor som Tyngden eller ei, gielder altid den samme Regel som før, §. 47. Forcl., at nemlig det igiennemløbne Rum er som Quadraten af Hastigheden.

§. 10.

Ere dødlige Kræfter foranderlige under

Da i Almindelighed $ngx = \frac{1}{2}vv$, saa er $v = \sqrt{2ngx}$, altsaa Hastigheden i Forhold med Quadrat-Roden af Høiden eller Rum:

Hastighedernes, eller Tidernes, eller Kræfternes Fortgang, kaldes disse deres Etader.

Rummet, igiennem hvilket Faldet skeer. Den Hastighed nemlig, sig, da blive som faaes i Enden af Faldet. Thi $2ng$ er en bestandig Størrelse og hastigheder proportioner den derfor $v = \sqrt{x}$, eller v proportionert $\sqrt{x}$. sammensatte

Ansees videre de bestandige hastiggjørende Kræfter under sig som Forhold af foranderlige, da sluttes videre: Rummet og af Kræfternes

1) at v er som $\sqrt{gx}$, det er; Hastighederne, som tilveiebrin-
ges i samme Tid af adskillige hastiggjørende, men bestandige, Kræfter, der. Quadrat-
ere altid i sammensat Forhold af disse hastiggjørende Kræfters Quadrat-
Medder og af Rummets Quadrat-Medder.

2) Er v bestandig, da bliver $x = \frac{1}{g}$. Følgelig blive de
Heider, ved at falde igiennem hvilke lige store Hastigheder vindes, i
forkæert Forhold af de bestandige Kræfter, som forårsage dem.

§. II.

Vil man af den Lighed $ngx = \frac{1}{2}vv$ eller $2ngx = vv$, i Maade at be-
enhver given enkelt Tilfælde, strax af x finde v eller hvad Hastighe-
den er udi Fødder, som med en ligedan Bevægelse kunde igiennemlø-
bes udi et Secund. Da maa ved et Forsøg i en enkelt Tilfælde Stør-
relserne af n og g først fastsættes. Dertil tiener, hvad i den anden Fore-
læsning er bleven sagt, og vi ser have betient os af, at de tunge Ting
løbe i frie og uhindret Bevægelse omtrent igiennem et Rum af $15\frac{1}{12}$
Pariser Fod. Eller endnu neiere af $15' 1'' 8'''$, som gier noget
nesten i Decimal-Broøk $15,0976$ Pariser Fod. Man kan betiene sig
af dette sidste Tal, saa tidt som det er magtpaaliggende meget neie at
finde den igiennemløbne Heide, og endnu bedre af den Rhinske Fod,
for at faae $\sqrt{g}$ i hele Tal. Thi naar den Rhinske Fod forholder
sig til den Franske som $139 : 144$ eller $1000 : 1035$ beløber

15, 0976 Pariser Fod sig i Rhinske Fodder til 15, 626, hvorfor kan tages 15, 625, fordi den nye Quadrat-Rod er deraf 125. Man kan derfor i Sætningen $ngx = \frac{1}{2}vv$ (siden to gange det Rum igiennemløbes med den i Enden af Faldet vundne Hastighed, som det Rum selv er, igiennem hvilket Hastigheden vindes, §. 36. F.) sætte til $x = 15, 625$, $v^2 = (15, 625)^2 \cdot 4$, saa bliver $2ngx = v^2 = (15, 625)^2 \cdot 4$. Men x er da $= 15, 625$, altsaa $ng = (15, 625) \cdot 2$. Sættes $n = 1$, bliver $g = 31250$ Rhinske Fod. Saa man deraf seer, at naar denne Værdie for g vedligeholdes, som er Tyngdens naturlige Virkning i et Secund, maalt efter den forarsagede Hastighed i eensdan Bevægelse, saa kan overalt i de forrige Ligheder n sættes $= 1$. Men en saa nye Bestemmelse af g bekræftes ikke uden sielden.

§. 12.

Der samme
anderledes. Og
hvorledes af
Høiten altid
den eensdanne
Hastighed til et
Secund i En
den af Faldet
kan findes.

I de fleste Regninger kan det være nok at sætte $ng = 36'$ Pariser eller Dansk Maal, siden Forskiellen imellem begge ikke er af Betydning, eller $n = 2$, $g = 15$ eller $n = 1$, $g = 30$, og bliver da bestandig $v = \sqrt{60x}$. Er $x = 40$, bliver Hastigheden $= \sqrt{2400}$ Fod, i eensdan Bevægelse i et Secund. Er $x = 50$, bliver $v = \sqrt{3000}$ Fod, hvilket ligeledes findes af de foregaarnde Regler §. 56. Forel.

§. 13.

Ligeledes, naar
denne Hastighed
er givet, at finde
den til samme

Ligeledes sees, hvorledes man altid kan, naar Hastigheden til et Secund er givet, finde det Rum eller den Høide, ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed kunde findes, og det endnu lettere end

§. 57. Herel. hvor vi sagte, at giøre denne Sag saa klar, som muelig; thi da $v = \sqrt{60x}$, er da $v = \sqrt{3000}$, saa bliver $3000 = 60x$ og $x = 50$. Er $v = \sqrt{2400}$, da er $2400 = 60x$ og $x = 40$, saa man ikke behøver uden den samme Lighed for at opløse begge disse Tilfælde §. 12 og 13.

§. 14.

Man kan ligeledes giøre deslige Anmerkninger i Henseende til Tiden; thi om $n = 1$ er $gdt = dv$, og $gt = v$, altsaa kan altid af Hastigheden de Secunder Tid findes, i hvilke Hastigheden ved Tyngdernes ubindrede Fald kunde vindes. For Ex. sættes $2g = 60'$ som før, er $g = 30$, og $30t = v$. Er da den eensdanne Hastighed $30'$, bliver $t = 1''$, er Hastigheden 60 Fod i Secundet, bliver $t = 2''$, er den 90 Fod i Secundet, bliver $t = 3''$, og overalt sees:

- 1.) At altid, saa længe Tyngden er bestandig, bliver Tiden i lige Forhold med Hastigheden, og
- 2.) at under adskillige, men bestandige hastiggjørende Kræfter, ere Tiderne af Faldet, som Hastighederne ligestrem tagne, og de hastiggjørende Kræfter forkeert tagne.

§. 15.

Den tredie Tilfælde, som her er af Vigtighed, bestaaer i at finde en Lighed imellem Rummet og Tiden, for at have en Hovedsætning for alle de Tilfælde, som dertil henhøre. Man maa da vel agte, at, saasnart som der handles om en vedvarende Pression, er ikke meer $\frac{p}{m}dt = dy$. Hvilket vi og forhen have erindret §. 2.

Ihi denne Lighed gielder ikke, uden for saavidt som en Elementer-Pression forvolder en aldeles simpel og eensdan Bevægelse ved en eneste simpel Virkning. Saa tidt, som Virkningen varer ved, seer man let; at det igiennemløbne Rums Størrelse beroer ei alene paa Pressionernes umiddelbare Virkning i enhver af de uendelig smaa Tider, men desuden paa den Hastighed og Fart, som allerede ved de foregaaende Virkninger er bleven meddeelt. Da derimod den hele Hastighed er intet andet end Summen af alle de elementære Hastigheder, som i samtlig de uendelig smaa Tider og i hver af dem for sig meddeles. Den sande Forhold, hvilken her er imellem Rummet, Hastigheden og Tiden, er den af $dy = vdt$ §. 6. Altsaa; for at komme til en Differential-Lighed imellem Rummet og Tiden, maa v gives i y , og desuden Forholden $dy = vdt$ forandres til den Lighed, $mdy = vdt$. Da nu §. 12. $v = \sqrt{2gy}$, thi i Steden for Hastigheden kan altid Quadrat-Roden af den Høide sættes, ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed vindes. §. 10. Om ellers de virkende Kræfter ere bestandige. Saa bliver $\frac{mdy}{\sqrt{2gy}} = dt$, hvoraf Summen er $\frac{2m\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$, uden at legge en bestandig uforanderlig Størrelse til af de §. 9. anførte Marsager.

Deraf sees 1) at saa tidt som de hastiggierende Kræfter ere bestandige, ere Tiderne som Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum. Og

2) at, naar disse Kræfter vel ere bestandige, men under sig foranderlige, ere Tiderne i sammensat Forhold af Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum simpel hen tagne, og af Quadrat-Rødderne af de bestandige hastiggierende Kræfter forkeert tagne.

3) At

3) At i den samme Hypothese, naar nemlig de bestandige Kræfter under sig ere foranderlige, da; om Tiden antages ydermere som bestandig, bliver $\sqrt{y} = \sqrt{g}$, og derfor blive de i samme Tider igiennemløbne Rum proportionerte de hastiggierende Kræfter.

§. 16.

Vil man af Tiden finde Rummet, eller af Rummet Tiden, da I Tingenes
Hald af Tiden at
finde det igien-
nemløbne Rum,
eller af Rum-
met Tiden.
maa i Ligheden $\frac{2m\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$, m og g først bestemmes udi virkelig
Størrelse. Sættes da $t = 1$ Secund, saa bliver $4my = 2g$,
eller $2my = g$. Sættes som før $g = 31,250'$ §. 11, da bliver
 $2y = 31,250' = g$, altsaa $m = 1$; saa man kan simpel hen
sætte $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$.

I de fleste Udregninger er det nok, naar $\sqrt{2g}$ sættes som før
 $= \sqrt{60}$. Sættes da videre $t = 1''$, saa bliver $4y = 2g$,
 $y = \frac{g}{2} = 15$. Er $t = 2''$, da bliver $\sqrt{y} = \sqrt{2g}$, og altsaa
 $y = 60$. Er $t = 3''$, da bliver $4y = 9.60 = 135$.

§. 17.

Man kan giere Ligheden imellem Hastigheden og Tiden meget
simplere, end i den før fundne $ngdy = vdv$ §. 7; saafremt nemlig, at
man i Steden for Hastigheden selv betiener sig af den Høide, ved at
falde igiennem hvilken Hastigheden kan vindes. Thier, som før, y det
igiennemløbne Rum, igiennem hvilket at den naturlige Tyngde driver
et Legeme, og x tilkiendegiver den Høide, ved at falde igiennem hvil-
ken Hastigheden i Enden af Faldet kan vindes, da bliver $dy = dx$,

og $y = x$. Er Hastigheden v , da bliver $v^2 = x$ og v som $\sqrt{y}$, hvilket tilkiendegiver det Antal Fodder, som Tingen i Faldet igien nemleber i uligedan Bevægelse, for at naae den segte Hastighed. Men deraf findes let, hvad Hastigheden bliver i den eensdanne Bevægelse for et Secund alene ved at multiplicere med $\sqrt{4g}$, naar $g = 15'$.

Eller ved at sige, $\sqrt{15} : 30 = \sqrt{y} : \frac{30}{\sqrt{15}} \sqrt{y} = \sqrt{60} \sqrt{y} = \sqrt{60y} = \sqrt{4gy}$, som før, naar ved g forstaaes $15'$, eller $\sqrt{2gy}$, om ved g forstaaes $30'$, eller $\sqrt{gy}$, om ved g forstaaes $60'$.
§. 12. og §. 56 Forel.

§. 18.

Man maa videre agte, at saa tidt som man paa denne Maade haver fundet Hastigheden $v = \sqrt{y}$, og man af den vil betiene sig, for at finde som før Tiden i den Lighed $\frac{m dy}{\sqrt{2ngy}} = dt$, der forandres nu til denne anden $\frac{m dy}{\sqrt{y}} = dt$, da maa for m sættes $\frac{1}{\sqrt{4g}}$ (ved g atter igien forstaaet 15 Fod) Saa deraf sees, at saa tidt som man faaer i Følge af denne sidste Maade at beregne Hastighederne og Tiden paa den Lighed $t = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$, da for at finde Tiden i virkelig Størrelse udi Secunder behøves intet andet, end at dividere $\int \frac{dy}{\sqrt{y}}$ med $\sqrt{4g}$.

§. 19.

Maade at bestemme Bevægelsen, naar Tingen i Begyndelsen af Faldet
Vi saae, at i de forrige Tilfælde var det unødigt, at bestemme sig om at legge en usforanderlig Størrelse til Integral-Summen, fordi naar $x = 0$, bliver saavel Hastigheden, som Tiden $= 0$. Dette
er

er just, hvorudi den Tilfælde, da en Ting i Begyndelsen af Faldet have en vis given ^{ven} Hastighed ^{Hastighed.}
 ndi A haver allerede en given Hastighed ned efter Linien Ad , før Tynge-
 den begynder at virke, og drives saa siden af en bestandig Tynge-
 eller trykkende Kraft; er adskillig fra de forrige. Thi søger man,
 hvad Hastighed den maa faae i hvad for et foranderligt Punkt man
 vil, da er (Fig. 4. Taf. I.) om Hastigheden i Begyndelsen kal-
 des c , og den i d , $c + v$, Differential-Hastigheden dog dv ; om
 $Ad = x$, er atter igien som før, om man vil betiene sig af Ligheden
 §. 7. 12. $gdx = vdv$, $gx = \frac{1}{2}vv + B$. Da nu, naar $x = 0$,
 $v = c$, saa bliver $-\frac{cc}{2} = B$ og $2gx = vv - cc$. Følgelig
 $v' = \sqrt{2gx + c^2}$, men $\sqrt{2gx}$ er §. 10. den Hastighed, som vindes
 ved Faldet igiennem den Høide x ; kaldes da denne Hastighed Q ,
 da bliver $v = \sqrt{QQ + c^2}$. Er x for det hele Fald $= a$, den Ha-
 stighed, som svarer til $\sqrt{a} = b$, bliver i Enden af Faldet $v =$
 $\sqrt{b^2 + c^2}$.

For at vise Nytten af Lighederne §. 17, 18; da, om h er den
 Høide, som svarer til Hastigheden v , og man sætter $dx = dh$, i
 Stæden for $gdx = vdv$; faaes $x = h + B$. Er d den Høide,
 igiennem hvilken Hastigheden c ved Faldet bliver til; da, naar $x = 0$,
 er $h = d$, altsaa bliver $h = x + d$. Da nu $\sqrt{h} = v$, saa er
 $v = \sqrt{x + d}$, og om x bestemmes til en vis Størrelse a for det
 hele Fald, er $v = \sqrt{a + d}$, men $d = cc$ §. 17. og $a = bb$ §. 17.
 Benævningerne af Hastighederne giorte her som strax oven for, følge-
 lig faaes som før, $v = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Er Hastigheden given, da bestemmes let Ligheden for Tiden,
 siden denne sidste altid er proportionert Elementet af det igiennemløbne

Rum dividert med Hastigheden, saa at i vores nærværende Tilfælde derfor, $dt = \frac{dx}{\sqrt{x+d}}$ og $t = 2\sqrt{x+d} + B$. B findes deraf, at naar $x = 0$ er Integralet $= 2\sqrt{d}$, saa at derfor $t = 2(\sqrt{x+d} - \sqrt{d})$ hvilken Størrelse endnu maa multipliceres med $\sqrt{4g}$ §. 18, om man vil have Tiden tilkiendegivet udi Secunder. Da det forstaaer sig selv, at x og d desuden maa gives i samme Maal som g , nemlig; om $g = 15'$, i Parisfise eller i Danske Fodder.

§. 20.

Egalebes naar Sættes $\frac{p}{m}$ ei som en bestandig og uforanderlig Størrelse, men $\frac{p}{m}$ ei er som før tværtimod at være foranderlig, er Oplosningen dog altid den samme, en bestandig hastiggjørende alene at $\frac{p}{m}$ bestemmes.

Kraft, for Ex. Man seer let, at den Mængde adskillige Spørgsmaal, som her
naar den er som kan forekomme, beroer paa Kræfternes Adskillighed, eftersom de enten
Quadraten af Distancon fra kan forekomme, antages at forholde sig saa, eller anderledes. Vi ville i før see paa de
Kræfternes Center forkeert tagen: da at be- Love for Kræfterne, som enten virkelig forekomme, eller som meest
stemme den ret- lignede Bevægelse nærme sig til de, der forekomme i Naturen. Hvorfor vi og særdeles
gælte. betragte de, i Følge hvilke Kræfterne virke efter Heiderne af Distancon fra visse Punkter, til hvilke de altid søge og imod hvilke de altid drive
det Bevægede.

En af de vigtigste Tilfælde af alle, som her kunde forekomme, er den, naar Tyngden sættes at være foranderlig efter Quadraten af Distancon fra Kræfternes Center forkeert tagen. Er B dette Center, (Fig. 4. Taf. 1.) i A Begyndelsen af Faldet, $BA = a$, $Bd = x$, da er $de = -dx$, fordi x idelig formindskes, imod at Hastigheden
vorer,

vorer. Er Jordens Halv-Diameter $BC = r$, Tyngden hos os eller i

$C = g$, da er i Følge vores antagne $xx : rr = g : \frac{rr}{xx}g = \frac{p}{m}$

og i Staden for Ligheden $v dv = \frac{np dx}{m}$ §. 9. faaes $v dv = -nrrg$.

$\frac{dx}{xx}$, altsaa

$$\frac{1}{2}vv = \frac{nrrg}{x} + B$$

For at finde den bestandige Størrelse B , maa agtes, at, naar $x = a$

er $v = 0$, følgerlig $B = -\frac{nrrg}{a}$, og saaledes bliver

$$vv = \frac{2nrrg}{x} - \frac{2nrrg}{a} \text{ og } v = r \cdot \sqrt{2gn} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}} = r \sqrt{2gn} \sqrt{\frac{a-x}{ax}}$$

settes $2ng = 1$, bliver Heiden, som svarer til Hastigheden

$$v = r \cdot \left(\frac{a-x}{ax} \right)$$

For enhver endelig Størrelse af x findes v i virkelig Størrelse efter det forhen sagte. Men bliver $x = 0$, hvilket haver Sted for det hele Fald igiennem AB , er $v \infty$, eller uendelig stor. Det er, i Kræfternes Center selv bliver Hastigheden uendelig stor, hvilket er den merkkelige Forskiel imellem dette Tilfælde og det nest forrige, da Tyngden blev antagen som bestandig. Thi i Kræfternes Center selv bliver Hastigheden da endelig, om a er endelig, siden den aldrig bliver større end Quadrat-Roden af det igiennemløbne Rum. §. 10.

Paa den anden Side af Kræfternes Center er x negativ, eller

en nægtende Størrelse; saa $v = r \cdot \sqrt{2gn} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$ forandres

til den umuelige Størrelse $\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$, som synes at vise, at ingen

videre Bevægelse skulde kunde have Sted paa den anden Side af Kræfternes

ternes Center, men at den tunge Ting skulde igien i B begynde at stige fra B op imod A, fordi paa sin Side Kærsternes Center bliver uumelig. Men man maa tillige agte, at Kraften bliver der en nægtende (*) Størrelse.

§. 21.

Det samme, naar den hastig-
giørende Kraft
er som den Hæi-
de n af Distanc-
en forkeert eller
lige frem tagen.

Derfor man i Stæden for Quadraten af Distanceen, tog hvad anden Hæide n af den, som man vilde, i forkeert Forhold; da blev alt som før, alene at $x^n : r^n = g : \frac{r^n}{x^n}g$, hvilket da blev den hastig-

giørende Kraft. Følgelig blev og, Benævningerne giorte som før,

$$v dv = -\frac{r^n}{x^n} n g dx = -g n r^n x^{-n} dx. \quad \text{Er ligesom udi §.}$$

17 og 19, h den Hæide, der svarer til v ; da bliver $dh = -r^n x^{-n} dx$,

og ved at summere; $h = \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} + B$. Da nu, naar $x = a$,

$h = 0$, saa er $B = -\frac{r^n a^{-n+1}}{n-1}$ og derfor

$$h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$$

For det hele Fald er $x = 0$ og $h = \frac{r^n a^{-n+1}}{1-n}$

Hvoraf sees, efter de adskillige Forandringer af n ,

1) At saa længe n er en bekræftende Størrelse eller Positiv,

bliver $v = \sqrt{h} = \sqrt{\frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}}$, og, naar $x = 0$

er

(*) See videre desangaaende Eulers Mechanik tom. I. cap. 3. prop. 32. schol. 1.

er $\frac{r^n}{x^{n-1}} = \infty$. Følgesig i Kræfternes Center selv Hastigheden altid uendelig, om n er positiv og > 1 .

2) Er derimod n positiv, men < 1 ; eller og negativ. (hvilket sidste skeer, om den hastiggjørende Kraft er i ligesrem Forhold af Distancen. Da bliver, som før sagt, Hastigheden for det hele Fald endelig. Thi, naar $x = 0$, er da $x^{-n+1} = 0$. Og egentlig $h = (r^n a^{-n+1}) : \frac{1}{1-n}$, naar n er positiv, men < 1 . hvilket forandres til $(a^{n+1}) : r^n(n+1)$ naar n er negativ. Ellers er Hastigheden efter det nylig beviste i Kræfternes Center selv uendelig, og derfor ubestemmelig.

3) Dersom i den første Tilfælde af $+n$, sættes i Ligheden

$$v = \sqrt{\frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}}, \quad n=1;$$

da bliver $v = \sqrt{\frac{r-r}{1-1}} = 0$, følgesig maa v findes af Differential-

Ligheden selv, som da bliver $dh = -\frac{r dx}{x}$, hvoraaf Summen er,

$$h = -r \text{ Log. } x + r \text{ Log. } a = r \text{ Log. } \frac{a}{x}.$$

Da L. $\frac{a}{x}$ om $x=0$, er ∞ , saa bliver og, saasnart som den hastiggjørende Kraft er som Distancen fra Kræfternes Center forkeert tagen, Hastigheden i dette Center uendelig stor. Men denne uendelige Hastighed bliver tillige iblant alle af sit Slags den mindste, fordi $\text{Log. } \frac{1}{2}$ er den mindste uendelige Størrelse af alle. Hvorfor og denne Tilfælde er at ansee som Grændse-Skiellet imellem alle de, ndi hvilke Hastigheden i Kræfternes Center paa den ene Side er endelig, og uendelig derimod paa den anden.

4) Derfor i det Tilfælde af — n sættes $n = 1$, det er, om Tyngden er som Distancen fra Kræfternes Center, hvilken Lov for Tyngden vi paa sit Sted skulde faae at see, haver Sted, om de tunge Ting falde inden i Jorden, da bliver $v = \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2r}}$.

§. 22.

Maaede at bestemme Tiden, viist i det Tilfælde, da Faldet sker i ret Linie og Tyngden er som Distancen fra Kræfternes Center.

I denne sidste Tilfælde, da nemlig Tyngden er Distancen fra Kræfternes Center bestandig proportionert; er det af Vigtighed at finde Tiden. Da derfor §. 18. $\frac{dy}{y} = dt$, men $\sqrt{y}$ er her,

og Tyngden er som Distancen fra Kræfternes Center, $\sqrt{b}$ var, og dy forandres til $-dx$, saa bliver, alle Benævnelserne tagne som før, $-\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2r}}} = dt$,

Da nu, om Cirkels Havs Diameter $= a = AB$ (Taf. 1. Fig. 4.) og man fra Centret B treffer den Quart-Cirkel AF. Elementet af

Buen fg er $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, saa bliver $-\frac{dx\sqrt{2r}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{2r}}{a} \cdot \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$
 $= -\frac{\sqrt{2r}}{a} Ff + B$. B betyder en bestandig Størrelse, som faaes derved, at naar $x = 0$, bliver den hele Tid af Faldet fra A til B $= \frac{\sqrt{2r}}{a} FfA$. Thi da Buen egentlig er negativ, og Ff , om $x = 0$, $= 0$, maa man tage i Steden for Ff dens Rest, som fyldestgør den hele Quadrant. Følgelig er Tiden, da Faldet sker igiennem Ad $= Af \frac{\sqrt{2r}}{a}$. Heraf følger

I dette Tilfælde 1) At da Tiden igiennem AB $= \frac{AF}{a} \cdot \sqrt{2r}$, og $\frac{AF}{a}$; (om Periphe-

Peripherien kaldes p , Diametern $d = \frac{1}{2}p : \frac{1}{2}d = p : 2d$, saa de er Tiden af Halbet ind til Kræfternes Center den samme, enten Distancen er stor eller liden. Bliver Tiden igiennem $AB = t = \frac{\sqrt{2r}}{2} \cdot \frac{p}{d}$; da derfor denne Størrelse altid er bestandig, saa selger. At saa tidt som de hastiggjørende Kræfter ere Distancerne fra Kræfternes Center proportionerte, saa bliver altid Tiden den samme, i hvilken Tingene falde indtil dette Center, hvad heller at den Vei AB , som de have at falde, antages at være stor eller liden, hvilket er en af de meget smukke Egenskaber, der er denne Hypothese af Kræfterne egentlig.

2) Da $t = \frac{\sqrt{2r}}{2} \cdot \frac{p}{d}$, saa kan r sættes at være foranderlig, hvilket maa have Sted, saa tidt som flere Kræfternes Center sammenlignes under sig, hvis absolute eller virkelige Kræfter ere adskillige, saa at derfor den Distance fra Centret, i hvilken Kraften er saa stor som Tyngden, bliver foranderlig. I denne Hypothese er $t = \sqrt{r}$, det er. Tiderne ere under sig, i hvilke Tingene falde til Centret, som Quadrat-Rødderne af de Distancer, i hvilke den fra Centret virkende Kraft er saa stor som Tyngden.

Men Central-Kræfterne selv ere altid under sig, som de Kræfter, hvilke de kunde ytre paa lige store Distancer fra Centret. Følgelig da de i denne Hypothese, ere de enden som Distancen fra Centret, og $gx = pr$, saa blive de under sig forkeert som de Distancer, i hvilke de ere saa store som Tyngden. Følgelig, naar Central-Kraften kaldes P , er i denne Hypothese altid $P = \frac{1}{r}$, derfor er $r = \frac{1}{P}$ og $t = \sqrt{\frac{1}{P}}$. Saa man deraf seer, at Tiderne af Halbet ere under sig, som Quadratrødderne af Centrernes absolute Kræfter forkeert tagne.

§. 23.

Tidens Bestem-
melse af Faldet
til Centret, naar
Tyngden er som
Quadraten af
Distancen for-
keert.

Vil man i Fig. 4. Taf. 1. antage D som Kræfternes Center, og derpaa ligeledes sege Tiden af Faldet igiennem AD i det Tilfælde, da den hastiggjørende Kraft er som Quadraten af Distancen forkeert.

Da sees af §. 20. at Heiden, igiennem hvilken Hastigheden v faaes ved Faldet, er $r^2 \cdot \left(\frac{a-x}{ax}\right)$ og at derfor, naar $Dh = x$ Ligheden

$$\text{for Tiden bliver §. 18. } dt = -\frac{dx\sqrt{ax}}{r \cdot \sqrt{a-x}} = -\frac{V_a}{r} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}.$$

Hvoraf Summen faaes, ved at legge det manglende Stykke udi Differentialen til. Hvilket, naar er gjort, bliver

$$dt = \frac{V_a}{r} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax-xx}} - \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} \right)$$

Alf det første Stykke, nemlig af $\frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ er Summen eller Integra-

len $\sqrt{ax-xx}$, og $\int \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ er en Cirkel Bue, hvis Diameter $= a$.

Tager man da $AD = a$, og over den videre slaar Halv-Cirklen

AFD. Da, om $Dh = x$, er $\int \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}} = Ai$. Ligeledes er

$hi = \sqrt{ax-xx}$, saa $\int \frac{-xdx}{\sqrt{ax-xx}} = hi + Ai$. $t = \frac{V_a}{r} (Ai + hi)$

hvilket er Tiden igiennem Ab. Ligeledes er Tiden igiennem AD,

$\frac{V_a}{r}$ AFD. Thi, for det hele Fald, er $hi = 0$ udi D.

Tidene ere i
dette Tilfælde
som Quadraten
Rødderne af
Distancernes
Kubis.

Da den hele Tid af Faldet saaledes er $\frac{V_a}{r}$ AFD. Sættes da
den Diameter a , Peripherien $= ap = 2$ AFD, og altsaa Faldets hele

Tid

Tid proportionert $a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$. Saa at, naar Distancerne a ere adskillige og under sig foranderlige, blive Tiderne af Faldet igiennem disse adskillige Heider proportionerte Quadrater: Rødderne af Kubis, som er den Forhold, hvilken man sædvanlig kalder Sesquiplicata ratio.

§. 24.

Man kan paa selsomme Maade finde en almindelig Lighed for Almindelig Opløsning af andre Tiden, naar Central-Kraften er $= \frac{1}{x^n}$. Thi, da Hastigheden er i Tilfælde.

alle disse Tilfælde given §. 21. $= \sqrt{\frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}}$ saa

bliver Tiden $= \int \frac{dx \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}}$. Men, da denne Differential-Lighed ei er almindelig integrabel, ville vi ved den ei opholde os.

§. 25.

Derimod ville vi kortelig agte: 1) At saafremt man antager, at i A, hvor Faldet begynder, den faldende Ting strax i Begyndelsen havde en vis given Hastighed, saaledes som vi forhen have udregnet en ligedan Tilfælde §. 19. Da kan man ligeledes i Almindelighed let bestemme for dette Tilfælde den hele Bevægelse, saa tidt som Central-Kraften er proportionert $\frac{1}{x^n}$; hvor vi ved x bestandig tilkiensdegive Distancen fra Centret. Gøres alle Benaevningerne, som i §. 21. faaes for dette Tilfælde, ligesom der; $dh = -r^n x^{-n} dx$ og $h = \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} + B$. Denne bestandige Størrelse bestemmes

ved at fastsætte den Høide, som svarer til Hastigheden i Begyndelsen af Faldet, eller naar $x = a$. Sættes denne Høide da $= b$, saa bli-

$$\text{ver } h - b = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1} \text{ og derfor}$$

$$h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1} + (n-1)b}{n-1}.$$

§. 26.

2) I samlig disse Tilfælde bestemmes videre den Høide, igiennem hvilken en Inertie, drevet af de vedkommende Central Kræfter kunde vinde en saadan Hastighed, som den er, med hvilken den antages at begynde sin Bevægelse ned ad imod Kræfternes Center. Er, for Ex. Taf. 1. Fig. 4. D Kræfternes Center, h det Punkt, hvorfra Tingen begynder at falde imod D med en Hastighed, som kunde vindes ved at falde igiennem Ab , naar nemlig, Tingen fra at hvile udi A blev drevet igiennem Ab af Central Kræften udi D. Da om denne sidste

er $= \frac{1}{x^n}$, og ved x forstaaes enhver Distance fra D over Linien AD; er det klart, at om en Inertie hvile i A, og faldt derfra ned efter Ab , blev den Høide, som svarer til Hastigheden udi $h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$ §. 21. Men da Hastigheden udi h er antaget at svare til den Høide b , om samme Hastighed skulde vindes ved den naturlige Tyngdes frie Virkning. Saa bliver udi h .

$$b = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}. \text{ Videre } b = \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} = \frac{r^n a^{-n+1}}{n-1}, \text{ selvselig bliver } a = Ad = \sqrt[n]{\frac{r^n x^{-n+1} - (n-1)b}{r^n}},$$

som

som er den søgte Distance fra Kræfternes Center D. Hvilken, om i et hvert

enkelt Tilfælde $bD = d = x$; forandres til $\sqrt{\frac{r^n d^{-n+1} - (n-1)b}{r^n}}$.

Følgelig bliver $Ab = \sqrt{\frac{r^n d^{-n+1} - (n-1)b}{r^n}} - d$.

Man kan heraf giøre en Mængde Slutninger, iblant hvilke vi vilke alene anføre følgende :

a) Er $n = 0$, bliver $Ab = b$, eller saa stor som den Heide, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden kan vindes, naar Central-Kraften altid er af bestandig Virkning.

b) Er n positiv og > 1 , saa at Kraften er i forkeert Forhold af Heiderne af Central-Distancen. Da bliver $Ab = -d + \frac{r^n : (n-1)}{(r^n d^{-n+1} - (n-1)b)^{\frac{1}{n-1}}}$, hvoraf sees. At saa tidt som $(n-1)b = r^n d^{-n+1}$, bliver $Ab = \frac{1}{0}$ og følgelig ∞ , men bliver $(n-1)b > r^n d^{-n+1}$, maa derfor Ab være større end det uendelige selv, og følgelig ubegribelig eller imaginair. Saa ikke alle Hastigheder ved disse Central-Kræfter kunne faaes, saaledes som ved de altid bestandige Central-Kræfter, hvorfor disse sidste og ere de bequemteste til at udregne Hastighederne, og de til dem svarende Heider.

5) Er $1 - n$ en positiv Størrelse, som for Ex., naar Kræfterne virke lige frem i simpel Forhold af Central-Distancernes Heider. Da bliver vel Ab positiv, men den beroer dog, med mindre at $n = 0$, paa r og d , hvilke i de fleste Tilfælde kunde holdes for uendelige

Størrel-

Størrelser. Desuden have disse Central-Kræfter lidt Sted i Naturen, saa vor forhen brugte Maade i at bestemme de Høider, som svare til alle mulige Hastigheder, er den tjenligste og bedste; da vi nemlig altid ved den til Hastigheden svarende Høide forstaae den, igiennem hvilken Hastigheden ved Faldet kan vindes, naar et Legeme drives af den naturlige Tyngde; med mindre at man ved dette Ord et eller andet Sted udtrykkelig vilde give noget andet tilkiende. Vi gjøre derved Tyngden her hos os til den store Unitet for alle Kræfter, og de her hos os maalelige Hastigheder til Maalet for alle andre.

§. 27.

Dersom man antager andre Love for Kræfternes Virkning, end de, der ere som Distancernes Høider. Da er den almindelige Oplesning dog altid let, og siden kommer det alene an paa, hvad der i enkelte Tilfælde lader sig integrere eller ikke. Saaledes kan man sætte, at Kræfternes Virkning i et hvert Punkt skulde tilkiende-gives ved en Function af Distancen, hvad heller denne sidste blev regnet fra Kræfternes Center D (Taf. 1. Fig. 4.) eller fra hvad andet Punkt A man vilde. Er da Fx den Function af x og bestandige Størrelser, som man vil antage, skal tilkiendegive Loven for Kræfternes Virkning, naar ved x forstaaes Distancen Ab eller Dh , ved v den Høide, som svarer til den ubestemte Hastighed udi h ; da bliver $(Fx) dx = \pm dv$, og $v = \int (Fx) dx$, hvoraf følger, at Tiden
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\int (Fx) dx}}$$
, hvoraf i alle enkelte Tilfælde enkelte Oplesninger kunde gjøres, saa tidt som de ere udregnelige. Men da de hverken i Naturens Betragtning, eller i Mechanik, i det mindste ikke, efter hvad

hvad vi endnu vide, have nogen Nytte, ville vi ved dem ei opholde os.

§. 28.

Vi vilde derimod til Slutning af dette Tillæg (som allerede er blevet vidtseftigt) vise, hvorledes man af de givne Love for Hastighederne i alle Punkter af den rette Linie, hvori Faldet skeer; eller af ligedanne Love for Tiderne af Bevægelsen, kan bestemme Beskaffenheden af de hastiggjørende Kræfter, og selgelig af Kræfterne i Naturen.

1) Hvad Hastighederne angaaer. Da siden $\frac{P}{m}dx = vdv$ bliver altid, naar V er Heiden, som svarer til Hastigheden. $P = \frac{dV}{dx}$.

a) Er derfor Hastigheden altid som Quadrats Roden af det igiennemlembne Rum, bliver $v^2 = V$. vdv proportionert dV , derfor $dV = dx$ og $P = \frac{dv}{dx} = 1$. Saa at; saa tidt som denne Lov af Hastigheden haver Sted, er Central-Kraften altid bestandig. Saa man deraf seer, at den naturlige Virkning af Tyngden her hos os er saaledes, som vi forhen have antaget det, nødvendig Virkningen af en bestandig Kraft; siden denne sidste Lov for Kræfterne er den eneste, som kan komme ud af Forholden $\frac{dv}{dx}$ i dette Tilfælde.

b) Ere Hastighederne proportionerte de igiennemlembne Rum, eller $\sqrt{V} = x$, da bliver $V = x^2$. $dV = 2x dx$. Selgelig bliver $P = \frac{2x dx}{dx}$ eller $= 2x$; saa at Kræfterne da bestandig maa virke i

Forhold af det igiennemløbne Rum. En Hypothese, som ei passer sig til Naturen; efterdi da, naar $x = 0$, $P = 0$, eller Kræfterne i Begyndelsen af Bevægelsen skulde ganske ophøre at virke, og Bevægelsen dog ikke desto mindre skulde gaae for sig.

c) Er $V = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$ som §. 21. og derfor

$dV = -r^n x^{-n} dx$, da bliver $P = -\frac{r^n x^{-n} dx}{-dx} = \frac{r^n}{x^n}$. Man maa agte, at dx tages her negativ, fordi x betyder (Taf. 1. Fig. 4.) Dh eller Distancen fra Centret, som i Faldet ned efter idelig formindskes.

§. 29.

2) Angaaende Tiden.

Vil man ligeledes af de givne Love for Tiderne, i hvilke Bevægelserne skeer, visse Rum nemlig igiennemløbes eller visse Hastigheder blive til: Vil man deraf finde Kræfterne, som i Folge Lovene af Tiden kunne forårsage Bevægelsen. Da behøves alene atter igjen at betiene sig af de almindelige Ligheder. Saaledes fordi $p dt = dv$, §. 4. sættes da $v = t$ og $dv = dt$, bliver $p = \frac{dv}{dt} = 1$. Hvoraf sees, at saa tidt som Hastigheden er proportionert Tiden, ere Kræfterne bestandige, ligesom vi forhen have bevist, at saa tidt som Kræfterne ere bestandige, forholde sig Hastighederne som Tiderne af Faldet, saa dette sidste ei kan skee uden i denne eneste Kræfternes Hypothese.

Den forhen §. 15 givne Lighed imellem Rummet og Tiden

$$\sqrt{\frac{mdv}{gy}} = dt \text{ er ikke uden for det Tilfælde, da den hastiggjørende Kraft}$$

er

er bestandig, siden at Hastigheden er i den blevet antaget $= \sqrt{2gy}$.
Saa tidt derfor, som man vil have en almindelig Lighed imellem
Rummet og Tiden, af hvilken den hastiggjørende Kraft kan bestemmes,
behøves intet andet end at betiene sig af den §. 25 forhen givne

meget almindelige Lighed, i Følge hvilken; Tiden $= t = \int \frac{dx}{\sqrt{\int P dx}}$,

thi (Fx) og P betyde her det samme. Man faaer deraf $dt = \frac{dx}{\sqrt{\int P dx}}$,

$\int P dx = \frac{dx^2}{dt^2}$ og ved at differentiere $P = \frac{2ddxdt - 2ddtdx}{dt^3}$, eller,

om i Differentiationen, for at gjøre Ligheden simplere, dx blev antaget som bestandig, saa at $ddx = 0$; blev $P = -\frac{2ddtdx}{dt^3}$, hvoraf altid
Kræfterne kunne bestemmes, naar Ligheden eller Forholden er given
imellem Tiden og Rummet.

Saaledes; om $t = \sqrt{x}$, eller $t^2 = x$ og $2tdt = dx$ og $-ddt = \frac{dt^2}{t}$; da bliver $-\frac{2ddtdx}{dt^3} = P$ altid en bestandig Størrelse, saa-

ledes som vi have antaget den at være i de forhen giorte

Anmærkninger over Tyngden.

Tredie Forelæsning.

Om

Kræfternes Ligevægt under sig, og de
tunge Tings Fald over skraaliggende Linier.

§. 58.

Udfaldet af flere
Kræfters Virk-
ning over sam-
me Linie med,
eller imod hver-
andre.

Før vi gaae videre i at undersøge Reglerne for de tunge Tings Bevægelse, er det tienligt, endnu engang at foretage Kræfterne; for at see de almindelige Love, efter hvilke de virke, naar flere af dem over et og det samme Plan støde sammen, som fælles Aarsager, til en og den samme Bevægelse. I denne Henseende er det strax oien synligt, at saa tidt som flere Kræfter drive en Materie efter den samme Linie, bevæges den af dem alle, som om de ei udgiorde uden en eneste, der var saa stor, som de alle. Saa tidt derimod, som de virke over den samme Linie paa den samme Ting med imodsatte Directioner, hindre de hverandre saaledes, at den hele Kraft til at bevæge, saa tit som de imodsatte Kræfter ere ulige, ere alene disse Kræfters Forskiel i Størrelse. Imod at tilforn, i det Tilfælde, da de alle drev Materien efter den samme Drive-Linie, den hele bevægende Kraft var saa stor, som deres hele Sum. §. 29. 31.

§. 59.

Det samme sees, om Virkningerne i to lige store Tidder betragtes. Thi da dg er parallel og $\equiv Aa$ i Folge Hypotesen, ligeledes ge parallel og $\equiv ad$ af samme Aarsag, saa bliver $Ab \equiv 2Aa$ og $be \equiv 2ad$, og derfor, som før, $Ab : be \equiv Aa : ad$.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, kan agtes, at denne Regel ei alene gielder for det Tilfælde, da 1) de trykkende Kræfter ikke virke uden et Dieblis eller en uendelig liden Tid, men endog 2) saa tidt som de foregaaende Virkninger ikke efterlade en virkelig Bevægelse, men Kræfternes Virkning saa at sige alle Dyeblik doer ud. 3) Naar en virkelig Hastighed bliver til i det Bevægende af de foregaaende Virkninger, men Kræfterne virke endnu bestandig alle Dieblis saaledes at de bestandig blive under sig som $AC : BD$. Thi i dette Tilfælde kan man atter igien, som før sagt, betragte enhver af Kræfterne, som at virke for sig og at bevæge den ene efter dg , den anden efter de , saa at det Punkt e bliver i Diagonalen, og dette giort; kan man endnu betragte den i første Dieblis bundne Hastighed, som at bevæge Tingen hen efter Diagonalen om det Stykke ef . 4) Kan agtes, at det ei behøves, at de virkelige Storrelser af de bevægende Kræfter blive hele Bevægelsen igiennem de samme, alene at deres indvortes Forhold under sig altid bliver den af $AC : BD$. 5) Og endelig, at om ved AC og BD ei forstaaes trykkende Kræfter, men virkelige Hastigheder, med hvilke paa engang et Legeme bevæges, er Beviset endnu i alle Henseende det samme i Henseende til den hele sammensatte Hastighed.

Da derfor Kræfterne ere som de Rum, igiennem hvilke de kunne bevæge den samme Materie i eensdan Bevægelse i den samme Tid §. 23, og en Kraft, som AE kan bevæge den samme Ting fra A til E, imidlertid at A kan bevæge den fra A til C, og B fra B til D, saa følger.

At en Kraft AE, saa stor som Diagonal- eller Tver-Pinten, og i dens Direktion, gør altid i samme Tid den samme Virkning, som de to Side-Kræfter BD og AC, naar de ere i Størrelse og Direktion som BD og AC. (*)

§. 60.

(*) Dette Principe, som er unegtelig et af de allersterke og aller-nyttigste, som man haver kundet opfinde og betiene sig af udi Mechanik, kan bevises endnu anderledes af Kræfternes foransatte Love. Thi (Taf. 1. Fig. 1.) om den Inertie a drives af de tre Kræfter ea , ad , fa , saaledes; at fa skal staae i Egeværkt med de to andre, med ea og ad ; da er der ingen Tvivl paa, at jo de Kræfter ea og ad udgiøre den Modstand, som fa have at overvinde, og at ligeledes fa er den Modstand, som ea og ad haver at overvinde. Kaldes da ea , A, ad ; B; fa . C. det elementære Rum ab Inertien forskyttes over ved A, dx . Det, over hvilket den forskyttes ved B ligeledes i en uendelig liden Tid dy , da er Igienvirkningen af den Kraft $fa = A dx + B dy$, §. 16. 4. og 22. 23. i Forel. og §. 2. c. i Tillæg. Kaldes ligeledes det elementaire Rum dZ , igiennem hvilket tillige med Inertien a , Kraften fa for et Dieblit bevæges, da bliver

En Kraft i Størrelse og i Direktion, som Diagonalen, gør den samme Virkning som to andre, der ere i Størrelse og Direktion, som Side-Pintene af et Parallelogram.

§. 60.

At finde en
Kraft saa stor
som to andre
givne.

Følgelig kan man altid i Steden for to givne Kræfter AC og BD betiene sig af en eneste Kraft, der gjør samme Virk.

den hele Modstand, som Kræfterne ea og ad forefinde $= C$.
 df . Men da disse Kræfter skulde i Følge vores antagne staae
udi Egevægt sammen, saa bliver

$Adx + Bdy = -Cdf$. df tages negtende, fordi
Bewægelsen i Henseende til df maa ansees som at gaae tilbage.

For at bestemme dx , dy , og df . kan man betragte Iner-
tien udi a , som forflyttet over det uendelige lidet Rum fra a
til b , da er i Henseende til denne Forskytning, om an er en
Cirkel-Bue, hvis Center er udi c , $dx = nb$; men da ac
kan ansees som Parallel bc , fordi Punkterne a og b ere, i
Følge Hypotesen, uendelig nær ved hverandre, saa bliver
Vinklen $cae = che$. Kaldes denne Vinkel α , og den hele
Sinus $= 1$. Da, fordi n er en ret Vinkel, er $nb = dx$
 $= ab$. Cos. α . Kaldes Vinklen cad β , Vinklen daf ,
 γ , da findes paa selvsaamme Maade, at $dy = ab$. Cos.
 $\alpha + \beta$, og $dZ = \text{Cos. } \alpha + \beta + \gamma$. Cosinus er her
positiv, fordi Vinklen fac fyldestgier $\alpha + \beta + \gamma$ til 360° .

Saaledes bliver $A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \alpha + \beta + C$.
 $\text{Cos. } \alpha + \beta + \gamma = 0$. Men $\text{Cos. } \alpha + \beta = \text{Cos. } \alpha$.
 $\text{Cos. } \beta - \text{Sin. } \alpha$. $\text{Sin. } \beta$. Som man veed af Trigonome-
trie, følgelig faaes

$$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta - B \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta \\ + C \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } (\beta + \gamma) - C \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta + \gamma = 0.$$

Virkning i samme Tid som de, og denne Kraft findes ved at beskrive over Kræfterne, givne i Direction og Størrelse, Parallelogrammet BCED. Thi Kraften BE bliver alene saa stor i Virkning, som begge Kræfterne BC og BD.

§. 61.

hvilken Lighed opløses i disse Enkelste.

$$1) A \cos. \alpha + B \cos. \alpha \cos. \beta + C \cos. \alpha \cos. \beta + \gamma = 0 \text{ og}$$

$$2) B \sin. \alpha \sin. \beta + C \sin. \alpha \sin. \beta + \gamma = 0,$$

som igien forandres til

$$a) A + B \cos. \beta + C \cos. \beta + \gamma = 0.$$

b) $B \sin. \beta + C \sin. \beta + \gamma = 0$. I Følge denne sidste Lighed bliver $B : C = -\sin. \beta + \gamma : \sin. \beta$. Men $\sin. \beta + \gamma = -\sin. fae$, fordi fae fyldestgier β og γ til 360° . Følgelig bliver $B : C = \sin. fae : \sin. \beta$. hvilket er net op Egenffaben af Kræfternes Parallelogram. At nemlig en af Side-Kræfterne forholder sig til Diagonal-Kraften, som Sinus af den Vinkel, hvilken Diagonal-Kraften gier med den tredie af Side-Kræfterne, til Sinus af den Vinkel, som begge Side-Kræfterne giere under sig.

Seger man i den Lighed b) Værdien af B, og sætter samme i Steden for C i den Lighed a), da findes ligeledes Forholden imellem A og C, thi man faaer

$$B = \frac{C \sin. fae \cos. \beta}{\sin. \beta}, \text{ og derfor}$$

$$A + \frac{C \sin. fae \cos. \beta}{\sin. \beta} + C \cos. fae = 0$$

R

eller

§. 61.

At opløse en
Kraft i flere
andre.

Ligeledes; naar en eneste Kraft BE er givet, kan man opløse den i to andre, som foreenede gjøre net op samme Virkning som den. Man har alene nødig over Linien BE at trække et Triangel BCE, saa er det det samme i Henseende til Virkningen, hvad heller man bruger den ene Kraft BE, eller i dens Sted de to BC og CE, naar de nemlig ere baade af Størrelse og af Direktion som disse Linier. §. 59 og 58.

§. 62.

At finde en
Kraft, som giver
samme Virk-
ning med flere
givne.

Ligeledes; om tre eller flere Kræfter ere givne, AB, AC og AD, da findes let en eneste AF (Fig. 6. Taf. I.) som er i Henseende til Virkningen saa stor som de alle. Man har alene nødig at gjøre over AB og AC et Parallelogram, saa

eller og, $A \sin. \beta + C \sin. fae. \cos. \beta + C \cos. fae. \sin. \beta = 0$.

Men $\sin. fae. \cos. \beta + \cos. fae. \sin. \beta = \sin. (\beta + fae.)$ som man veed af Trigonometrien: Følgelig bliver

$A \sin. \beta = -C \sin. (\beta + fae.)$. Og atter igien,
 $A : C = -\sin. (\beta + fae.) : \sin. \beta$. Men $-\sin. (\beta + fae.) = +\sin. fad$. Derfor bliver $A : C = \sin. \gamma : \sin. \beta$, hvilket er atter igien Beskaffenheden af Parallelogrammet. Man kan her videre efterslaae *Memoires de l'Academie de Berlin*, Année 1742, pag. 170 o. f. saavel som *Acta Petropol.* Tom. II.

saa er Løer-Linien AE Størrelsen og Direktionen af den Kraft, som i Virkning kan sættes i Steden for AB og AC, §. 60. Gjør man fremdeles over den nylig fundne AE og over AD et Parallelogram, saa kan AF bruges i Steden for AE og AD, følgelig og i Steden for alle tre AB, AC og AD.

§. 63.

Man finder derfor let en eneste Kraft, som kan holde Ligevægt med to, tre eller flere andre givne. Man kan alene agte (Fig. 6. T. 1.). At da AB og AC ere af samme Virkning som AE; forlænger man da Diagonalen EA, og tager $GA = EA$, da bliver GA baade Størrelsen og Directionen af den Kraft, som kan holde Ligevægt med BA og AC. §. 58.

Ligeledes, om Diagonalen AF forlænges, saa $AF = AH$, da er AH baade Directionen og Størrelsen af den Kraft, som kan holde Ligevægt med alle tre givne Kræfter AB, AC og AD.

§. 64.

Man seer deraf, at saa tidt som tre Kræfter skulde over det samme Plan være udi Ligevægt sammen med Direktioner, der ei ere i ret Linie imodsatte, da maa de nødvendig forholde sig i Direktioner og i Størrelse, som Siderne og Diagonalen i et Parallelogram, og om Kræfterne ere flere, da efter Reglerne. §. 62. 63.

§. 65.

Støde to Kraf-
ter sammen un-
der en spits Vin-
kel, da hielpde de
høerandre til-
deels, under en
stump Winkel
hindre de høer-
andre.

Deraf følger fremdeles (Fig. 7. 8. T. I.) at dersom to Kræfter AD og AB virke paa et og det samme Punkt, enten under sammenløbende Direktioner af en spits Winkel, (som Fig. 7.) eller af en stump Winkel. (som Fig. 8.) Da i den første Tilfælde hielpde de, i den andre hindre de høerandre om en vis Deel af deres Kraft; hvilket strax sees, naar man opløser AD i de to Side-Kræfter AB og AC, da AB er i den første Tilfælde (Fig. 7.) den hielpende, i den sidste den hindrende Deel af Kræften, og dette er Aarsagen, hvorfor en mindre Kraft kan ene giøre samme Virkning som to større.

§. 66.

Og altid i For-
hold af Cosinus
af Inklinations-
Vinklen.

Søger man den hielpende eller hindrende Deel af den ene Kraft, som trekker skævt imod den anden, da om den hele Kraft kaldes K; Vinklen, hvorunder Kræfternes Direktion-Linier løbe sammen, kaldes ϕ , bliver, som den hele Sinus til Cosinus ϕ , saa den hele Kraft AD eller K til den hindrende eller hielpende AB, som derfor altid bliver $\frac{K \cdot \cos. \phi}{\sin. tot.}$ (Vi forstaae ved Sin. tot. den hele Sinus.)

§. 67.

To Kræfter,
som virke per-
pendicular paa
høerandre, for-
andre alene Di-
rektionen, uden

Bliver Vinklen $\phi = 90^\circ$, da er $\cos. \phi = 0$, eller intet. Følgelig, saafremt Kræfterne staae vinkelret eller perpendicular paa høerandres Directions-Linier, da høerken hielpde eller hindre de hinanden.

Saa

Saa derfor to Kræfter, hvis Direktions-Linier støde at hindre eller
 perpendikulair sammen, ei hindre eller hielpe hverandre, men ^{hielpe hveran-}
 bevæge de, da forandre de alene Direktionen. Jo spitsere
 derimod Vinklen er, desto meer befordre de, jo stumpere den
 er, desto meer hindre de Bevægelsen.

§. 68.

Man seer fremdeles. At, dersom de to Kræfter AB ^{To Side-Kræf-}
 og AD ere i A af samme Virkning med AC (Fig. 9. Taf. I.). ^{ter i Parallelo-}
 Da om man kaster fra hvad Punkt man vil i AC, Perpen- ^{grammet for-}
 diklerne CE og CF ned, da forholde sig de udi B og D med ^{holde sig som de}
 AC i Egebægt staaende Kræfter forkeert Wiis som Perpen- ^{fra et Punkt i}
 diklerne CE og CF. ^{Diagonalen paa}
^{dem nedkastede}
^{Perpendikler}
^{forkeert tagne.}

Thi antages AC som fælles Sinus totus for CE og CF,
 da bliver CE Sinus til Vinklen x og CF Sinus til Vinklen $\circ$,
 men treffes Parallelogrammet ABCD, da bliver $x = \text{ACB}$
 og derfor $AB : AD = \text{Sinus ACB til Sin. } \circ = \text{Sin. } x : \text{Sin. } \circ$,
 derfor og $AB : AD = CE : CF$. Det samme gielder om IG
 og IH og alle andre ligedan nedkastede Perpendikler, thi
 $IG : IH = CF : CE$.

§. 69.

Egeledes bliver Diagonal-Kraften AC, naar den er ^{Diagonal-}
 saa stor, som to Side Kræfter; til enhver af dem i forkeert ^{Kraften er til en}
 Forhold af de Perpendikler, som kastes ned fra et Punkt i ^{af Side-Kræf-}
 den tredie Krafts Direktions-Linie paa disse to Kræfter. ^{terne som Per-}
^{pendiklerne fra}
^{den tredie Kraft}

nedkastede paa
den beage og
forkeert ragne.

Thi (Fig. 10. T. 1.) AC er som Sinus 0, og AD som Sinus x . Men, naar AB ansees som Sinus totus, bliver og BE som Sinus $x + z = \text{Sin. } 0, = \text{Sin. } BAD$ og BF som Sin. x ; følgelig forholde sig $AC : AD = BE : BF$.

§. 70.

Hvad en skraae
Linie eller et in-
klinert Plan er.

Efter at have giort disse Anmerkninger over Kræfternes Egeværkt, ville vi undersøge efter hvad Love de tunge Ting bevæge sig over skraaliggende Linter eller Planer, som AB. Man kan agte, at en Linie AB kaldes en skraae Linie, (Fig. 11. Taf. 1.) naar den gjør med Horizontalen eller Vand-Linien BC en Vinkel ABC mindre end 90° . Ligger en Superficie, hvis alle Punkter ere i et Plan ligeledes, da kaldes den et inklinert Plan.

§. 71.

Svareledes og
med hvad sin
Deel af Tyng-
den virker paa
skraae Linter.

For desto bedre at fuldføre dette vores Forsæt, ville vi agte; at da Linien AB, som vi her ansee for ubøielig og ubevægelig, bær en Deel af Tyngden, saa kan samme Deel et drive Materien T ned ad Planet med sin hele Kraft, men alene, med en vis Deel af den hele Kraft; den nemlig, som Planet ikke bær. Til den Ende om den hele Drift af Tyngden forestilles ved den verticale Linie TD, som baade skal betyde os den naturlige Tyngdes Direction og hele virkelige Størrelse; da om TD opløses i 2 andre FT og TE, den første nyttig og saa stor som den er, ganske tienlig til at bevæge Tyngden hen efter den skraaliggende Linie AB dens Direction.

tion. Den anden TE perpendicular paa Planet, og følger lig ganske unyttig til at bevæge T, siden den trykker T kun ind til Planet eller Linien AB; da er det klart, at den naturlige Tyngde forholder sig til den Deel af den, hvilken her gjør Virkning, som TD til TF; Altsaa kommer alt alene paa at finde disse Liniers Forhold.

Da TD er ligeløbende med eller parallel AC; saa bliver FTD og BAC ligedanne Triangler. Følgelig $TD:FT = BA:AC$. Kalder den naturlige Tyngde g , Planets Længde BA, L. Dets Høide AC, h . Da bliver $L:h = g:\frac{g^b}{L}$, og altsaa den naturlige Tyngde til den, der virker over AB, som $L:h$ som Planets Længde til dets Høide. Saa

- 1) at jo meer Planet forhoies, jo større er Tyngdens Kraft til at drive ned efter, fordi $\frac{b}{L}$ tager til.
- 2) Jo meer Planet synker imod Horizonten, desto mindre ere de drivende Kræfter af Tyngden.
- 3) Og de ere endelig paa Horizontalen selv slet intet, saa den allerstørste Tyngde kan paa den bevæges med den allermindste Kraft, thi da er $h = 0$.

§. 72.

Deraf sees, at, skion Tyngden over de skraaliggende Linier er af mindre Trykning end den naturlige, er den dog hele Faldet igiennem en bestandig hastiggjørende Kraft, lige saa vel som i Verticalen, og følgelig gielder i Henseende til de skraaliggende Linier ligesaa vel, som i Henseende til de Verticalen i Tingenes frie Fald.

1) At

De faldende Ting drives over skraale Linier af en bestandig Tyngde, men hvis Kraft er mindre end den, der virker i

Verticalen og i
øvrigt efter sam-
me Regler, som
i det verticale
Fald.

- 1) At Hastighederne ere som Tiderne, og
- 2) At de igiennemløbne Rum ere som Quadraterne af Tiderne, ligeledes og som Quadraterne af Hastighederne i Enden af Faldet.

§. 73.

De ved Tyng-
den i samme Tid
taennemløbne
Rum i Vertica-
len og paa en
skraae Linie, for-
holde sig som
denne sidstes
Længde til dens
Høide.

Da de hastiggjørende Kræfter i Verticalen og over skraae-
liggende Linier ere til hverandre i bestandig Forhold som $g : L$
 $= L : h$, som Planets Længde til Planets Høide §. 71, saa
maa deres fulde Virkninger i samme Tid og være udi samme
Forhold, det er; de i samme Tid igiennemløbne Rum i Verti-
calen og over den skraaeliggende Linie maa ligeledes forholde
sig til hverandre som Længden af samme Linie til Høiden (Taf.
I. Fig. 12.) som $AB : AC$. §. 24.

§. 74.

Følgelig kan man let finde, hvad Stykke paa den skraae-
liggende Linie AB der igiennemløbes af Tyngden, imidlertid
at den hele Vertical AC igiennemløbes. Man har alene no-
dig fra Enden C af Verticalen at kaste en Perpendikel ned paa
BA, CD nemlig; saa er AD det paa AB igiennemløbne
Rum §. 73.. Thi i det retvinklede Triangel BAC er $AB : AC$
 $= AC : AD$.

§. 75.

Hastighederne
i begge disse Til-

Man seer ligeledes, at den Hastighed, som paa den
skraaeliggende Linie forarsages i samme Tid, som Vertica-
len

len igiennemløbes, forholder sig til Hastigheden vunden ved sælde forholde
Faldet igiennem Verticalen, som den skraaeliggende Linies sig ligeledes.
Høide til dens Længde.

Thi de i samme Tid i Verticalen og paa den skraae Linie igiennemløbne Rum forholde sig som $AC:AD = AB:AC$
§. 73. følgerig og Hastighederne i Enden af Faldet, som $2AB:$
 $2AC$ §. 49. 72. følgerig og som $AB:AC$, som Liniens Længde
til Liniens Høide.

§. 76.

Videre sluttet (Fig. 13. Taf. I.), at dersom fra det ver- Diametern og
ticale Punkt A i Diametern trækkes saa mange Strenge eller alle fra dens ver-
Chordæ AE som man vil, da igiennemløbes de alle udi en ticale Spitse
Tid, og i samme Tid som Diametern AB. trofne Strenge
igiennemløbes i
samme Tid.

Thi forlænges AE til F og BE trekkes, da er AEB en
ret Vinkel, følgerig $AF:AB = AB:AE$. Saa at alle Stren-
ge, som AE, igiennemløbes i den Tid som Diametern AB. §. 73.

§. 77.

Man kan indsee den sande Åarsag til denne Isochronis- En anden denne
me eller Lighed i Tiden ved at betragte de hastiggjørende Kræf- Sags Åarsag.
ter selv. Over alle Planer eller skraaeliggende Linier af samme
Høide ere de hastiggjørende Kræfter, som Længderne af Kor-
derne eller Strenge AE, følgerig altid Virkningerne i sam-
me Orden proportionerte.

Thi da den hastiggjørende Kraft er som $\frac{hg}{L}$; ere da baade
 h og g bestandige Størrelser, bliver det foranderlige som $\frac{1}{L}$,
L følgerig

følgelig som Længden af Planet forkeert. Men $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$.
 $\frac{AB^2}{AF} = AE$, men AB er en bestandig Størrelse, følgelig bli-
 ver $\frac{1}{AF} = AE$; eller, den hastiggjørende Kraft over Korden AE
 er dens Længde proportionert.

§. 78.

Ved at falde
 ned ad et skraae-
 liggende Plan
 vindes den sam-
 me Hastighed i
 Enden af Fal-
 det, som ved at
 falde igiennem
 den skraae Linies
 verticale Høide.

Falder en Ting, drevet af Tyngden (Fig. 12. Taf. I.)
 ned over den skraaliggende Linie AB; da er Hastigheden i B
 dog net op den samme, som den, den skulde vinde ved at fal-
 de igiennem Høiden AC udi C. Thi kaldes Hastigheden udi
 C, h , da bliver den i D $= \frac{AD}{AC} \cdot h$ §. 75. Thi $AC:AD = h$
 til Hastigheden udi D. Men Hastigheden udi D er til den
 udi B $= \sqrt{AD} : \sqrt{AB}$. §. 72. følgelig $\sqrt{AD} : \sqrt{AB}$
 $= \frac{AD}{AC} \cdot h : \frac{\sqrt{AD} \cdot \sqrt{AB}}{AC} h$, som er Hastigheden udi B, og der-
 for bliver Hastigheden udi B til den i C, som $\frac{\sqrt{AD} \cdot \sqrt{AB}}{AC} \cdot h : h$
 $= \frac{\sqrt{AD} \cdot \sqrt{AB}}{AC} : 1$. men $AB:AC = AC:AD$. Følgelig bli-
 ver $AC = \sqrt{AB} \cdot \sqrt{AD}$, og derfor $\frac{\sqrt{AD} \cdot \sqrt{AB}}{AC} = 1$, saa
 Hastigheden i B er til den i C $= 1 : 1$, følgelig ere de lige
 store.

§. 79.

Der samme
 gælder i flere
 Planer

Følgelig; da de Hastigheder, som vindes ved at falde
 over Planerne AB, BC. CD. (Fig. 1. No. I. T. 2.) ere de
 samme,

samme, som de der i Faldet vindes ved at igiennemløbe Høi- imod hinanden
derne, som svare til Planerne Af, Bb, CK; eller den hele og i alle frumme
Høide AE. Linier, saa Ha-
stigheden altid
kan tilkiendegiv-

Og da videre den hele frumme Linie AGF er intet an- ves ved Qua-
det end en Mængde af deslige Planer eller færaae Linier, beie- drat-Roden af
den verticale
Høide.
de under meget stumpe Vinkler imod hverandre, saa sees,

- 1) At i Almindelighed vindes ved ald Fald over alle Slags
frumme og færaaeliggende rette Linier en Hastighed,
der er som Quadrats-Roden af deres Høide efter Ver-
ticalen AE. Saa
- 2) at Hastighed kan tilkiendegives ved denne Quadrats-
Rod.

§. 80.

Man kan derfor altid, naar det Rum er givet, igiennem At finde det
hvilket en vis Hastighed vindes, finde, igiennem hvad Rum Rum, som i
en tung Ting maatte falde, for at faae i Enden af Faldet en Tingenes Fald
anden givne Hastighed, om Faldet fæer over Planer af sam- svarer til en vis
me Inclination. givne Hastighed.

Thi dersom ved at falde igiennem det Rum r over et
inclinert Plan den Hastighed h faaes, og man søger det Rum
 x , som svarer til en givne Hastighed H , da er $r:x=hh:HH$
og $x=r \cdot \frac{HH}{hh}$. §. 72. 2.

Men man seer uden Noie, at det er i alle deslige
Tilfælde nok at giøre Udregningerne for de verticale Høider
alene.

§. 81.

Tiden af Faldet igiennem et skraaelliggende Plan er til Tiden igiennem dens verticale Hoide, som dens Længde til dens Hoide, og over ligedan inclinerte Planer ere de, som Quadratkodderne af deres Længder.

Tiden af Faldet angaaende, da er

1) Tiden, i hvilken den skraaelliggende Linie AB (Fig. 12. Taf. 1.) selv igiennemløbes, i Forhold til Tiden, i hvilken sammes Hoide AC igiennemløbes, som $AB : AC$, som Li-
niens Længde til dens Hoide.

Thi da AC og AD igiennemløbes i samme Tid, saa er Tiden i D og C den samme, men Tiden i D er til Tiden i B som $\sqrt{AD} : \sqrt{AB}$. §. 57. Men $AB : AC = AC : AD$, og $AC = \sqrt{AD} \cdot \sqrt{AB}$. Følgelig, $\frac{AC}{\sqrt{AB}} = \sqrt{AD}$. Og $\sqrt{AD} : \sqrt{AB} = \frac{AC}{\sqrt{AB}} : \sqrt{AB} = AC : AB$

2) Ligeledes sees, (Fig. 1. No. 1 og 2. Taf. 2.) at Tiderne over skraaelliggende Planer, som under samme Vinkler staae paa Horizontal-Linien, ere som Quadratkodderne af disse Planers Længder. §. 72. 2. Og

3) ligeledes, at Tiderne igiennem flere deslige ligedan imod hverandre og imod Horizontal-Linien, det er, under lige store Vinkler boiede Planer, ere som Quadratkodderne af samtlig Planernes Længder. (Taf. 2. Fig. 1. No. 1 og 2.)

Thi da Planerne AB, BC, CD og *ab*, *bc*, *cd* antages at være ligedanne i deres hele Stilning; saa er det klart, at *ab*, *bc*, *cd* kunne ansees som Dele af AB, BC, CD, men Tiderne igiennem mindre og større Dele af det samme Plan forholde sig som Quadratkodderne af deres Længder; §. 72. følgelig og Tiden igiennem *ab* og AB, igiennem *bc* og BC,

BC, igiennem *cd* og CD som Quadrat-Rodderne af disse Planer.

4) Derfor ere og Tiderne igiennem alle ligedanne krumme Linier, som Quadrat-Rodderne af deres Længder.

5) Og af No. 1. flyder strax, at Tiderne igiennem adffillig inklinerte Planer til samme Høide, som AB, AE (Fig. 12. Taf. I.) ere i Forhold af disse Planers Længder.

§. 82.

Ligesom §. 76. Tiden igiennem alle Strengene eller Kor-
der AE i Cirklen var den samme, er og Tiden igiennem alle
Korder som BE den samme. Den samme nemlig, som igien-
nem Diametern AB. (Taf. I. Fig. 13.)

Thi kaldes Tiden igiennem Diametern AB, x ; den igien-
nem BE, T , igiennem EC $= z$, da er §. 81. I. $T : z = BE : GE$.

Altsaa $z = T \cdot \frac{GE}{BE}$, men $z : x = \sqrt{GB} : \sqrt{AB}$. Følgelig er $z \cdot \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{GE}}$

$= x$ og $x \cdot \frac{\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = z$, altsaa er $x \cdot \frac{\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = T \cdot \frac{GE}{BE}$, men AB : BE

$= BE : GB$ altsaa $BE = \sqrt{GB} \cdot \sqrt{AB}$, thi EG er parallel AB;
og derfor

$$x \cdot \frac{\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = T \cdot \frac{GE}{\sqrt{GE} \cdot \sqrt{AB}}, \text{ følgelig } x = T. \text{ Eller; Ti-}$$

den igiennem Diametern AB er ligesaa stor som Tiden igien-
nem en hver Korde som BE.

Tredie Tillæg.

Om Faldet over de krumme Linier, i sær om Faldet af Tyngden.

§. 30.

Bevægelsen af Tyngden over det inklinerte Plan bevises af de i forrige Tillæg anførte Slutninger.

Efter Bevægelsen i ret Linie, hvilken vi have affandlet udi forrige Tillæg, bør den tages udi Betragtning, som skeer i og over de krumme Linier. Denne sidste er igien to Slags. Den ene, som vi her ville vise de almindelige Regler for, naar Tingene, drevne af visse Kræfter, finde en Modstand i de Linier de bevæges over, som over ligesaa mange Kanaler, saa deres Bevægelse ei kan skee frit. Den anden, naar de uden at finde en saadan Modstand, frit og uhindret kunne beskrive krumme Linier. Denne sidste Omstandighed i Bevægelsen ville vi betragte siden. I dette Tillæg ville vi alene beskymre os om den første, og i den igien først og fornemmelig beskymre os om Bevægelsens Beskaffenhed i den Kræfternes Hypothese, da disse sidste enten ere bestandige som Tyngden, eller og Tingene virkelig drives af Tyngden selv.

IBlant de krumme Linier kan man regne den rette. Thi den samme Eighed, som indbefatter et Slags af krumme Linier, indbefatter og den rette, naar Eigheden til den krumme Linie paa en vis Maade bestemmes, saaledes som Cirklen forandres til en ret Linie, naar Halv-Diametern bliver uendelig stor. Vi ville derfor først betragte de ringe Tings Fald over den rette Linie, som den simpleste. Er den

vertik

vertical, da er Faldet frit, og desangaaende er bleven handler i næst forrige Tillæg. Selgelig hører herhid ikke uden de skraaeliggende rette Linier. Men alt, dem angaaende, bestemmes af det forhen sagte overmaade let, naar Tingene over dem drives alene af Tyngden eller en anden ligesaadan bestandig Kraft. Thi man kan endnu betragte Bevægelsen som frie, alene at de hastiggjørende Kræfters Værdie derefter indrettes, og Tingene i sig selv ikke anses uden som Punkter, eller som Inertier, hvis alle Dele have en og den samme Hastighed.

Saaledes, om man simpel hen vil undersøge Faldet af Tyngden, (fordi Beskaffenheden af de andre bestandige Kræfter er den samme) da kommer det paa et ud, enten man betragter den hele Tyngde g , som at have i naturlig Direktion den vertikale Linie, eller den Deel af den $\frac{b}{L}g$ at have til naturlig Direktion den skraaeliggende Linie, hvis Høide er h og hvis Længde er L , thi $\frac{b}{L}g$ er den bestandige Kraft, som driver hen efter det inklinerte Plan. §. 71. Forel.

Alene at dette iagttages, seer man strax, at alt det gielder i Hensende til Faldet over de skraaeliggende Linier, hvad vi forhen have sagt om Faldet i Verticalen. Thi

1. Angaaende Hastighederne, følger af §. 10. At dersom Legemet hviler i Begyndelsen af Faldet (hvilket vi med mindre at andet udtrykkelig siges, ville have her forstaaet overalt), da bliver
 - a) Hastigheden, som Quadrat Roden af det igiennemløbne Rum.
 - b) Og i Folge §. 10. 2. vindes ved Faldet igiennem Planets Længde den samme Hastighed, som den et Legeme vinder i frit Fald igiennem Verticalen. Thi, naar Hastighederne

skulle

ffulle være de samme i begge Tilfælde, blive de igiennemløbne

$$\text{Num som } g : \frac{bg}{L} = L : h$$

c) Saa forholde sig og, i Følge §. 14, de i samme Tid udi Verticalen og over det fkræaeliggende Bret vundne Hastigheder, som de over begge drivende Kræfter, fordi $gt = v$; og derfor, naar t er en bestandig Størrelse, bliver $g = v$. Saa at de i samme Tid i Verticalen og over det fkræaeliggende Bret vundne Hastigheder forholde sig imod hverandre, som Planets Længde til Planets Høide.

a. Angaaende Nummet: Da bliver, i Følge §. 15, 3, de udi samme Tider igiennemløbne Num i Verticalen nemlig, og over det fkræaeliggende Bret, som Planets Længde til Planets Høide.

3. Og i Henseende til Tiderne.

a) Da ere de over det samme Plan, som Quadrat-Redderne af de igiennemløbne Num. §. 15. 2.

b) Tiden over det fkræaeliggende Plan er til Tiden igiennem Planets Høide udi det frie Fald, som Planets Længde til Planets Høide. Thi §. 14. 2. er $gt = v$. Er v den samme, eller bestandig; bliver $t = \frac{L}{g}$. Derfor Tiden i Verticalen $= \frac{L}{g}$, og den over det inklinerte Plan $= \frac{L}{bg}$, selgelig blive de $= h : L$ eller som Planets Høide til dets Længde. Og saa videre.

§. 31.

Indledning
til at forstaae
Tingenes Fald

Vi ville her ikke igientage Resten, som er sagt om de tunge Tinges Bevægelse over fkræaeliggende Linier; da man af det allerede sagte

sagte fuldkommen seer de algebraiske Ligheders store Nytte, og hvor meget lettere man bringer Slutningen ud af dem, end ved de sædvanlige Maader at bevise paa. Vi ville her alene agte, at intet lettere sees, end at den Hastighed, hvilken en tung Ting vinder ved at falde igiennem en hver krum Linie, er den samme, som den der faaes ved at falde igiennem den Vertical, der maaler dens Høide; og dette ville vi saa meget meer vise, som vi derved bane Veien til at udregne de faldende Tings Bevægelse over de krumme Linier. Men man maa vel iagttage, at vi sætte fremdeles den hastiggierende Kraft som bestandig.

§. 32.

Til den Ende maa agtes (Fig. 2. Taf. 2.) at, om ADL er en krum Linie, hvad for en man vil, da er de tunge Tings Bevægelse over den den samme i en uendelig liden Tid, som over en sakraaliggende Linie, og over den hele krumme Linie den samme som over en Mængde af deslige sammenfæiede sakraaliggende Linier. For dersom, at finde en Bestemmelse for den hastiggierende Kraft hele Linien igiennem, kommer det alene an paa at finde en bestandig Forhold i foran, derlige Linier imellem disse smaa Planers Længde og Høide.

Er DE et af disse smaa Planer eller et Element af den krumme Linie AEL, hvis Vinkel vi antage at være horizontal, AB dens Abscisse, BD dens halve Ordinate, DIE et elementaire Triangel, som bestaaer af Abscissens, den krumme Linies og Halv-Ordinats Elementer, FGH derimod et Triangel, i hvilket FH er Hørelinien, betragtet som et sakraaliggende Plan; FG Planers Høide, GH dets Grund- eller Horizontal-Linie, da bliver $DE:EI = FH:$

M

FG,

FG, thi ved I og G ere rette Vinkler, og GE ligeløbende med FG. Da derfor denne Proportion er den samme til alle Punkter i den krumme Linie. Kaldes da AB x , BD y ; bliver IE $= dy$ og siden den hastiggjørende Kraft over alle skraaeliggende Linier, naar den naturlige Tyngde, er $g = \frac{FG}{FH}$, kaldes da AD, s , saa DE $= ds$, da bliver denne hastiggjørende Kraft til alle Punkter i den krumme Linie ADL $= \frac{dy}{ds}g$, og den derimod, som trykker i alle Punkter perpendicularer paa den krumme Linie $= \frac{dx}{ds}g$. Vi ville her alene betragte nogle Følger af den første, som den nyttigste.

§. 33.

Hastigheden er i alle krumme Linier som Quadrat-Roden af deres verticale Høide.

Da nu §. 7. $ngdy = vdv$. Saa er i alle krumme Linier, over hvilke Tyngder falde, $\frac{ngdy}{ds}ds = vdv$, §. 32. og selgelig $ngdy = vdv$

er h den Høide, som svarer til v , bliver $dy = dh$, og $y = h$. §. 17. Selgelig er Hastigheden i Enden af Verticalen AG, udi G, den samme som i Enden af den krumme Linie AL udi L, naar nemlig en Tyngde falder igiennem begge.

§. 34.

Man seer let, at jeg i denne Oplesning haver antaget som sandt, at saa tidt som en Inertie bevægede sig med en given Hastighed ned over en krum Linie, uden at blive i sin Bevægelse hindret eller besværet af hastiggjørende Kræfter, saa at dens Bevægelse alene var en Følge af den ensdanne Hastighed, hvormed den gleeed ned efter den krumme Linie,

nie, at da denne Hastighed aldeles ikke blev forandret ved Faldet over Linien. Thi saasnart som dette er, da følger, at de hastiggjørende Kræfter ikke anderledes kunde befordre eller hindre Hastigheden af Bevægelsen, end paa den nylig sagte Maade. Den Deel af Kræften nemlig, som er perpendicularer paa den krumme Linie hindrer Bevægelsen ikke i og for sig. §. 67 F. men gier alene, at Direktionen forandres. Den Deel af Kræften derimod, som virker efter Tangenten, gier alene den her udregnede Forandring. Følgelig er vores Slutning uimodsigelig rigtig, om ellers den Hastighed, som engang er bleven til, i Inertiernes eensdanne Bevægelse over de krumme Linier ikke forandres. Men det forstaaer sig selv, at vi her ikke bekymre os om den Modstand af Bevægelsen, der sædvanlig tilkiendegives ved Navn af Friction, og som kommer af Planets Ujevnhed.

Man kan let overbevise sig om denne Sandhed; thi er Taf. 1. Fig. 14. BAE en krum Linie, eller rettere AB og AE to af dens Elementer, da saafremt disse sidste, saaledes som vi her antage det, giere under sig en saa stump Vinkel BAE, saa at Vinklen DAE, der gøres af Tangenten AD og Elementet AE er uendelig liden. Og AC, CE ere Radii Osculi til AE, eller Halv-Diametret af den Cirkel, som over AE er med den krumme Linie fuldkommen af samme Krumning, da er Vinklen $ACE = DAE$.

Bevægedes Inertien frit, skulde den fra BA gaae fort efter Tangenten AD, men siden den, formædelsst den krumme Linies Modstand og Hindring bevæger sig fremdeles i et dens Element AE, saa synes virkelig Hastigheden at maatte kunde lide nogen Forandring i det Inertien tvinges fra den Direktion AD, hvillen den af sin naturlige Drift søger, til at gaae udi Direktionen AE; allermest, da Be-

Man seer deraf let, hvorledes i det Tilfælde, da et Legeme stiger, det Punkt i den givne krumme Linie kan bestemmes, til hvilket det kan stige og ikke høiere, om den givne Due af Linien nemlig er lang nok. Thi da $V = B - gy$, da om $V = 0$, som er det der bestemmer dette Tilfælde, da bliver $B = gy$ og $y = \frac{B}{g}$. Følges da y er givet, kan Punktet i den krumme Linie altid findes.

§. 36.

Videre bestemmes Tiden af Bevægelsen ved Faldet i de krumme Linier.

Før nu at finde Tiden, maa videre agtes, hvad vi udferstlig have viist i nest forrige Tillæg, at i Almindelighed Tiden kan overalt

forstaaes af den Lighed $dt = \frac{dy}{v}$. Men $dy = ds$ i dette Tilfælde,

da Faldet skeer i en krum Linies Due, og v eller $\sqrt{v} = \sqrt{B - gy}$,

følgelig $t = \int \frac{ds}{\sqrt{B - gy}}$. Før da at finde Tiden, har man alene

nødig at give v ved en Function af s , det er i en sammensat og hvorledes man vil, indviklet Forhold af s og bestandige Størrelser, s. E.

Om v er $= s^n$, da bliver $\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{s^n}$, og følgelig

$\frac{1}{(1-n)s^{n-1}} + B$. Er $n-1$ positiv, bliver $B = \frac{1}{0} = \infty$,

naar $s = 0$; og igiennem det mindste Rum Tiden umuelig, følgelig og Bevægelsen umuelig, saa denne Tilfælde ei kan have Sted i Naturen.

Er $n-1$ derimod negativ, bliver $t = \frac{s^{1-n}}{1-n}$ og $B = 0$, naar $s = 0$, saa Bevægelsen er i denne Tilfælde altid muelig.

§. 37.

Bevægelsen i Cykloiden bestemmes.

Da af alle de herhid hørende Tilfælde ingen er vigtigere end den, naar en tung Ting falder eller ruller ned ad en Cykloide, saa ville vi ved

ved det særdeles opholde os (Fig. 3. Taf. 2.). AGE forestiller da en halv Cykloide, BFE den Cirkel, i hvis Peripherie et Punkt E beskriver Cykloiden, imens at Cirklen BFE selv veltes hen efter Linien AB, som er Aksen af Cykloiden. Man maa erindre sig, at Længden af Cykloidal-Buen gE er saa stor som to gange den til den svarende Streng, eller Chorda FE i den Cirkel BFE, som beskriver Cykloiden. Dette forudsat, kaldes da Diametern i Cirklen BFE nemlig BE , $2a$; den Linie Ed , som svarer til Buen Eg , b , et hvert ubestemt Stykke af EB , x ; og et Element af samme dD , dx ; et Element af Cykloiden gh , ds , og $Eg = s$, da siden §. 3 2. i alle krumme Linier den hastiggierende Kraft af Tyngden i et hvert Punkt er $\frac{gdy}{ds}$, og efter den her giorte Benævning af x , $\frac{gdx}{ds}$, maa denne Kraft bestemmes i Cykloiden.

Da derfor i denne Linie $2FE = gE$, eller $2\sqrt{2ax} = s$, saa er $8ax = ss$ og $sds = 4adx$, altsaa $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{4a}$, saaledes bliver altid den hastiggierende Kraft udi Cykloiden $\frac{s}{4a}g$, selvselig er den idelig proportionert Længden af Buen, hvilket strax, i Følge af hvad vi forhen have fundet, §. 2 2, kunde give en Formodning for at Tiden igiennem den hele Cykloide AE , og enhver anden dens Bue, som gE eller TE , burde være lige stor, thi man kunde paa en vis Maade ansee E , som det Punkt, hvortil Krafterne drev.

Men for at see dette desto tydeligere, ville vi først søge Hastigheden til et hvert Punkt i Cykloiden, som en Forberedelse til siden at finde Tiden. Da nu §. 4. i Almindelighed $dv = pdt$, saa bliver i Cykloiden, hvor $p = \frac{s}{4a}g$, bestandig i alle dens Punkter $dv = \frac{s}{4a}gdt$,
og

og $dt = -\frac{ds}{v}$, $v dv = -\frac{g}{4^a} s ds$, følgelig $\frac{1}{2} vv = -\frac{g}{8^a} ss + B$.

For at finde B, maa fastsættes i hvad Punkt g af den krumme Linie AgE at Bevægelsen begynder; er til samme $ED = b$, da er $EF = \sqrt{2ab}$, og naar $vv = 0$, bliver $\frac{g}{8^a} ss$ forandret til gb . Følgelig er $B = gb$ og $\frac{1}{2} vv = gb - \frac{g}{8^a} ss$, saa man faaer

$$v = \sqrt{\frac{8agb - gss}{4^a}}, \text{ som er Hastigheden i Cykloiden.}$$

§. 38.

Ligeledes Ti-
den af Bevæ-
gelsen

For nu videre at finde Tiden, i hvilken Cykloiden og dens Buer af en tung Ting kunne igiennemløbes, da bliver §. 7. $dt = \frac{dy}{v}$

forandret til $dt = -\frac{ds \cdot \sqrt{4^a}}{\sqrt{8agb - gss}}$ §. 37.

$$= \frac{-ds}{\sqrt{8ba - ss}} \cdot \frac{\sqrt{4^a}}{\sqrt{g}} = \frac{-\sqrt{8ab} \cdot ds}{\sqrt{8ab - ss}} \cdot \frac{\sqrt{4^a}}{\sqrt{8abg}}$$

Ansees $\sqrt{8ab}$ som den halve Diameter i en Cirkel, da bliver $-\frac{\sqrt{8ab} \cdot ds}{\sqrt{8ab - ss}}$

(om LE er denne Halv-Diameter og $LQ = s$) i den Quart-Cirkel MNE , Buen NE . Og for Faldet igiennem den hele Cykloid = Bue gE , Quart-Cirklen MNE Integralen; thi naar Faldet er til Ende udi E , er $s = 0$. Man behøver ei at legge en bestandig Størrelse til, fordi i g , hvor Faldet begynder, bliver Integralen $= 0$, som den her.

Tiden igiennem
store og smaa
Buer i den om-

Altjaa er Tiden af Faldet igiennem enhver Bue siden eller stor
Buer i den omvendte Cykloide, naar nemlig Faldet endes udi Spidsen E ,
 $= \text{Qua}$

$\frac{\text{Quadrans-Circuli}}{\text{Halv-Diametern}} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$, og da denne Størrelse altid er bestandig, vende Cykloide er lige stor.

saa bliver Tiden igiennem den hele Cykloide og alle dens Buer lige stor.

§. 39.

Da nu Tiden af Faldet igiennem Diametern $2a$, Diame- Og Tiden igien-
tern nemlig af den Cirkel, som beskriver Cykloiden, er §. 16, nem en saadan
Bue er til Tiden
igiennem den
verticale Dia-
meter af Cirklen,
der beskriver
Cykloiden, som
den halve Peri-
pherie til Dia-
metern.
Cykloide AgE , hvis Spitse nemlig staaer i E , er til Tiden af Fal-
det igiennem BE eller den verticale Diameter i Cirklen BFE , der
beskriver Cykloiden; som Cirkelns halve Peripherie til Diametern,
eller noget næsten som $11 : 7$.

Thi Forholden er; om $d : p$ betyder som §. 23 : den af

$$\frac{\frac{1}{4}p}{\frac{1}{2}d} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}p : d.$$

§. 40.

Man kan ellers bevise det samme paa en endnu lettere og kortere
Maade. Thi da $Ed = b$, saa bliver den Hastighed, som svarer til
et hvert givet Punkt T i Cykloiden imellem g og $C = \sqrt{2gb - 2gx}$

§. 79. 1 Forcl. og §. 12. Till. Følgelig bliver $dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{b-x}}$

og fordi i Cykloiden $ds = \frac{4adx}{\sqrt{8ax}}$, bliver $dt = \frac{\sqrt{4a}}{b\sqrt{g}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}b dx}{\sqrt{bx - xx}}$.

Er da Taf. 11. Fig. 10. $AB = b$ og AcB en Halv-Cirkel over AB .

$\mathfrak{N}$

BD

$BD = x$, da er $Ac = \int \frac{-\frac{1}{2}b dx}{\sqrt{bx - xx}}$, hvilket, naar $x = 0$, forandres til den halve Peripherie AcB . Følgelig bliver, for den hele Tid af Faldet, Tiden igiennem Cykloiden $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{AcB}{AB}$. Men $\frac{AcB}{AB}$ er Forholden af den halve Peripherie til Diametern, eller af Kvadranten til Halv-Diametern, ligesom før udi §. 38.

§. 41.

Tiden af Faldet igiennem smaa Cirkel-Buer, ved en almindelig Differential-Værdie bestemmes i den hule Deel af som ere af ad- enhver Cirkel-Bue, men det, som i denne Henseende er videre af Bøg- stillet Størrelse, er den samme; tighed, bestaaer i at finde den Forhold, som Tiden igiennem smaa Cirkel-Buer haver til Tiden af et ligedant Fald igiennem Cykloiden.

Er da FBH en Cirkel-Bue, hvis Halv-Diameter AB (Taf. 2. Fig. 4.) vi vilde sætte saa stor som $4a$, for at holde en Lighed i disse Regninger med de i Cykloiden, (thi det cykloidiske Vændul er saa lang, som den halve Cycloide, og denne igjen 2 gange saa stor som Diametern af den Cykloiden beskriverende Cirkel, det er 4 gange saa stor som dens Halv-Diameter) Er BE, eller Sinus versus af den givne Bue $FB = b$, thi Begyndelsen af Bevægelsen antages her at stee udi F, $BG = x$, da er Hastigheden udi $D = \sqrt{2g \cdot (b-x)}$ §. 12. 30. 1. b.

Da derfor igiennem den uendelig liden Bue Dh , om $DB = x$, $dt = \frac{-ds}{v}$ §. 15. er her $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(b-x)2g}}$. Men i Cirklen er Elementet af Buen $ds = \frac{4adx}{\sqrt{8ax - xx}}$, naar $BG = x$. Følgelig bli-

$$\text{ver } dt = \frac{-ds}{\sqrt{b-x} \sqrt{2g}} = \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx} \sqrt{b-x} \sqrt{2g}},$$

$$\text{og } t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx} \sqrt{b-x} \sqrt{2g}}.$$

Tages nu alt som før i Cycloiden, da er Tiden igiennem en Cycloidal-Bue af samme Høide, som Cirkel-Buen FB

$$= \int \frac{-\sqrt{8ab} \cdot ds}{\sqrt{8ab-ss} \sqrt{2gb}}, \text{ §. 38. og fordi i Cycloiden } s = \sqrt{8ax},$$

$$\text{følgelig og } ds = \frac{4adx}{\sqrt{8ax}}, \text{ saa bliver}$$

$$\begin{aligned} \frac{-\sqrt{8ab} \cdot ds}{\sqrt{8ab-ss} \sqrt{2gb}} &= \frac{-4adx}{\sqrt{8ab-ss} \sqrt{2gx}} = \frac{-4adx}{\sqrt{8ab-8ax} \sqrt{2gx}} \\ &= \frac{-4adx}{\sqrt{8abx-8axx} \sqrt{2g}}, \end{aligned}$$

sættes nu i Ligheden for Tiden i Cirkel-Buen, som er i Følge det forri-

$$\text{ge } t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx} \sqrt{b-x} \sqrt{2g}}, \text{ } x \text{ at være overmaade liden, da}$$

forsvinder xx imod x , og man faaer saavel for Cirklen, som for Cy-

$$\text{cloiden den samme Lighed, } t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8abx-8axx} \sqrt{2g}}.$$

Følgelig er Tiden igiennem ganske smaa Cirkel-Buer den samme, som Tiden af Faldet igiennem den forkeert lagte Cykloide og dens Buer. Saa man derfor i denne Henseende altid kan betjene sig af smaa Cirkel-Buer, i Steden for Cykloidale.

§. 42.

Tiden af Faldet
i Cirkel-Buerne
bestemmes.

Vil man vide en neiere Forhold af Tiderne og deres Forskiel i Cirklen og i Cykloldal-Buerne. Da maa man af den uendelige Følge,

hvori $\frac{1}{\sqrt{8ax-xx}}$, eller $\frac{1}{8ax-xx} - \frac{1}{2}$ kan opløses, beholde de Dele af Følgen, som i Henseende til alle de andre i samme ere af nogen betydelig Sterrelse, hvilke ikke ere uden de to første, og bliver derfor

$$\frac{1}{\sqrt{8ax-xx}} = \frac{1}{\sqrt{8ax}} + \frac{x}{16a\sqrt{8ax}}. \text{ Saa derfor}$$

$$t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx} \cdot \sqrt{b-xx} \cdot \sqrt{2g}} = \frac{4a}{\sqrt{16ag}} \cdot \int \frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}} + \frac{1}{4\sqrt{16ag}} \int \frac{-xdx}{\sqrt{bx-xx}}.$$

Det første Stykke af Summen $\frac{4a}{\sqrt{16ag}} \int \frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}}$ er som man seer af

§. 41. tilføjes baade for Cirklen og for Cyklolden, er (T. 2. §. 10.) AcB en Halv-Cirkel, da er det, om $AB = b$, $Bd = x$, Cirkel-Buen BC, og saa tidt som Summen er negtende, denne Bues Forskiel fra den halve Cirkel-Peripherie, nemlig Buen Ac.

Summen derimod, eller Integralen af det andet Stykke $\frac{1}{4\sqrt{16ag}}$

$\int \frac{-xdx}{\sqrt{bx-xx}}$ er den søgte Forskiel imellem Tiden i Cirkel- og Cykloldal-

Buerne. Da nu $\frac{-xdx}{\sqrt{bx-xx}} = \frac{\frac{1}{2}bdx - xdx}{\sqrt{bx-xx}} - \frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx-xx}}$, saa er Inte-

tegralen $\left(\sqrt{bx-xx} + \int \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx-xx}} \right) \frac{1}{4\sqrt{16ag}}$. Men $\int \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx-xx}}$

er

er igien, som før, Cirkel-Buen Ac , sølgelig bliver $\frac{8a}{b\sqrt{16ag}}$, Ac

+ $(\sqrt{bx-x^2} + Ac) \frac{1}{4\sqrt{16ag}}$ det søgte Integral.

Da nu for den hele Tid af Faldet $x=b$, er og $\sqrt{bx-xx}=0$, og $Ac=AcB$. Kaldes da Tiden i Cycloiden R , bliver Tiden i Cirkel-Buen $R + \frac{b}{32a}R$. Er Buen overmaade liden, bliver b at ansee som $=0$, og Tiden i Cirkel-Buen $=R$, det er, som før er blevet sagt, den bliver saa stor som Tiden igiennem Cycloiden.

§. 43.

Herved kan videre agtes:

- 1) At ligesom den i §. 38 fundne Størrelse for Tiden $R + \frac{b}{32a}R$ ikke er uden for smaa Cirkel-Buer, saa kan samme altid ligeledes bestemmes for de Større ved at opløse $(8ax-xx) - \frac{x}{2}$ i en uendelig Følge, af hvilken saa mange Leed integreres, som Buens Størrelse udfordrer, paa det at de øvrige Leed i Følgen kunde blive regnede for intet.
- 2) I den Hypothese af smaa Sving over Cirkel-Buerne forholde de noget større sig til det, som virkelig er uendelig lidet, noget næsten som $R + \frac{b}{32a}R : R$, sølgelig $= 32a + b : 32a$, eller; som 4 gange Diametern forstørret om Sinus versus af Buen, i hvilken Svinget sfeer, til 4 gange Diametern.
- 3) Sølgelig, da til en Due af $7^\circ 30'$, b eller Sinus versus er 0.09, saa bliver for en Due af denne Størrelse $\frac{b}{32a} = \frac{9}{8000}$.

Følgelig kan in Praxi, eller i Brug, en Bue af 15° ansees som ikke at være adskillig fra Cykloidal-Buerne. Endnu under et Sving af 18° bliver $\frac{b}{32a}$ ei større end $\frac{12}{8000}$.

- 4) Dette sidste giver Cirklen et virkeligt Fortrin i Henseende til Pendulernes Bevægelse, hvorom udsærlig skal blive handlet i det følgende. Thi det er klart, at saa længe, som Svinget er virkelig uendelig lidet, da haver den ingen Fortrin frem for de fleste andre krumme Linier. Thi saa tidt som den liden Bue, hvorover Tyngden falder, er fuldkommen af samme Beskaffenhed, som den, hvorover samme Tyngde stiger, da behøves alene, at søge Radium Osculi, eller Kærcirkelns Halv-Diameter, for at giøre Pendulet saa lang som den. Ere disse to Buer ulige, maa Kærcirkelns Halv-Diameter søges for dem begge, da man altid ved en simpel Stift, som forkorter Pendul-Traaen, kan giøre, at Pendulet i at falde kan have en Længde, og i at stige en anden.
- 5) Ydermere kan agtes, at saa længe Svinget er virkelig over en uendelig liden Bue, kan det være det samme, hvad heller at den virkende Kraft sættes i sig bestandig eller foranderlig, siden den i en saa liden Bevægelse dog aldrig kan ansees for andet end en bestandig Kraft.

§. 44.

I hvad Tilfælde en Mængde rette Linier igiennemløbes udi samme Tid.

Vi have i vore Forelæsninger §. 76, 82, talt om en Deel rette Linier, som kunne igiennemløbes i den samme Tid, man kan af deslige Linier paa denne anden Maade finde en Mængde. (Fig. 5. T. 2.)

Der-

Derfor over en Linie ACEG, slaes saa mange Halv-Cirkler ABC, AHE, AFG, som man vil, og Hastighederne i alle Punkter af AC ere, som de halve Ordinater DB af Cirklen ABC, der svare til Punkterne i AC. Over AE ligeledes, som de halve Ordinater DH af den halve Cirkel AHE, over AG, som de halve Ordinater DF udi AFG o. s. v. i det uendelige; da igiennemløbes alle disse Linier i den samme Tid.

Thi da; om AC eller AE eller AG kaldes $2a$. AD, x . DB eller DH eller DF $= \sqrt{2ax - xx}$, saa bliver i denne Tilfælde

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$$

og $t = \frac{1}{a} \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, følgerig er den som $\frac{p}{d}$, om $\frac{p}{d}$ er Forholden imellem Diametern og Peripherien. t betyder her den hele Tid, hvori Diametern AC eller AE, eller AG igiennemløbes. Men den hastiggjørende Kraft, som til denne Bevægelse udfordres, er $= a - x$ §. 50. som Distancen fra Centret. See §. 22. I.

§. 45.

Smidlertid kan man, saavel i Henseende til de rette, som i Henseende til de krumme Linier i den Hypothese af bestandige Kræfter bestemme en Mængde, som alle igiennemløbes udi samme Tid. Saaledes T. V. Fig. I. vilde vi antage, at ABC, AEF ere ligedannede Linier, hvis Buer AB og AE af faldende Længder skulde igiennemløbes udi samme Tid, i samme nemlig, som Faldet skeer ned efter Verticalen AG. Er da AB en saadan Bue i en af disse krumme Linier, Saa vel som Buer af andre.

Linier, og $AN = x$, da bliver Tiden i Almindelighed i den Hypothese af bestandige Kræfter proportionert $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Er a en given bestandig Sterrelse, maa i alle Buerne AB, AE, $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = a$. Saa tidt derfor, som $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ er virkelig integrabel, er det altid meget let at finde Differential-Ligheden til samtlige de foresatte Linier, thi er $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = R$ og $R = a$, bliver $dR = 0$, som er den Lighed, der bestemmer alle Punkterne, som B, E, G, alene at man vel agter, at om ellers dR skal kunde passe sig til alle de foresatte Linier, maa Differentialen af en af disse ligedanne Linier tages saaledes, at Parametern behandles, som en foranderlig Sterrelse under Differentiationen.

Da ved denne Differential-Lighed x altid maa kunde bestemmes af den særlige Værdie af Parametern, saa tidt som $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ er integrabel; saa kan og i dette Tilfælde y altid bestemmes, og saaledes de søgte Punkter B og E findes, men da disse Punkter bestemme den krumme Linie IEG, hvilken gaaer igiennem dem alle, og derfor kaldes Linea synchrona, eller de lige Tiders Linie; saa sees ligeledes, hvorledes den kan bestemmes, ei alene ved Construction, men endog ved at finde dens virkelige Lighed; naar nemlig i Steden for Parametern sættes dens Værdie i x og y udi den sidst fundne Lighed.

Man kan og finde deslige Buer i de Tilfælde, da $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ ei er integrabel, endog i Tilfælde, da de givne Linier ei ere ligedanne, men da

da denne Værdi ei er stort til Nytte, ville vi ikke indlade os i de vidt-
løstige Undersøgninger, som her behøvedes, men alene opløse det alles-
rede sagte udi et Par af de simpleste Tilfælde.

§. 46.

Er samtlig Linierne AB, AE, AG rette Linier. Tan-
genten af Inklinationen, hvilken de have med Vertikalen, t . Den hele

Sinus = 1, bliver $y = tx$, $s = AI = x \sqrt{1+t^2}$ og $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$

$= \sqrt{\frac{1+t^2}{g}} \int dx \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2 \sqrt{\frac{1+t^2}{g}} x^{\frac{1}{2}}$; men efter, hvad vi for-

hen have sagt, er $2 \sqrt{\frac{1+t^2}{g}} x^{\frac{1}{2}} = a$, og derfor $dx + t^2 dx + 2txdt$

$= 0$ eller $\frac{dx}{x} = -\frac{2tdt}{1+t^2}$, hvoraf faaes, $x = \frac{1}{1+t^2}$.

Da nu videre $t^2 = \frac{y^2}{x^2}$, saa bliver $x^2 + y^2 = x$, og fordi
Størrelserne overalt her være af et Slags i den fundne Lighed, bliver

$x^2 + y^2 = bx$, naar Høiden AG = b , thi b eller $\frac{a\sqrt{g}}{2}$, hvil-

ket er det samme; er den bestandige Størrelse, der gik bort under
Differentiationen, og, som man let seer, bestemmer her alene den
krumme Linie, som Parameter. Skönt man seer det og deraf, at naar
 $y = 0$, skal x være saa stor som b , fordi den krumme Linie maa selv
gaae igiennem G. Men $y^2 = bx - x^2$, er til en Cirkel, hvis Dia-
meter = b , eller Høiden AG.

Saa man deraf atter igien seer, hvad vi forhen have sagt §. 76. §. at alle Cirkels Chorda eller Strenge trokne fra Diameterns øverste Spitse til Peripherien, igiennemløbes alle udi en og den samme Tid.

§. 47.

Er de givne Linier AB, AE, Cykloider, da findes Buerne og selgelig Punkterne i den synchrone Linie selv overmaade let, uden at det gieres nedig af den almindelige og forhen omtalte Oplosnings-Maade at finde disse Punkter. Thi er KMC den Cirkel, hvis Punkt

C beskriver Cykloiden CA, da er Tiden igiennem AB = $\frac{2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{KM}{\sqrt{KC}}$

og den givne Tid igiennem AG = b ; er $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$, selgelig bliver i Sel-

ge Hypothesen $\frac{KM}{\sqrt{KC}} = \sqrt{b}$. Derfor er KM den miltlere proportio-
nelle imellem KC og AG; naar da denne Bue tages saaledes, og
Halv-Ordinaten DM treffes ud til B, da bliver AB den forlangte
Bue af Cykloiden, og paa samme Maade kunde de synchrone Buer
bestemmes i alle de andre givne Cykloider, som gaar fra det Punkt A.

§. 48.

Almindelige
Regler, naar
Krafterne ere
foranderlige
og centrale.

Ligesom vi hidtil have oplost dette Slags Problemata i den
Hypothese af de bestandige Krafter, kan man ligeledes oplose dem i
og hvad andre Hypotheser af Krafterne, som man vil. Den almindelige
Oplosnings-Maade bliver altid den samme. Forskiellen i Krafternes
Love beroer enten paa hvad de ere i sig selv, eller hvorledes de virke i
Henseende til deres Direktioner. Det sidste giver to Hoved-Tilfælde,

den

den ene, som vi allerede have behandlet, naar Direktionerne overalt antages som Parallele, den anden, naar de sættes idelig at søge ind til et og det samme Punkt, som Central-Kræfterne. I begge disse Hypoteser kunde igien utallige Love for Kræfterne have Sted. Vi ville derfor alene vise, hvorledes i Almindelighed de Problemata kunne opløses, som henhøre til det sidste Tilfælde, da nemlig Kræfterne altid virke efter Direktioner, som søge til et Punkt.

Overalt i dette Tilfælde (Taf. X. Fig. 2.) ville vi sætte, at Kraften K virker efter de Direktioner CB , DB , som søge til et og det samme Punkt B . Distancen CB ville vi i Almindelighed ansee som semiordinate $= y$, og naar Cirkel-Suerne CE , DF trekkes, bliver $CL = -dy$, om nemlig CB er uendelig nær ved DB ; og $CD = ds$ bliver Elementet af den krumme Linie. Forestilles den hele Kraft ved DB , og denne igien opløses i de to Side-Kræfter DI , som er i Direktion af Tangenten CDI , og DK , som er perpendicular på den krumme Linie, og $= BI$. Da sees let, at DI er som den Kraft, der driver efter Tangenten; BI derimod proportionert den, som virker perpendicular på den krumme Linie. Men CB og BD kunne ansees som parallelle, saa at CLD og DBI ere ligedanne Triangler, og derfor $CD : DL = DB : DI$. Kaldes den hele Kraft K , Tangential-Kraften T , da bliver $ds : -dy = K : \frac{-Kdy}{ds} = T$, hvilket er det samme, som vi forhen have fundet for Tangential-Kraften. §. 32, Derimod bliver $CD : DL = DB : BI$ eller $ds : \sqrt{ds^2 - dy^2} = K : \frac{K\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds}$, hvilket bliver Værdien af den perpendicularære Kraft, som forandres til $\frac{Kdx}{ds}$, som ser §. 32, om $\sqrt{ds^2 - dy^2} = dx$ og saaledes $DF = x$.

Ere Kræfterne saaledes fundne, da er i øvrigt Dødsningen lige-
som før, thi om V er Høiden, som svarer til Hastigheden, bliver
bestandig $\frac{-Kdy}{ds} = -Kdy = dV$ og $V = \int -Kdy + B$,
følgelig bliver $dt = \frac{ds}{\sqrt{\int (-Kdy) + B}}$; som ere de almindelige Lige-
heder for Hastigheden og Tiden.

§. 49.

Sætter man i Steden for K hvad Kræfternes Lov, som man
selv vil i disse sidste Formuler, og ligeledes i Steden for g i de forhen
givne §. 30, da kunne Dødsninger gieres for alle Slags Kræfter,
siden Differential-Lighederne for Hastigheden og Tiden altid kunde fun-
des, og følgelig dette Slags Problemata altid almindelig opløses.
Men de fleste af disse Spørgsmaal ere, saavidt man endnu veed, ikke
til stor Nytte, saasnart som nemlig deslige Love antages for Kræfter,
hvilke ei findes i Naturen, med mindre at man vil betiene sig af
dem, for at undersøge Rigtigheden eller Urigtigheden af en Hypothese.

En Post er dog særdeles Anmærkning værd i den næst forhen
anferte Formel af Hastigheden $V = \sqrt{\int -Kdy + B}$. At saa tidt som
 K er en Function af Distancen y alene, kan ved Faldet igiennem den
krumme Linie AC ingen anden Hastighed vindes, end den, som
skulde faaes ved Faldet igiennem AB , naar nemlig samme Kraft drev
Legemet igiennem AC og AE , thi Udregningen af Hastigheden maa,
som man let seer; nødvendig blive for begge Tilfælde den samme, fø-
lgelig Hastigheden selv, som alene beroer paa y , altid den samme, saa tidt
som Distancerne fra Centret ere lige store.

§. 50.

Ligeledes; saa tidt som flere Kræfter virke paa et og det samme Punkt, der af dem drives og falder ned efter en krum Linie, da er Oplesningen i Almindelighed endnu den samme, siden man altid kan opløse enhver af dem for sig i to andre. En, som driver efter Tangenten, og en anden, som virker perpendicularer paa den krumme Linie. Ere de saaledes af adskillige Kræfter fundne tangentielle Kræfter T , T' , T'' + c. da bliver (V taget som før) $dV = (T + T' + T'')$ ds , og $V = \int (T + T' + T'' + \dots) ds + B$ og

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{(T + T' + T'' + \dots) ds + B}} \frac{1}{2}.$$

Vi ville ikke opholde os ved enkelte Exempler, fordi Nytten af dem ikke er betydelig.

§. 51.

Man kan paa en omvendt Maade, naar Egenskaberne af Tid, Af Faldets den eller Hastigheden og det igiennemløbne Rums indbyrdes Henseender, givne Egenskaber, i Henseende der til hverandre ere givne, ligeledes altid finde i det mindste den til Tiden, eller Differential-Lighed, som tilkiendegiver den krumme Linie, i hvilken Hastigheden, eller Rummet, Tiden eller Hastigheden og Rummet i deres indbyrdes Henseender til at finde den krumme Linie, hvori Bevægelsen have en vis given og bestemt Beskaffenhed. Thi man seer heri seer. Exemplet derpaa i den saa kaldte Isochrona.

let, at det kommer alene an paa at forandre den foranderlige Forhold af Hastighed eller Rum eller Tid til en Forhold imellem Ordinaterne og Abscisserne af en krum Linie, paa den Maade, som de foresatte Betingninger det udkræve.

Saaledes, om man søger for Ex., hvad det er for en krum Linie, i hvilken en tung Ting skulde falde, for i lige store Tider at nær-

me sig lige meget til Horizonten, eller i dem at beskrive lige store verticale Rum; da siden $dt = \frac{ds}{v}$ kommer det an paa at give t og v i s i Følge den antagne Betingning, eller hvilket de fleste Læder er bekvemmere t , v og s i x og y , naar ved disse sidste Linier forståes Abscissen og den halve Ordinate af den søgte krumme Linie.

Saafermt nu i den Tilfælde, naar Tyngden er bestandig saaledes som hos os, Faldet antages at skee i en Linie som gbe og $bc = x$, cd , dx (Fig. 6. Taf. 2.) $ca = y$, $bk = dy$, $ab = ds$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, Hastigheden i $a = v = \sqrt{x}$, og i Følge Betingningen $t = x$ og derfor $dt = dx$, saa bliver

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}} = dx \text{ og derfor}$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{x} \text{ eller } dy^2 = x-1 dx^2 \text{ og } dy = dx\sqrt{x-1},$$

$$\text{men } \int dx \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{x-1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}, \text{ fælgelig er } \frac{4}{9} x-1^{\frac{3}{2}} = y^2.$$

Denne Linie er derfor Algebraisk, nemlig den saa kaldte anden Cubiske, eller Quadrat = Cubiske, og Neilsønske Parabel, hvis Abscisse er $x - 1$, dens halve Ordinate y , og dens Parameter $\frac{2}{3}$. Er $y = 0$, bliver $x = 1$, altsaa rører den krumme Linie sin Arel udi g , der hvor $hg = x = 1$, og naar $x = 0$, er y umuelig eller imaginair og $= \sqrt{-\frac{4}{9}}$: Saa Parameteren er $2\frac{1}{3}hg$, fordi $hg = 1$; og med den Hastighed, som i Faldet vindes ved at falde igiennem hg , maa i den krumme Linie Tyngden begynde at bevæge sig.

§. 52.

Denne Linie, som man kalder sædvanlig Curva Isochrone, Egelsees i den Paracentriske. kan paa samme Maade uden synderlig Meie findes i en Deel andre Betingninger af Tyngdens antagne Love, men vi vilde derved ei op- holde os, da Nytten deraf ikke er betydelig. For at øve Ræsonerne i Ude- regninger af dette Slags, vilde vi endnu legge et Exempel til af den saa kaldte Paracentriske Linie.

Med den Paracentriske Linie (Fig. 7. T. 2.) forstaaes en krum Linie, i hvilken om en tung Ring bevæges, da kommer den i lige Tider lige langt fra, eller nærmer sig i lige Tider lige meget til et Punkt C. Er denne paracentriske Linie AGE, og CG, CT Distans- cerne af dens Punkter fra det givne Punkt C, da bliver efter Hypothe- sen CG, i Forhold med Tiden, og om CG kaldes y , er $y = t$ og $dt = dy$.

Men $dt = \frac{ds}{v}$, ere da CG og CT to Linier, der løbe begy- ge ud fra Punktet C, og somjære hinanden uendelig nær, da er $GT = ds$, og følgelig $dy = \frac{GT}{v}$.

For at bestemme GT, er i de Slags krumme Linier, hvis Or- dinater, som CG, løbe sammen udi et Punkt, intet bekvemmere end at legge en Cirkel til Grund for Abscisserne. Er A det Punkt, i hvilket den tunge Ring begynder at falde, staaes da med den Halv- Diameter CA den halve Cirkel AfB, saa er det den, som mækeligst kan legges til Grund for Abscisserne. Vi vilde kalde AC eller Halv- Diameteren af denne Cirkel a .

Saa snart dette er gjort. Raster man da fra f , det Punkt nem- lig, hvor Ordinaten CG skær Cirklen, en perpendicular fo ned, og kal- der

der Co, x, da sees strax, at der er aldeles ingen større Vanskelighed i at komme til en Differential-Lighed imellem x og y i denne Tilfælde end i den forrige, thi alt kommer alene an paa at bestemme GT.

Trekker man da med CG, som Halv-Diameter, den liden Cirkel-Vue Gr, saa er Cf : fa = CG : Gr. Men er Cirkelns Halv-Diameter = a og Co = x, efter vores forhen antagne, da bliver altid Elementet af Cirklen fa = $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, følgelig og

$$a : \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = y : \frac{aydx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{ydx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Gr.$$

Widere da rT = dy og GT² = Gr² + rT², saa bliver

$$GT^2 = \frac{y^2 dx^2 + a^2 dy^2 - x^2 dy^2}{a^2 - x^2}, \text{ og følgelig er}$$

$$dy^2 = \frac{GT^2}{v^2} = \frac{y^2 dx^2 + a^2 dy^2 - x^2 dy^2}{v^2 \cdot (a^2 - x^2)}$$

For at bestemme v = $\sqrt{AP}$, maa CP bestemmes deraf, at Cf : Co

= CG : CP eller a : x = y : $\frac{xy}{a}$ = CP, følgelig er v = $\sqrt{AP}$

= $\sqrt{a + \frac{xy}{a}}$ og v² = $\frac{a^2 + xy}{a}$, følgelig bliver dy² = $\frac{GT^2}{v^2}$

= $\frac{y^2 dx^2 + a^2 dy^2 - x^2 dy^2}{\left(\frac{a^2 + xy}{a}\right)(a^2 - x^2)}$, og Differential-Ligheden for Paracen-

trica bliver, $\frac{(a^2 - x^2) dy^2}{a} = \frac{y^2 dx^2 + a^2 dy^2 - x^2 dy^2}{a^2 + xy}$, eller for at

fere alle Stykkerne til samme Dimensioner

$$\frac{(a^2 - x^2) dy^2}{a^2} = \frac{y^2 dx^2 + a^2 dy^2 - x^2 dy^2}{a^2 + xy} \text{ eller}$$

$$a^4 dy^2 + a^2 xy dy^2 - a^2 x^2 dy^2 - yx^3 dy^2 = a^4 dy^2 - a^2 x^2 dy^2 + a^2 y^2 dx^2$$

som er en Lighed til krumme Linier, der ikke kan konstrueres, uden
saa

saa tidt som de Ubekiendte kunne skilles fra hverandre. Til den Ende kan sættes:

$$a^2 xy dy^2 - yx^3 dy^2 = a^2 y^2 dx^2, \text{ hvorved faaes,}$$

$$\frac{adx}{\sqrt{a^2x - x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}, \text{ som er en speciel Tilfælde (*), men vi ville der}$$

ved ei opholde os, for at foretage en anden af Cykloidens smukke mekaniske Egenskaber, som her vides, og vi ei kunne undgaae at nævne i vore Forelæsninger,

§. 53.

Sagen er; i den Hypothese af bestandige Kræfter at finde den krumme Linie AE, (Taf. 2. Fig. 8.) som gaaer igiennem de to Punkter AE, som har til Abscisse og Heide Verticalen AB, og dette forudsat, er desuden af den Besskaffenhed, at en Tyngde, som falder over den, kommer i den korteste muelige Tid fra A til E. Man veed, at Faldet i Verticalen selv er det hastigste i alle andre Tilfælde fra Punkt til Punkt er den Linie, som svarer til det hastigste Fald afdrig en ret Linie, men en krum og den feromtalte Cykloide.

For at opløse dette Spørgsmaal, maa igien som før den Lighed

$$dt =$$

(*) Constructionerne af den paracentriske Linie ere artige, man kan desangaaende efterslaae *Acta Lipsiens.* for Aar 1694 og 95. *Memoires de l'Academie des Sciences de Paris.* Année 1699. *Opera Jac. Bernoulli.* Tom. I. og *Christ. Wolfs Element. Mathes.* Tom. 2. Cap. 8. Vi udelade dem her, saavelsom en Mængde andre ligedanne Constructioner, for ei at gjøre dette Werk alt for videløstigt, fordi Dykten ikke just er stor, og Theorien, som er artig, udfordrer intet andet, end at man haver gjort sig de sædvanlige algebraiske Metoder nogenlunde bekiendte.

$dt = \frac{ds}{v}$, foretages; og da flyder det strax af den foresatte Sags Natur, at $ddt = 0$. Som er den almindelige Oplosning af alle Tilfælde, da det, man betragter som foranderligt, er enten i sit mindste, eller i sit største, selgelig maa og Differentialen af $\frac{ds}{v} = 0$, saa den almindelige Oplosning er intet mindre end vanskelig. Men da dette Slags af mindste Forhold er deri adskillig fra de gemeene og sædvanlige, at her ei spørges om noget, som bliver mindst eller størst i den krumme Linie selv paa dens Ordinaters Maade; Men den krumme Linie selv skal være et største eller mindste. Saa maa i alle deslige saa kaldte Isoperimetriske Tilfælde vel agtes, hvad det er i den til Differentiation foresatte Sterrelse, som i den givne Tilfælde er bestandigt, og hvad der i den derimod er foranderligt.

Den almindelige Oplosning af samtlig de herhid hørende Spørgsmaal er meer en analytisk, end en mekanisk Afhandling. Vores Foresatte er ikke uden en meget enkelt Tilfælde iblant utallige andre, som paa samme Maade kunde opløses. Men da den herhid hørende Oplosnings-Maade ikke er saa almindelig bekendt, som andre analytiske, ville vi kortelig vise, hvorpaa det i deslige Spørgsmaals Oplosning i Almindelighed kommer an, og siden anvende den almindelige Oplosnings-Maade til det foresatte enkelte Tilfælde.

Man maa da allerførst agte, at saa tidt som (Taf. 2. Fig. 8.) en krum Linie selv skal have den Egenskab, at den i sig iblant alle andre Muelige, henseet til samme Arel AB og til samme Abscisse AD, skal være den, ved hvilken en given Egenskab allerbest skal kunde ioversættes, da maa denne Egenskab findes i hvad Deel af den krumme Linie,

Linie, som man endog vil betragte. Følgelig saavel i dens mindste Elementer, som i den krumme Linie selv. Men da det her kommer an paa at betragte den Bequemhed, som flere krumme Linier have under sig, for at befordre denne Egenskab, saa maa nødvendig Elementerne af flere krumme Linier i samme Henseende og under samme Betingning tages under Betragtning, for at finde den, som best og lettest ioverfsætter det forlangte. Følgelig maa man i det mindste, for at denne Sammenligning skal kunde skee, betragte to Elementer af disse Linier. Saaledes om $AC = s$ antages at være den søgte krumme Linie; Ca og ae to af dens Elementer, AB alle Linierne sættes Arel, $AD = x$ den givne Abscisse, $DG = GH = dx$ Elementet af Abscissen, $Ca = ds$, $ae = dS$. Antages ligeledes cd og de ; eller Cn og ne at være to Elementer af en af de andre krumme Linier; da er det klart, at siden disse sidste kunne være utallige, da jo nærmere de falde ind imod Cae og jo mindre de i deres Elementer ere fra dens Elementer adskillige, desto bequemmere maa de være i Henseende til den foresatte Egenskab; og endelig, dersom Cde falder uendelig nær ind ved Cae , maa den søgte Egenskab i Ca og ae være den samme som i Cd og de . Beregnes den søgte Egenskab ved E , da maa $E.Ca + E.ae = E.Cd + E.de$ eller $E.Ca - E.Cd = E.de - E.ae$, som er Hoved-Beskaaffenheden af dette Slags mindste og største.

Kaldes DC , y : Da er, om Perpendiklen ch kastes ned, $ha = dy$, og om da ansees som uendelig mindre end ha , er $da = ddy$. Men da her ansees som uendelig mindre end ha , fordi af den uendelige Mængde Linier, som have y tilfælles, skal Cde i Følge Hypotesen være den, som er allernærmest Cae . Følgelig kommer det nu alene an paa at bestemme, hvad $E.Ca - E.Cd$ bliver, det er; hvad Diffe-

rentialet af E bliver, naar Cd og Ca sammenlignes. Ligeledes og, hvad Differentiallet af samme E bliver, for saavidt E betragtes i Henseende til den Forandring, som det ligger ved Sammenlignelsen imellem ae og de .

Hvad det første angaaer; nemlig at bestemme dE eller Differentialen af E; det er, hvad den er meer eller mindre i Cd end i Ca . Da seer man strax, at naar E er, hvorledes man vil en Function af x , dx , y , dy , s og ds . Da maa dette Differential af E dog altid tages saaledes, at under Differentiationen, x , dx , y og s tages som uforanderlige. Thi i det Cd falder over i Ca , forandres ingen af disse Størrelser, men alene ha , dy og Cd , ds . Følgelig, naar efter disse Foranderlige Differentiallet indrettes, bliver det i Almindelighed $Addy + Bdds$, men $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Derfor, naar dx er bestandig, bliver $dds = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dyddy}{ds}$, saa at den almindelige Form af dE bliver $(A + \frac{Bdy}{ds})dds$. Ved A og B forstaaes Størrelser, som ikke indeholde de foranderlige Differentialer ddy og dds .

Saaledes er Besskaffenheden af dE almindelig bestemt i Henseende til den Forandring, som E ligger udi Cd meer end udi Ca . For nu ligeledes at bestemme dE i Henseende til de og ae , maa vel agtes, hvad der forandres i det ea falder hen i ed , siden Forandringerne udi E derpaa beroer.

Man seer da strax, at imidlertid at ae falder hen i de , eller om man vil, de udi ae , bliver, imidlertid at dette skeer; $AG = x$ uforanderlig, saavel som $GH = dx$. Forlænger man derimod $Ga = y$, og treffer He . Kastes desuden Perpendiklen $ef = dx = GH$ ned, da bliver $af = ke = dy$. I Bevægelsen derfor fra ae til de vorer
fa

fa om ad ($= ddy$ efter det forhen sagte) og med samme Størrelse ddy formindskes ligeledes y selv eller Ga . Den krumme Linie Aa eller S forandres om en uendelig liden Deel af Ca eller dds , og ds ligeledes om den uendelig liden Deel dds .

Efter at baade samtlig Forandringerne og det, hvorudi at de bestaae, saaledes ere blevene eftertænkte, bliver det nødvendigt, naar E differentieres som før, at den almindelige Skikkelse af Differential-Egheden maa blive.

$$- addy - \beta dds$$

$$+ addy + bdds$$

Hvor $-$ og $+$ sættes, eftersom at Størrelserne enten tage af eller tage til om ddy og om dds . Men $dds = \frac{dyddy}{ds}$, fordi dx er uforanderlig. Sælgelig faaes $(a - \alpha) ddy + (b - \beta) \frac{ddy \cdot dy}{ds}$ for Differentiallet af E betragtet i Henseende til Forskiellen af E udi ae og de , da derfor efter det forhen forklarte

$E. Ca - E. Cd = E. de - E. ae$, saa bliver og

$$\left(A + \frac{Bdy}{ds}\right) ddy = (a - \alpha) ddy + (b - \beta) \frac{dy}{ds} ddy$$

$$\text{eller } A + \frac{Bdy}{ds} = (a - \alpha) + (b - \beta) \frac{dy}{ds}$$

$$\alpha + \beta \frac{dy}{ds} = a - A + b \frac{dy}{ds} - B \frac{dy}{ds}$$

Men $a - A$ er Differentiallet af A og $b - B$ ligeledes Differentiallet af B , siden E maa saavel i ca som ae være det samme paa de uendelig smaa Differencer nær. Derfor bliver omsider.

$$\alpha + \beta \frac{dy}{ds} = d\left(A + B \frac{dy}{ds}\right)$$

Hvoraaf flyder:

1) At man maa, for at bestemme $A + B \frac{dy}{ds}$, differentiere den givne Størrelse E, som skal være et Mindste eller Største, saaledes; at ikke uden dy og ds sættes foranderlige; hvilket flyder af det vi, angaaende Differentialets Forskiel udi Ca og Cd, allerførst have sagt. Men da $d\dot{a}y$ gaaer ud af Righeden, som nu sidst er blevet viist, kan man strax sætte $ddy = 1$, og derfor dds eller $\frac{dyddy}{ds} = \frac{dy}{ds}$.
Det udkommende Differential af E er $A + \frac{Bdy}{ds}$.

2) For at finde af den samme Størrelse E, $\alpha + \beta \frac{dy}{ds}$; da siden i den ikke forekommer andre Differentialer end dy og ds , maa i denne Differentiation y og s alene sættes at være foranderlige, men hverken x , dx , dy eller ds . Men da $\frac{\beta dy}{ds}$ alene kommer ved Differentiationen af ds , saa kan i denne Differentiation strax sættes $dy = 1$ og $dds = \frac{dy}{ds}$.

3) Ere disse to Differentiationer giorte, og man kalder det Udkommende af den første L, af den sidste M, da bliver $M = dL$. Og da i dette sidste Differential, i dL nemlig, ingen videre Betingninger have Sted, differentieres det paa den gemeene Maade, hvorefter faaes $M = dL$, eller

$$\alpha + \beta \frac{dy}{ds} = d \left(A + B \frac{dy}{ds} \right)$$

saaledes, som Spørgsmaalets Natur udi alle deslige Tilfælde det udkræver.

Oplosning af Linien af det hastigste Fald.

Da her spørges om den Linie, udi hvilken iblant alle, som have samme Afscisse, Tiden skal være den samme, og Tiden igiennem CA er

$$\frac{ds}{\sqrt{x}} = E. \quad \text{Differentieres da } E \text{ efter No. 1, ved at sætte } dds = \frac{dy}{ds},$$

$$\text{faaes } A + \frac{Bdy}{ds} = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}.$$

Differentierer man E, eller $\frac{ds}{\sqrt{x}}$ igien paa den Maade, som før er bleven sagt i No. 2. Da siden ds og x ere bestandige, bliver $d\frac{ds}{\sqrt{x}} = 0 = \alpha + \beta\frac{dy}{ds}$. Følgelig er $d\left(A + B\frac{dy}{ds}\right) = 0$, og derfor $A + B\frac{dy}{ds}$ selv en bestandig Størrelse, det er $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ er en bestandig Størrelse, som skal være en Function af samme Slags, med $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, og derfor $= \frac{1}{\sqrt{B}}$. Saaledes bliver Ligheden til den søgte krumme Linie $\frac{dy^2 B}{x} = dx^2 + dy^2$, eller $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{B-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{Bx-xx}}$, som er Ligheden til Cykloiden.

$$\text{Thi } \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{xdx-xx}{\sqrt{ax-xx}} - \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}} = \sqrt{ax-xx} - \int \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$$

$$\text{og derfor er } \int \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \int \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}} - \sqrt{ax-xx}.$$

Er da (Fig. 9. Taf. 2.) ACE en halv Cykloide, BDE den halve Cirkel, af hvis Punkt i Peripherien E den beskrives, AO
= BH

$= BH = x$, da bliver $BD = \int \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$, naar $BE = a$; og bliver saaledes $y = BD - DH$.

Da nu i Cykloiden $CD = ED$, saa er, fordi $AB = BDE$, $AI + FB$, det er $OC + FB = DB$, selgelig og $DB - FB$, det er $DB - DH = OC = y$, hvoraf sees; at denne krumme Linie, som vi søgte, haver de gemeeneste og mest bekjendte Egenskaber af Cykloiden.

Man kan paa samme Maade, og efter selvsamme Regler opløse en stor Mængde andre Spørgsmaal af samme Natur. Imidlertid opløse disse Regler dog ikke alle Isoperimetriske Tilfælde. Men da den hele Isoperimetriske Materie er alt for vidtleslig til at blive her forklart, kunde Læserne, angaaende de Tilfælde, som indeholde endnu flere Betingninger, efterslaae: *Jac. Bernoulli Opera. Tom. 2. Joh. Bern. Opera. Tom. 2. Acta Petropolit. Tom. VI. og VIII. men i sær Eulers solut. Problemat. Isoperimetrici, latissimo sensu accepti.*

Fjerde. Forelæsning.

Beviis tagne ved Erfaring paa de for-
hen anførte Naturens Love i Henseende til Tyn-
den. Videre: om den ensdan forsinkede Bevæ-
gelse. Om de svingende Tynghvers, eller om
Pendulernes Bevægelse.

§. 83.

De forhen anførte Love for Tynghden ere af saa stor Vig- Ved ligefrem
giorte Erfarin-
ger kunne Tyngh-
dens Love ei sin-
des.
tighed, at man kan aldrig blive formeget forvissset om
deres uimodsigelige Rigtighed og Sandhed. Vi have, for at
udfinde disse Love, antaget, at Tynghden var en Kraft, som
bestandig virkede ensdan, og uforanderlig paa samme Maade
drev Tingene. Vi have beviist, at denne Sags Theorie var
uimodsigelig, ikke destomindre er det got, at see en Sag af
den Vigtighed bekræftet ved Erfaring, og det er det, hvilket
vi her ville giøre.

Da Luften staaer imod. Da dens Modstand imod de
Ting som falde, bliver alt større og større, eftersom Hastig-
heden af Faldet selv bliver større til, saa seer man let, at det
var ikke mueligt, med tilforladelig Visshed at undersøge disse
Love ved simpel hen at lade Tingene falde ned efter, og ved
at iagttage Tiderne, i hvilke Faldet stod paa. De Feil og
Urigtig-

Urigtigheder, som i Forsøg af den Beskaffenhed maatte indløbe, seer man let, burde blive saa mange, at man af de giorte Forsøg intet Tilforladeligt skulde kunde slutte.

§. 84.

Men vel ved
Erfaringer
giorte i Cyklo-
iden.

Uden den høiere Geometrie, uden en meer end almindelig Indsigt i denne Videnskab, var det umueligt, at stadfæste den Grundvold, hvorpaa al Mechanik maa bygges. Man faldt paa at betragte Cykloiden, og fandt i den alt, hvad der behøves til en saa vigtig Undersøgning.

Men før vi nærmere forklare, hvad ved Cykloiden i denne Henseende kan udrettes; maa man erindre sig, hvad vi forhen i andre af vore Forelæsninger have sagt, at denne Linie (Fig. 9. Taf. 2.) beskrives af et Punkt E i Peripherien af en Cirkel BDE, imidlertid at BDE velter sig hen over BA.

§. 85.

En denne Li-
nies mekaniske
eg og dens geo-
metriske Egen-
skab anføres.

Vi ville her ikke videre indlade os i de prægtige geometriske Egenskaber af denne Linie, hvorpaa alle dens mekaniske grundes. Vi ville alene agte, i Henseende til disse sidste, at man kan bevise:

- 1) At dersom ACE er en omvendt Cykloide, hvis Spitse er E, AB horizontal; da hvad heller af en tung Ting smaa eller store Buer, som AE eller CE eller KE igiennemløbes, skeer Faldet igiennem dem alle altid i samme Tid. (*)

2) Læng-

(*) Dette er bevist i Tillæggene §. 38.

2) Længden af Cykloidens krumme Linie ACE er saa stor som 2BE, eller som to gange Diametern af den Cirkel, der beskriver Cykloiden.

§. 86.

Dette forudsat; forstaaes let Brugen af det Instru-
ment, som vi kalde Cykloiden, og hvorledes vi ved det kunde
bevise Lovene af de tunge Tings Fald ved en oien synlig Erfa-
ring (Taf. 3. Fig. 1.).

Beskrivning
af det Instru-
ment, som kaldes
Cykloiden og
dets Brug.

Instrumentet er $oCHb$ eller en Udhulning af en halv og
ombendt Cykloide. Ach er en anden Udhulning, i alt ligedan,
som den forrige. Fra b og H af løbe lige Linier, eller rettere,
horizontale Planer $bHDB$ og $HDKQ$. Instrumentet hviler
paa 3 Skruer, ved hvis Hielp det kan sættes horisontal; dets
horizontale Stilning kiendes deraf; at et Lod P , som kan
vindes op og ned i S , falder lige over et i P tegnet Punkt.

I begge Cykloiderne ere adskillige Punkter merkede til
at giøre adskillige Forsøg efter over de tunge Tings Fald.
Ere to af dem E og G , og fra dem Linier nedfaste paa den
horizontale Linie, der stryger Cykloiden, EF og GL begge Ver-
ticale og i Størrelse under sig, som 9 og 4. Da er det klart
af §. 79, at den Hastighed, som vindes ved Faldet igiennem
Cykloidal-Buen EH , er $= \sqrt{EE}$, og den, som vindes ved
Faldet igiennem den anden Cykloidal-Bue, Ch , er som
 $\sqrt{CL}$, §. 79. Følgelig, om to tunge Ting falde fra E og C
i disse Cykloider, da blive Hastighederne i Enden af Faldet,
i de horizontale Punkter, nemlig H og b , som 3 : 2.

Fordelen af Cykloiden bestaaer da deri, at de to faldende Ting, om de paa samme Tid begynde at falde fra E og G, komme begge tillige og paa en Tid til de horizontale Punkter H og h, hvorpaa de siden løbe med en eensdan Hastighed hen over de horizontale Rum efter hB og QK. Tages disse Rum under sig som 2 og 3, da i samme Dieblis, som den ene Tynge de slaaer an i t, slaaer den anden an i R, om $hr:HR = 2:3$.

For desto bedre at forvise sig om Rigtigheden af denne Erfaring, kan man giøre ligedanne Forsøg under adskillige deslige Hojder, som EF og GL, saavelsom andre til dem svarende horizontale Rum, men i anden Forhold; da man finder altid det samme.

§. 87.

Et andet Cy-
kloidal-Instru-
ment og dets
Brug.

Saaledes beviser man ved Erfaring, at de igiennemløbne Rum ere som Quadraterne af Hastighederne, hvilke de tunge Ting vinde ved Faldet. Men foruden denne fortreffige Egenskab af Cykloiden, hvoraf vi i det følgende endnu skulle oftere betiene os, haver den en anden mekanisk Egenskab, den; at Cykloiden er den Linie, i hvilken en tung Ting ved at falde kommer hastigst fra Punkt til Punkt. Skiont Nytten heraf ei er saa stor, som af den denne Linies Egenskab, at alle dens Buer igiennemløbes i samme Tid, kan jeg dog ikke undlade her at forevise et andet af vore Instrumenter, hvorved bevises, at Faldet i Cykloiden skeer ulige hastigere imellem to Punkter, end i en ret Linie trokken imellem samme Punkter. (Taf. 3. Fig. 2.) (*)

J

(*) Dette er bleven beviist i Tillæggene §. 53.

Instrumentet er $abdG$ en heel udhult og ombendt Cykloide, til hvilken er heftet i a en firkantet Lineal aG , udhullet i Form af en Rende. Langs hen ad Cykloiden er en Mængde Huller, hvori en Stift kan heftes, saa at over den Linealen hviler. Instrumentet kan i H, H , stilles horisontal ved Skruer, ligesom det forrige; og en Længde I , som maa staae lige over et Punkt K med Spitsen, viser som forhen, at Stilningen er horisontal. Lader man to Kugler falde paa samme Tid fra a , en over Linealen aG , en anden i Cykloiden abS , da kommer den sidste ulige før til G end den første til S , skjønt G og S kunne begge ansees som et eneste Punkt.

§. 88.

Vi have i det forrige overlagt med hverandre, hvorledes ved de virkende Kræfters idelige Virkning Hastigheden bliver til; dersom da, naar en saadan Hastighed engang er bleven tilveiebragt, den samme Kraft, som gav den sin Oprindelse, begyndte strax derpaa at virke efter en imodsat Direktion, og for Resten paa selvsamme Maade uden Forskiel som før. Da er det klart, at Hastigheden og Bevægelsen maatte tabes paa samme Maade og i samme Forhold, som den forhen blev til.

Den af Længden forsinkede Bevægelses Vægsenheder.

§. 89.

Saa snart derfor, som den engang givne Bevægelse gaaer efter en Direktion, men de nylig omtalte Kræfters Virkning efter en anden og imodsat; da treffer just dette Tilfælde ind.

Fortælles.

Virke de svækkende Kræfter bestandig eensdan, da kaldes Bevægelsen en ligedan svækket Bevægelse.

Saaledes; da §. 79 al Hastighed kan ansees som at være blevet til ved Faldet igiennem en vertical Linie AB (Fig. 1. Taf. 4.) saa følger, at om en Ting stiger op efter BA med en Hastighed, som ved at falde kunde vindes igiennem AB, da kan den net op stige fra B til A, saa at i A Hastigheden først $= 0$. Vi betragte her, ligesom før, en frie og uhindret Bevægelse. Årsagen er i sig klar, da Tyngden ved ensdan imodsatte Pressioner maa tilintetgjøre, hvad den forhen havde tilveiebragt.

§. 90.

Og endnu ud-
førligere.

Følgelig, saa tidt som den forsinkede Bevægelse kommer af en ensdan forsinkende Kraft, som Tyngden, da følger §. 88. 89.

- 1) At om noget falder igiennem den krumme Linie AE, da kan det stige ligesaa høit i enhver Linie CE, CD, som Faldets Høide AB var. Og Hastighederne ere i lige høie Punkter F og G de samme.
- 2) Dersom ED er en i alt lige saadan krum Linie, som EA, da er Tiden igiennem EA og ED altid den samme, ellers ikke: Siden over adskillige skraaeliggende Linier af samme Høide, Tiderne, i hvilke de igiennemløbes, forholde sig som Længderne §. 81, 4, og ere følgelig adskillige.

3) De

- 3) De af Hastigheden tabte Dele ere i den eensdan forsinkede Bevægelse, som Tiderne. §. 72. I. og 89.

§. 91.

Vil man finde i en eensdan forsinket retlinet Bevægelse, hvorledes i den et tungt Legeme hvís Hastighed i Begyndelsen er given, hvad Rum siden igiennemløbes i givne lige Dele af Tiden; da haber man alene nødvendigst, naar Hastigheden i Begyndelsen er bestemt. (Fig. I. Taf. IV.) at efterregne de, som en tung Ting i Faldet igiennem den Linie AB, over hvilken ved at falde den givne Hastighed kunde vindes, skulde fra Begyndelsen af sin Bevægelse til dens Slutning igiennemløbe. De samme tagne i forkeert Orden give de søgte Rum.

Da man desuden veed, at disse Rum vore efter de ulige Tal §. 50, saa sees let, at de i den forsinkede Bevægelse maa tage af i forkeert Forhold af samme Tal.

Saaledes, om en Tings eensdanne Hastighed er til at løbe over et Horizontal-Rum 120' i et Secund, da findes §. 57. at den Høide, som svarer til denne Hastighed, er $\frac{120 \cdot 120}{60} = 240'$, og $\frac{240}{15} =$ Quadraten af Tiden §. 48. 56, saa Tiden, hvori denne Hastighed kan vindes $= 4''$. Da nu i samme igiennemløbes Rum, som 1:3:5:7, eller 15, 45, 75, 105, saa følger; at om Hastigheden i en Ting, som stiger op efter, er i Begyndelsen til 120', da stiger den i første Secund 105', i andet 75', i tredje 45, i fjerde 15.

§. 92.

§. 92.

Den forsinke-
de Bevægelse
haver Sted i
Pendulerne.

En saadan Bevægelse, som den nylig omtalte, der nem-
lig paa samme Maade forsinkes, som den er bleven til, kom-
mer for i Pendulerne eller i de svingende Tyngders Bevægelse.
Er (Fig. 2. Taf. IV.) CD en ubøielig Linie, i hvis Ende D er et
tungt Punkt, saafremt da at samme henges op udi C, saa CD
frit kan svinge i den Bue EDF frem og tilbage, da kaldes D
en svingende Tyngde, eller en Pendule, og dens Sving
igienmem den hele Bue EDF er det, man kalder Pendu-
lens Oscillation, eller Vibration.

§. 93.

Pendulernes
Sving forkla-
res.

Deraf sees, efter hvad der er blevet sagt §. 90, at
om et Pendul løstes op til E, da synker det eller falder ned
igienmem Buen ED, og stiger med den i Faldet indtil D
vundne Hastighed igien op til F over Buen DF. Siden falder
det igien ned efter samme til D, for at stige igien til E. Disse
Sving frem og tilbage maatte blive ved uden Ophor, dersom
ingen Forsinkning skede i Pendulens Bevægelse, deels af Luf-
tens idelige Modstand, deels af Rivningen eller Modstanden
i det Punkt C; hvilket, naar ikke var, blev Buen DE be-
standig saa stor som DF.

§. 94.

Enskolden ud-
vikler sig selv.

Da Pendulernes Egenskaber ere af en uendelig Vigtig-
hed i en Mængde Tilfælde, saavel i, som uden for Mechanik, saa
tidt som det kommer an paa at kiende Tiden nøie; saa kunne vi
ikke

ikke undlade at giøre os bekendt med denne Slags Bevægelse (*). Til den Ende er det nødvendigt, igien at foretage Cykloiden, for at betragte allerførst en af dens meget smukke geometriske Egenskaber, uden hvilken vi ei kunne forklare os i Henseende til den mekaniske, som vi have for at giøre forstaaelig (Fig. 3. Taf. IV.).

Er da AB en halv Cykloide, FGB den Cirkel, som beskriver den, da have vi allerede sagt §. 85. 2. at Buen af den halve Cykloide AB er saa stor som 2FB. Tager man derfor en Traad, saa lang som 2FB, og slaar samme om Cykloiden, antagende tillige, at den igien falder lidt efter lidt ud fra denne Linie, og bestandig efter Direktion af Cykloidens Tangenter, som $\frac{1}{2}H$; da beskriver Traaden ved denne Udvikling en krum Linie BHE, som bliver just den selsamme halve Cykloide

- (*) Man kan agte, at det er nueligt, at lade et Pendul AH Taf. IV. Fig. 3. svinge i hvad krum Linie BC, man vil, alene at man henger det op imellem to andre Linier AB og AC, ved hvis Udvikling den tredie BEC, i hvilken Pendulet skal svinge, kan beskrives; saaledes, som vi nu strax skulle udfærligere forklare denne de krumme Liniers Udvikling, og den deraf stundende Pendulernes Bevægelse udi Cykloiden; thi vi betragte her denne Linie i sær, fordi dens og Cirkelns Buer ere i disse Henseende de mest betydelige og nyttigste udi Brugen af Pendulerne, frem for alle øvrige Linier, som disse sidste kunne ved deres Sving beskrive.

Cykloide som AB, men omvendt; saa Spitsen B af Cykloid-Linien ligger i E. Cykloiden udvifler sig saaledes selv, og dette var den mærkværdige Egenskab, som vi lovede først at forklare.

§. 95.

Et Pendul, som er hængt op imellem to Cykloider, bevæges, som om den faldt ned efter en halv saadan Cykloide og stæddig i den anden halv.

Er A et Punkt, i hvilket Cykloiden AB er sat fast med den ene Ende; dens Tangent BD horizontal; ADE et Pendule, hvis Længde er $= 2FB$, da maa det ved at svinge hen ad E til, beskrive en halv Cykloide BE. Er AC en anden just ligedan Cykloide, da er det ligeledes upaatvivleligt, at Pendulen i at svinge hen efter EC, maa beskrive en ligesaa-dan halv Cykloide §. 94. Følgelig, at i Svinget BEC, som vi kalde det hele Sving, og det igiennem BE, eller EC derimod det halve: Pendulen eller det tunge Punkt H beskriver bestandig i sin hele Bevægelse fra B igiennem E til C en heel Cykloide. Saa det kan imidlertid ansees for at være faldet igiennem den hele Cykloide.

§. 96.

Tiden, hvori et Pendul svinger imellem to Cykloider, forholder sig til Tiden af Faldet igiennem Pendulens halve Længde, som Peripherien til Diametern.

Man beviser videre, at den Tid det tunge Punkt H bruger for at falde igiennem den halv Cykloide BE, forholder sig til Tiden af det frie verticale Fald igiennem DE, eller Diametern af den Cirkel, der beskriver Cykloiden, ligesom den halv Peripherie af Cirklen forholder sig til Diametern.

Da derfor Diametern af Cirklen, der beskriver Cykloiden, er den halv Længde af Pendulen: Saa forholder sig

og Tiden igiennem den halve Cykloide, til Tiden igiennem DE den halve Penduls Længde, der svinger i en Cykloide; som den halve Peripherie til Diametern, følgerlig noget næsten som 11 : 7 (*).

Da videre Tiden igiennem den halve Cykloide CE er den samme, som Tiden igiennem den halve Cykloide BE §. 90. 2. saa sees; at Tiden af det hele Sving igiennem BEC, maa være til Tiden af Halvdet igiennem Pendulens halve Længde DE, som Peripherien til Diametern, eller noget næsten som 22 : 7.

§. 97.

Alf det, som er blevet sagt §. 94, kan man strax see, ^{Det samme} at Pendulet AE, (Fig. 3. Taf. IV.) maa omkring ved E, i det ^{giælder endnu,} den beskriver Cykloiden, ^{naar Pendulen} beskrive Cirkel-Buer, da derfor Ti- ^{svinger frit i} derne igiennem Cykloiden og dens mindste Buer ere de sam- ^{smaa Cirkel-} me, saa maa og Buer.

- 1) Tiden igiennem meget smaa Cirkel-Buer være den samme, ligesom igiennem smaa Cykloidal-Buer.
- 2) Tiden af Svinget igiennem en Cirkel-Bue af liden Størrelse, maa være den selsamme, som Tiden i Cykloiden selv, nemlig Tiden igiennem Buen EDF (Fig. 2. Taf. IV.) maa være til Tiden igiennem Pendulens halve Længde $\frac{1}{2}CD$, som Peripherien til Diametern, som 22 : 7.

R 2

3) Følge:

(*) Dette er beviist i Tillæggene §. 35, og i samme Tillæg er ligeledes alt det herhid hørende beviist.

3) Følgelig kan man i Pendulernes Sving altid betiene sig af smaa Cirkel-Buer, i Steden for de Cykloïdale, hvilket i Brugen er meget beqvemt. Thi de Cykloïdale Penduler have den Uleilighed, at, siden de tvende cykloïdale Plader, imellem hvilke de henge, ere elastiske eller fiederhaarde, saasnart da Pendulet slaaer lidt stærk an paa dem, give de et Tgienflag og bringe Pendulet derved i Urigtighed. Men man gjør vel i, saasnart som løse Penduler bruges, der svinge i Cirkel-Buer, da at bruge dem af nogen anseelig Længde, fordi de da ei let løbe ud over en Bue af 15 til 18° i deres hele Sving; desuden gjør man vel i at bruge Lod i Enden af tung Materie, thi de Lettere svekkes snarere af Luften. Man gjør dem i denne sidste Henseende og Lenticulaires, eller af Figur som Linser.

4) * Endelig kan agtes; at Tiden, som et Legeme falder igiennem Buen er kortere end Tiden, i hvilken det falder igiennem Chorden. Thi kaldes Tiden af et heelt Sving igiennem Buen T , igiennem Pendulets halve Længde t , da er $T:t = p:d$, og $t = \frac{dT}{p}$. Men Tiden igiennem Chorden er den samme som Tiden igiennem Diametern §. 76. 82; følgelig maa den Tid søges, som svarer til Faldet igiennem fire gange Pendulets halve Længde.

Da nu de igiennemløbne Rum af Tyngden ere som Quadraterne af Tiderne §. 47, kaldes da Pendulets dobbelte

dobbelte Længde L , saa bliver: $\sqrt{\frac{1}{4}L} : \sqrt{L} = \frac{dT}{p} : \frac{2dT}{p}$,
 som er Tiden igiennem Diametern, eller hvilket er
 det samme igiennem Chorden: Sættes $d:p = 7:22$
 er denne Tid $= \frac{14}{22}T$, hvilken maa tages dobbelt,
 om Tiden igiennem Chorden skal sammenlignes med
 Pendulens hele Sving, saa Faldet skeer igiennem en
 Chorda, og Stigningen over den anden. Skul-
 de et heelt Sving derfor skee af Pendulen først ned af
 en Chorda siden op af den anden, saa blev Tiden
 $\frac{28}{22}T = \frac{14}{11}T$, men Tiden af det hele Sving igien-
 nem Buen er T . Altsaa forholder sig Svinget over
 Chorderne til Svinget over Buen $= \frac{14}{11} : 1 = 14 : 11$.
 Derfor er og Tiden af Svinget igiennem Chorderne
 længere end Tiden igiennem Buen, hvilket og bør
 være, siden Cirkel-Buen heri §. 97. 2. er som Cykloi-
 den, og denne sidste er Linien af det hastige Fald. §. 87.

Femte Forelæsning.

Om Tyngdens Center.

§. 98.

Hvad Tyng-
dens Center er.

For vi gaae videre fort i vore Betragtninger over Pendu-
lerne, er det tienligt, først at tale om det saa kaldte
Tyngdens Center. Vi have i det foregaaende (§. 2. Taf. IV.)
i Pendulerne ikke betragtet uden et Punkt D, som var tungt;
henges i D en liden Tyngde for at drive Pendulen, da er
det Punkt D noget næsten den i D fæstede tunge Tings Tyng-
des Center. Og man maa agte, at ved Tyngdens Center
forstaaes det Punkt i en Ting, paa alle Sider af hvil-
ket dens Vægt er lige stor, og det i alle Stilninger i,
over og under Horizontal-Linten (*)

§. 99.

(*) Man kan agte, at et saadant Punkt, som det vi her have
kaldt Tyngdens Center; i hvilket nemlig, naar et Legeme er
bestandig ophængt, det da altid skulde hvile og beholde
den givne Stilning, hvad heller at det laae horizontal med
eller skiev imod Horizonten: Et saadant Punkt findes ikke i
Tingene, naar Tyngden er bestandig, med mindre at dens
Direktioner kunne anses at være parallelle. Følgelig, da
Direktionerne af Tyngden virkelig løbe sammen enten udi Jor-
dens

§. 99.

Erfaring lærer uimodsigelig, at et saadant Punkt findes i alle de tunge Ting, og intet er lettere end ved en ligedan Erfaring at bestemme Tyngdens Diametre. Ved disse Linier forstaaer man enhver Linie, som i Legemerne gaaer igiennem Tyngdens Center.

Et saadant Center forekommer i alle Ting. Hvorledes det i Legemerne paa en mekanisk Maade kan bestemmes.

For

dens Center, eller strax ved samme (siden Jordens sphaeroidiske Figur fast er Sphaerisk) saa er det i Theorien ikke sandt, at de tunge Ting have et Tyngdes Center, som passer til alle Stilninger, men alene for saavidt, at man i Brugen kan betragte Distancerne fra Centret, som at være saa uendelig langt borte, saa de i Henseende til alle de Ting, der ere af meget liden Udstrekning, kunde ansees som parallelle.

For derom at overbevise sig, behøves intet andet, end at betragte to Partikler af et Legeme i A og B (T.V.F. 2.), som drives af bestandige Kræfter imod et Center D, og hvis Masser vi ville kalde A og B. Antager man dem først, som at staae i Ligevægt over den horizontale Linie AB og at have i C deres fælles Tyngdes Center; Men siden, som om A kom i den Stilning, som *acb*. Da om de i den horizontale Stilning ACB skulde staae i Ligevægt sammen, maa §. 68 Pressionerne, (det er Vægten i A og B) forholde sig til hverandre, som $ce : cd = A : B = \sin. x : \sin. o$, om $CDA = o$ og Vinklen $CDB = x$. Ligge de derimod i den Stilning som *acb*: da for at Ligevægten kan have Sted,

maa

For at bestemme disse Linter, haver man alene nødig (Taf. IV. Fig. 4.) at legge den Ting GEHK, hvis Tyngdes Center man vil finde over en skarp Kant eller Linie. For Exempel, over den skarpe Side AD af et Prisma ABCDM, og over samme at flyde det frem og tilbage, saa længe til den

Deel

maa $A : B = eq : cf = \text{Sin. } CDb : \text{Sin. } CDa$; Følgelig skulde altid blive $\text{Sin. } CDb : \text{Sin. } CDa = \text{Sin. } x : \text{Sin. } O$, om i alle Stillingen Ligevægten skulde have Sted, hvilket da ikke kan være, som let sees, saa er heller intet Tyngdes Center egentlig muligt, naar Tyngden er en bestandig Kraft, som søger imod et Center.

Alene i det ene Tilfælde, da Centret D ansees som uendelig langt borte imod Længden AB, bliver bestandig $\text{Sin. } CDb : \text{Sin. } CDa = \text{Sin. } x : \text{Sin. } O$. Følgelig er og alene i denne Hypothese (hvilken er den samme med den af de parallelle Direktioner) et egentlig Tyngdes Center muligt; og man seer uden Møie, at dette Center da maa have Sted under alle Hypoteseer af Central-Kræfter, fordi de i en uendelig Distance fra Centret altid kunde ansees som bestandige og Inertierne proportionerte.

Derimod er det klart, at til enhver given Stilling uden for den horizontale kan et andet Punkt F bestemmes, som i Henseende til A og B bliver Tyngdens Center. Fordi dertil behøves alene, at Vinklen $\angle D$ ved den Linie DF saaledes deles, at $\text{Sin. } x : \text{Sin. } O = A : B$, hvorved det Punkt F i denne Stilling bliver Tyngdens Center.

Deel GI staaer i Ligevægt med den Deel IK; saa bliver IK enten en Diameter af Tyngden, om det er i en simpel Figur at Tyngdens Center søges, eller en Linie parallel med Diameteren af Tyngden, om det er et Legeme. Paa samme Maade findes en anden Linie LM, hvilken paa for sagte Maade enten er en Tyngdens Diameter, eller med den parallel. Følgelig er i N, hvor disse to fundne Linier i de simple Figurer overskiere hverandre Tyngdens Center. §. 98. I Legemerne derimod, som have en Tykkelse, maa man paa to Sider finde et saadant Punkt som N.

Er to deslige Punkter givne; da, siden den verticale Direktion er Direktionen af Tyngdens Center §. 40. saa findes af den uden Vanskelighed dette Punkt. Man haver alene nodig at forestille sig Verticalerne fra disse Punkter (naar nemlig hvert af dem for sig, vender ned efter) som trokne, og som de, der overskiere hverandre inden i Legemet i det tredje Punkt, saa er dette sidste Tyngdens Center.

Denne Oplosning er almindelig, og af den forstaaes, at saa tidt som et Legeme er et Parallelopipedum, eller og af lige Snit heel igiennem, og overalt af eensdan Materie, at da Tyngdens Center falder i Midten af den Linie, som gaaer igiennem Punkterne N, fundne paa dets imodsatte Sider.

§. 100.

Man seer deraf. At dersom (Fig. 5. Taf. IV.) en tung Ting AB, der kan falde frit, henges i Tyngdens Center op i den Linie DC; eller om Tyngdens Center C, eller et Punkt i dets

Ting ophængte eller understøttede i dets Tyngdens Cen-

S

Direk-

ter, hvile i alle
Direktioner.

Direktion, understøttes af CEF, da maa i den første Tilfælde den Ting AB henge i skraa eller horizontal Stilning, som man vil, uden at dens ene Deel kan overveie den anden. I den sidste Tilfælde maa det Punkt C, hvorpaa Centret af Tyngden hviler, bære den hele Tyngde, og den ene Deel af Tyngden paa den ene Side af C kan da ei overveie den anden paa den anden Side. Thi Pressionerne staae i Ligevægt sammen, naar de ere lige store og virke efter imodsatte Direktioner §. 29.

Da, for at Legemet skal kunde hvile, det er nok, naar et Punkt i Direktions-Linien af Tyngdens Center understøttes, saa behøves alene at finde et eneste af de i §. 99 omtalte Punkter N, og at understøtte det, for at bringe Legemet til at hvile.

§. 101.

Tyngdens Cen-
ter kan sættes i
Steden for den
hele tunge Ting.

Saa tidt som Centret af Tyngden hviler, uden at kunne bevæges, maa den hele tunge Ting hvile, følgelig kan man ansee dens hele Vægt, som forenet i dette Center, siden det Punkt, som bærer det, maa anvende en Styrke til at bære saa stor som den hele Tyngde §. 100.

§. 102.

Anmerkning,
de Underlag an-
gaaende, som
understøtte de
tunge Ting.

Saa tidt derfor, som Tyngdens Center ei kan bevæges, kan den hele Ting ei heller bevæges eller falde. Man sætter derfor sædvanlig Tingene saaledes over de horizontale Underlag A og B (Fig. 6. Taf. IV.) som skulle bære dem, at Cen-
tret

tret af Tyngden C falder imellem dem begge. Er Tingen da ei boielig, maa den nødvendig hoile, fordi Tyngdens Center C ikke meer kan falde, men hviler.

Man seer let, at de bærende Underlag A og B her atter igien maa have en Styrke til at staae imod med saa stor, som Vægten af det, der bæres. §. 100.

§. 103.

Virker Tyngden frit, yttre dens hele Virkning sig bestandig efter Verticalen §. 40, og man kan i Steden for hele Materiens Vægt tage Centret af Tyngden. §. 101. Deraf er det fremdeles klart, at saa længe som Direktions-Linien af Tyngdens Center kastes ned paa den Grund-Linie, hvorpaa Tingen hviler, falder over denne Grund-Linie, da kan Tingen ei falde, eller glide, i hvorledes den end indklineres over et horizontal Plan. Saa fremt derimod, at denne Linie falder uden for Basis af Legemet, maa det nødvendig falde forover, saa længe til dette Center understøttes; siden Centret af Tyngden da ingen Hinder finder i at falde efter Verticalen, og paa dets Bevægelse den hele Materiens Bevægelse beroer. §. 102.

Deraf forstaaes let, at der intet besynderligt er i, at de berømte Taarne til Pisa og Bologna ikke falde, uagtet, at de staae slikt paa Horizonten; thi Verticalen eller Perpendiklen fra Tyngdens Center i disse Taarne falder et stort Stykke ind over deres Basis. Det samme kan agtes i Henseende til Dyrenes Bevægelse. Paa hvad Deel af Legemet endog at det øvrige Legeme hviler, da ere de frie for at falde, saa længe

som Direktions-Linien af deres Tyngdes Center falder over denne Basis. Jo bredere den er; jo længere Vei denne Direktions-Linie haver at bevæges over, før den kan falde uden for sin Basis; desto sikrere hviler Legemet, og desto vanskeligere stødes det om. Jo mindre derimod, at denne Basis er, jo kortere den Vei er, som Direktions-Linien af Tyngdens Center kan beskrive, før den falder uden for Basen; desto lettere stødes et Legeme om, og desto nærmere er det ved at falde. Det derfor, som vi finde forunderligt i Balancer-Kunsten, haver alene deraf sin Oprindelse, at vi finde Vanskelighed i at troe, at Tyngdens Center i de Legemets Stillingen er understøttet, udi hvilke det falder paa eller imod de yderste Grendser af Basis.

Vi ville derved ikke opholde os, men iagttage to andre Anmerkninger.

1. At saa tidt som Tyngdens Center enten aldeles ikke er understøttet, eller ei uden tildeels, men kan falde, saa maa og altid Legemet selv falde efter den Kant, hvorthen, efter at Tyngdens Center kan falde, og at derfor

2. Saa tidt Bevægelsen af Tyngdens Center ei er frie, det er, saa tidt dette Punkt hindres i at falde efter Verticalem, men dog derfor ikke hindres i at falde efter andre Direktioner, ligesaa tidt kan det hele Legeme falde, uagtet at Verticalem fra Tyngdens Center falder over Basen. Saaledes glide de tunge Ting ned efter de skraaeliggende Planer, endskiont at Direktions-Linien fra Tyngdens Center falder over Basis. Thi som vi have seet §. 71. driver i denne Stilling
en

en Deel af Tyngden Legemet hen efter Planets Direktion. Centret af Tyngden haver da en dobbelt Drift, og maa derfor, om det skal hvile, holdes af en Kraft parallel Planet; siont det ei kan falde for over, saa længe som Verticalen fra Tyngdens Center falder over Basis.

§. 104.

Man kan deraf altid vide, hvad heller at en Ting i en De høie Ting af samme Grund-Linie falde lettere, naar de helde, end de lave. givne Stilning kan paa et horizontal Plan staae, uden at falde eller ikke. Man seer desuden videre, at dersom Ting, som hvile, komme i Sving eller til at helde over, da falder det høiere ulige lettere ved en og den samme Vinkel-Bevægelse, end det Lavere. Saaledes, (Taf. IV. Fig. 7.) om ABLK er et lavt, ABGF et høit retvinklet Parallelogram, da falder det sidste ulige lettere for over end det første: thi bevæge begge Parallelogrammerne sig tillige om det Punkt B, da sees; at naar Verticalen eller Perpendiklen fra Tyngdens Center C i AFGb, som nu er i den Stilning *afgb*; falder efter *dM* langt hen over Basis i M, da falder Perpendiklen fra Tyngdens Center i KLBA, som nu staaer udi den Stilning *K/Ba* over Grund-Linien eller Basis udi H. Følgelig bevæger den første sig ulige stærkere til at falde uden for Grund-Linien AB, end den sidste; naar ellers Vinkel-Bevægelsen er i begge den samme.

* Vil man i dette Tilfælde bestemme nøiere, hvor stor Vinkel-Bevægelsen kan være i begge de tunge Ting, for de falde, for deraf at slutte, hvorvidt man kan vove dem i at helde over, saa de endnu kunne komme alene paa den yderste

Dette bestemmes videre.

Grændse af Faldet, men dog desuagtet staae, og siden falde tilbage igien: Da haver man alene nodig, at kaste Dinene paa Figur 7 og 8, som viser, at naar fra begge Tynders Center C og D, de Linier CB og DB treffes, da er $\text{Sin. BDC} = \text{CB}$, og $\text{Sin. BCH} = \text{DB}$. For nu at finde den yderste Grændse, paa hvilken Tingen i deres største Vinkel-Bevægelse over Buerne Dm og CL kunne staae, uden at falde, maa agtes: At saa tidt som Bevægelsen antages at stee om det Punkt B, da naar Centret af Tyngden C i ABLK haver bevæget sig i Buen LC, staaer det paa sin yderste Grændse til at falde; og ligeledes, naar Centret af Tyngden D haver bevæget Buen Dm , staaer det paa sin yderste Grændse i samme Henseende. Men $\text{HCB} = \text{CBG}$, og $\text{HDB} = \text{DBG}$. Følgelig kan KLBA, for det falder, net op beskrive den Vinkel HCB, og AFGB den Vinkel HDB, hvilke Vinkler bestemmes, ved at lade Perpendiklerne fra Tyngdens Centrer falde ned paa Grund-Linierne, og fra samme Centrer af at trekke andre Linier hen til det yderste Punkt af Grund-Linien, paa hvilken Tingen hviler. Man seer deraf videre:

1) At da Fig. 8. Sinus af Vinklerne HCB og HDB ere som DB og CB, kaldes da Høiderne af Tyngdens Centrer DH, H; CH, h ; disse Centrers Brede at hvile paa HB, b , da blive disse $\text{Sinus} = \sqrt{H^2 + b^2} : \sqrt{h^2 + b^2}$, følgelig, jo større Høiden H er, desto hastigere falder Tingen, om Basis eller Grund-Linien er den samme, siden Sinus af Vinkel-Bevægelsen bliver da mindre.

2) Da

2) Da $\frac{b}{h}$ er Tangenten eller Høre-Linien til Vinklen HCB, saa sees; at jo større Grund-Linien b , og jo mindre Hoiden af Tyngdens Center over Grund-Linien h bliver, desto større bliver Tangenten, følgelig og Vinklen, hvorunder de tunge Ting kunde helde, for de falde.

§. 105.

Vi have seet, hvorledes Centret af Tyngden kan bestemmes ved Forsøg eller paa en mekanisk Maade §. 99. Tyngdens Center bestemmes i et Triangel. Vi ville fremdeles oplyse, hvorledes man kan i adskillige Tilfælde finde dette Punkt ved den simple Geometrie, og vi ville derpaa give et Par Exempler, af hvilke vi ville siden betiene os i det Følgende. Det første bestaaer i at finde Tyngdens Center i et Triangel, naar denne Figur antages overalt at have en eensdan Vægt i alle sine Dele.

Er da (Taf. IV. Fig. 9.) ADB et Triangel, hvis to Sider AB og DB ere i C og F blevne overskaarne udi to lige store Dele. Da veed man, at den Linie DC skær alle de, som ab , der ere trofne ligeløbende med AB, udi to lige store Dele, saa derfor DC er en Diameter af Tyngden, og man seer paa samme Maade, at AF, der overskær alle, som gh , parallelle DB, udi to lige store Dele; er en anden Diameter af Tyngden: Saa derfor det Punkt e , hvor disse Diametere overskære hverandre, maa være Centret af Tyngden. Altsaa er tilbage at undersøge, hvad Deel Linien eC er af Linien DC.

Trek-

Trækkes PC parallel med DB, da ere Trianglerne PeC og DeF ligedanne Triangler, og $De:eC = DF:PC$. Men da APC og AFB ere og ligedanne Triangler, og $AC = \frac{1}{2}AB$, i Følge Constructionen, er $PC = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}DF$, følgelig og $eC = \frac{1}{2}De = \frac{1}{3}DC$.

Saa man seer, at i Trianglet ligger Tyngdens Center i hoed for en, man vil, af de Linier, som trokne fra en af Spitserne overskiere den overliggende Basen af Trianglet i to lige Dele; og det falder i denne Linie $\frac{2}{3}$ fra Spitsen eller $\frac{1}{3}$ fra Basis.

§. 106.

Ligeledes og i
Cirkel-Buerne.

Det andet bestaaer i at finde Tyngdens Center for enhver given Cirkel-Bue. Til den Ende ville vi først vise, hvorledes dette Center kan findes for Omkredsen af saa mange lige store Korder i en Cirkel, som man vil, naar de stode paa hoerandre.

* Er da (Taf. IV. Fig. 10.) i den Cirkel-Bue ABCDE, $AB=BC=CD=DE$ de omtalte Korder i Cirklen. Da er det klart, om de deles i lige Dele udi a, b, c og d , og de overalt ansees som eens tunge, bliver i a, b, c, d deres Tyngdes Center. Trækkes derpaa Linierne ab og cd , for igien at deles i to lige store Dele udi e og f , da bliver atter igien i e det fælles Tyngdes Center for AB og BC, og i f ligeledes det fælles Tyngdes Center for CD og DE. Trækkes igien den Linie ef , da naar samme deles igien i lige Dele udi g , bliver det Punkt g det fælles Tyngdes Center for samt-

lig

lig Korderne AB, BC, CD, DE, og dette Center kan ligeledes bestemmes for saa mange deslige Linier, som man vil.

For nu at bestemme videre det Punkt g , i Henseende til Halv-Diametern GC, behøves alene at trække den Linie Gd, som staaer perpendicular paa DE, fordi DE er i d deelt i to lige Dele; og ligeledes Halv-Diametern GE med Strengen eller Korden CE. Da man let seer, at fdG og DFE blive ligedanne Triangler, fordi ved F og f ere rette Vinkler, og Vinklen i Peripherien DEC staaer paa en dobbelt saa stor Bue, som Vinklen i Centret DGd. Saaledes bliver $DE:EF = Gd:Gf$ og $2DE:2EF = Gd:Gf$, det er: $CD + DE:CE = Gd:Gf$. Videre; da Trianglerne CEH og Gfg ere ligedanne Triangler, fordi ved g og H ere rette Vinkler, og Vinklen i Centret CGf ei staaer uden paa halv saa stor en Bue, som Vinklen i Peripherien GEH, saa er $CE:EH = Gf:Gg$. Følgelig, da og er $CD + DE:CE = Gd:Gf$ efter den forrige Proportion; saa bliver $CD + DE:CH = Gd:Gg$, og derfor $2(CD + ED):2EH = Gd:Gg$; eller $AB + BC + CD + DE:EA = Gd:Gg$, hvoraf følger:

a) At da man kommer til samme Slutning, i hvor mange Streng, som CB, man end i lige Antal tager paa begge Sider af en Halv-Diameter CG, om man derfor betragter en heel Bue ACE, som at bestaae af utallige deslige smaa Korder, saa man den hele Sum af samtlige disse smaa Sider, det er, den hele Bue ACE, forholde sig til sin Chorda AE, som sig forholder Perpendiklen paa en af disse Korder, hvil-

fen i dette Tilfælde er Halv-Diameteren, til Buens Tyngdes Centers Distance fra Cirkelns Center.

b) Følgelig bliver; som den halve Peripherie til Diameteren, saa Halv-Diameteren igien til den halve Peripheries Tyngdes Centers Afstand fra Cirkelns Center.

§. 107.

Ligesledes for
Cirkel: Snit:
tene.

* Er Tyngdens Center funden for Buen, bliver det siden overmaade let at finde samme for hele Cirkel-Snittet (Taf. IV. Fig. II.). Thi anseer man det hele Cirkel-Snit AEB, som at bestaae af en utallig Mængde ligesidede eller isoskele Triangler, som fgE , gbE , hE , o. s. v. da er det af det forhen sagte §. 105 viensynligt, at Stedet, hvori alle Tyngdens Centreer for de smaa Triangler fgE o. s. v. samles, er en Cirkel-Bue CKLD, hvis Halv-Diameter $= \frac{2}{3}AE$. Følgelig, om for denne Bue Tyngdens Center atter søges, faaes efter §. 106. a. CKD til Korden af CD som CE til det søgte Centers Distance fra E. Eller og (hvilket er det samme) $\frac{2}{3}AgB$ til $\frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}AE$ til dette Centers Distance. Det er, AGB:Korden $AB = \frac{2}{3}AE$ til den søgte Distance, hvorefter af følger:

- a) At Buens Tyngdes Centers Distance i Sector af Cirklen forholder sig til den hele Sectors Tyngdes Centers Distance, naar begge regnes fra Cirkelns Center E, som 3 : 2.

b) Og

- b) Og fremdeles. At Halv-Cirkelns Tyngdes Centers Distance fra Cirkelns Center er $\frac{2}{3}$ af Diameterens Quadrat, divideret med Peripherien.

§. 108.

Vi maa endnu fortsætte den Lærdom om Tyngdens Center. Vi have endnu ikke seet dets Henseender til Kræfternes Ligevægt. Dette skal blive viist i følgende Forelæsn^{ing}. Vi ville her til Slutning alene agte den Forskiel, som er imellem Tyngdens og Størrelsens Center. Ved dette sidste forstaae vi det Punkt i de tunge Ting, hvorfra de i Henseende til deres geometriske Indhold deles i to lige Dele, enten af et Plan, som overskier det Korperlige; eller af en Linie, som overskier de simple Figurer. Ved det første derimod, efter det, som allerede sagt er, see vi paa at dele Tingene efter deres Vægt i lige Dele, Legemerne ved Planer, Figurerne ved Linier. §. 99.

Saa meget forstaaes strax, at Tyngdens og Størrelsens Centrer falde i et og det samme Punkt, saa tidt, som Tingene ere reguliere Legemer, eller Parallelopipeda, eller have som Kuglen i egentlig Mening et Center, og ere desuden overalt af lige tunge Dele.

Men i denne Anledning er det got at agte, hvor Tyngdens Center falder i endeel Legemer, nemlig :

- 1) Alle Parallelopipedis, som tillige ere rette, seer man let, at Midt-Punktet falder midt i den Linie, som gaaer fra Midt-Punktet i den øverste Basis til Midt-Punktet i den nederste, og kan ansees som Aksen af disse Le-

høved Størrelsens Center

Tyngdens Centers Bestemmelse i adskillige Legemer, nemlig i de prismatiske firkantede.

mer: Thi det Plan, som igiennem denne Linie staaer perpendicular paa det hele prismatiske Legeme, deler det i to lige Dele, og deles igjen selv i to lige Dele af den Linie, som gaaer igiennem Midt-Punkterne af begge Bases. Følgelig maa saavel Storrelsens som Tyngdens Center falde midt i denne Linie.

Saaledes, om (T. VI. §. 10.) *abkd* er et ret Parallelepipedum, da ved at trekke, som Geometrien lærer, Diagonalerne *ac*, *bd*, findes Midt-Punktet i den øverste Basis *e*, og i den nederste ligeledes Midt-Punktet *g*, ved at trekke Diagonalerne *hk*, *or*. Understøttes da Legemet udi *e*, *g*, eller paa Midt-Punkterne af Siderne, som ligeledes faaes ved Diagonalerne's Trekning, da hviler det.

2) I de rette triangulære prismatiske.

2) I de rette triangulære prismatiske Legemer findes Tyngdens Center i Basis ikke som før ved Storrelsens Center, thi disse to Punkter ere i Trianglet ikke et og det samme, men man maa (T. VI. §. 12.) søge Tyngdens Center *e* og *g* udi Bases oven og neden, nemlig udi *abc* og *dor*, da Midtpunktet *f* af Linien *eg* er Tyngdens Center i Prisma.

Men Tyngdens Center udi Bases findes let af §. 105. Ved at søge ligeledes Tyngdens Center i Grund-Fladerne af alle andre rette prismatiske Legemer, eller og paa tvende af deres Sider, som man veed, ere altid Parallelogrammer, kunde Diametrene af Tyngdens Center i dem altid bestemmes. §. 99.

3) I de rette Cylindrer er derfor ligeledes saavel Tyngdens som Storrelsens Center i Midten af Aksen.

- 4) I Tillægget bevises, og det er ikke vanskeligt at see, at det samme gielder om alle skieve prismatiske Legemer, at nemlig Tyngdes Center falder midt i den Linie, som gaaer igiennem Tyngdens Centrer af begge Legemets Bases.
- 5) Tyngdens Center ligger i Pyramiden og Keilen, saa tidt de ere rette, om $\frac{1}{4}$ af Høiden borte fra Pyramidens og Keilens Spitse. (*)

T 3

§. 108.

(*) Den lærde Wallis er den første, som haver i den første Deel af hans Værk, i det Stykke, som bær Titel af *Calculo Centri Gravitatis*, viist noget ret udsærligt om Tyngdens Center. Han bruger den artige Maade af de uendelige Følger, som man betiente sig af, før Integral-Regningen blev fundet. Wallis's Maade er vidtløftig, undertiden vanskelig, og brugelig for saa, men for sin Tid fortreffelig. De Maader, hvilke vi vise siden i følgende Tillæg, for ved Integral-Regningen at udregne dette Center, strekke sig ulige videre, og ere ulige lettere end de synthetiske og de af Wallis.

Angaaende de synthetiske Metoder at finde dette Center paa, da høves i det Stykke intet bedre, end hvad man finder hos Ozanam i hans *Cours des Mathematiques*, Tom. 4. Liv. 2. Dog skifter hans Bevis sig ikke til stort andre Legemer, end de egentlig saa kaldte geometriske, hvilke vi og deels have talt om, og deels i Tillægget paa en synthetisk Maade skulle afhandle dem til Tieneste, hvis Leilighed det ikke

§. 109.

Hvorfor vilde
Tyngder kunne
bevæge sig op
efter.

Den Anmerkning om Forskiellen imellem Tyngdens og Størrelsens Center behøves iblant andet, for at forstaae følgende. Vi have sagt, at Tingene maa falde, saa tidt, som deres Tyngdes Center ikke hviler. Da dette Punkt nu ei hviler over et inklinert Bret, eller en skraaeliggende Linie, uden tildeels, og derfor med endeel af Tyngden drives ned ad Linien, eller ned efter Brettet §. 71, 72, saa er intet klarere, end at de tunge Ting maa falde ned efter over alle skraaeliggende eller inklinerte Linier og Planer i Tingenes sædvanlige Fald. Smid-

ikke er at bekymre sig om Integral-Regningen, og dens almindelige Metoder.

Et af de Legemer, hvis Tyngdes Center Qvanam ei bevæger, hvor ligger, men vel tilkiendegiver, er Pyramiden. Man kan bevise det saaledes:

Er (Taf. VII. Fig. 4.) ABCD en Pyramide, BDC dens Grund-Flade, i hvilken CF deler Basis BD udi to lige store Dele udi F, saa er i CF Tyngdens Center af Trianglet, og i det Punkt E, om $FE = \frac{1}{3}FC$ §. 105. Trekkes fra Spitsen af Pyramiden A den Linie AE, da gaar den og igiennem alle de enkelte Tyngdens Centre af de andre Snit, der ere parallelle Basis, som *btc*, sælgelig er i AE Tyngdens Center af Pyramiden.

Ansees nu ABD, som Grund-Fladen af Pyramiden, i Henseende til hvilken den lige over for liggende Spitse af Pyramiden

Imidlertid synes Erfaring i følgende Tilfælde at vise noget andet. (Taf. III. Fig. 3.) BC er et skraa Bret, hvorpaa naar legges den Cylinder A, da langt fra at falde ned efter

ramiden er C, da om AF trekkes, som deler Grund-Linien BD af Grund-Fladen ADB i to lige store Dele, saa er som før i AF Tyngdens Center, og det saaledes i G, at $FG = \frac{1}{3}AF$. §. 105. Trekkes da videre CG, er den af samme Uarsag, som AE, en Diameter af Pyramidens Tyngde. Følgelig maa Pyramidens Tyngdes Center være i o, hvor de to Diametre GC og AE overskære hverandre.

Trekkes Gp parallel FC, da ere Gpo og oEC ligedannede Triangler, saavel som AGp og AFE, saa $AG : Gp = AF : FE$, følgelig da $AG = \frac{2}{3}AF$, er og $Gp = \frac{2}{3}FE = \frac{1}{3}EC$, thi $FE : EC = 1 : 2$. Men, som $Gp : EC = po : oE$, følgelig er $po = \frac{1}{3}oE$, og $AG : AF, Ap : AE$, følgelig $Ap = \frac{2}{3}AE$.

Altsaa er $po = \frac{1}{12}AE$, og $Ao = (\frac{8}{12} + \frac{1}{12}) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}AE$. Saa deraf sees, at i Pyramiderne ligger Tyngdens Center om $\frac{3}{4}$ af den Linie AE borte fra Spitsen, og om $\frac{1}{4}$ fra Grund-Fladen. men AE er den Linie, som gaaer fra en af Spitserne af Pyramiden til Tyngdens Center i den lige over for liggende Basis.

Da Keilen er intet andet end en Pyramide, saa slttes af det forrige Beviis, at i den ligeledes Tyngdens Center ligger i Aksen $\frac{3}{4}$ af dens Længde borte fra Spitsen.

efter Brettet, løber den meget meer op efter det, og stiger saaledes virkelig, langt fra at den skulde falde.

For at forstaae denne Virkning af Tyngden, maa man vide, hvorledes Cylindren A er gjort. Den selv er af Træ, men inden i den oppe imod Peripherien A er i F lagt en anden mindre Cylinder af Blye. Centret af Storrelsen i Cylindren A er derfor midt i dens Midt-Linie, eller Axl, f. E. Fig. 4. i E. Centret af Tyngden i Blye-Cylindren er og det samme med denne lille Cylinders Storrelses Center. Følgelig falder det Center af Tyngden, som er tilfælles baade for Træ-Cylindren og for den af Blye, ulige nærmere oppe imod Peripherien, end Storrelsens Center, f. Ex. udi D. §. 108. 3.

Da nu alle de tunge Ting falde efter den Kant hen, efter hvilken at deres Tyngdes Center kan bevæge sig, §. 103. da om man, som i Fig. 4. forestiller sig i Steden for Cylindren A, den Cirkel A, der gaaer igiennem Tyngdens Center, som at ligge over det skraae Plan NBC, og i samme Cirkel Storrelsens Center i E, Tyngdens udi D. Var da Tyngdens Center D, det samme med Storrelsens Center E, faldt Perpendiklen fra det efter Ef, og følgelig enten rullede eller gleeed Tingen altid ned efter Planet, thi denne Perpendikel kunde ei falde i denne Tilfælde som Eh, over det Punkt nemlig, i hvilket at Cirklen rorer Planet, med mindre BN blev horizontal, som BC. Falder derimod Tyngdens Center som i D op imod Peripherien, da kan Cylindren staae stille paa Planet, om Perpendiklen fra dette Center falder just over Eh, thi da trykker den hele Tyngde perpendikulær
paa

paa Planet, og ingen Deel af Tyngden driver ned efter Planets Direktion. Falder den derimod som Dg, da maa Tyngden rulle hen, eller falde efter samme Side, som Dg eller Perpendiklen fra Tyngdens Center falder hen efter, og selvfølgelig løbe op efter Planet. (*)

§. 110.

(*) Angaaende denne Cylinder kunde mange Anmerkninger gøres, hvoraf en Deel findes hos *Desaguliers* i hans *Physik* i Tilægget til den anden Forlæsning, som kan efterslaaes. Vi ville her alene agte følgende Poster.

- 1) At det er ikke alene over sphaeriske Planer, men endog over det Horizontale, at denne Cylinder kan bevæge sig. Dens hastigste Bevægelse er virkelig over det Horizontale. Bevægelserne bliver langsommere alt som Planerne ere meer inklinerte, men da stiger den i Høiden.

Man forstaaer dette overmaade let, alene ved at eftertanke, at den Kraft, som driver Cylinderen op ad Planet, kommer alene af den Forskiel i Tyngden, som er imellem Blye-Cylinderen og en ligedan Træ-Cylinder. For saavidt nemlig, at Tyngdens Center derved bliver forrykt hen til D (T. V. Fig. 10.) og falder ei udi Størrelsens Center C; hvorover Cylinderen stiger, efter det, der er blevet forklart §. 109.

Men uden at behyære sig næiere om den næie Bestemmelse af denne Kraft, seer man strax, at i hvad den end og er, alene at den altid i sig bliver den samme; da maa, i Følge Besskaffenheden af det inklinerte Plan §. 71, dens Virkning

§. 110.

Spøad der er
Marsag i at no-
gle Legemer rul-
le og velte sig
hen over de in-
klinerte Planet.

Man maa agte, at dersom det Plan, over hvilke Tin-
gene blive drevne af Tyngden, ingen Modstand yttrede imod
Bevægelsen; burde samtlig de tunge Ting falde hen efter de
fræaeliggende Linier, som efter de verticale, stånt med ad-
skillige

til at drive op efter, idelig blive saa meget mindre betydelig, som
Planet nærmer sig meer hen ad Verticalen til; siden jo større
denne Elevation bliver, med en desto større Kraft driver den
hele Tyngde af Cylindren ned efter Planet; hvilken Drift
ned efter omsider kan blive saa stor, saa den ganske kan til-
intetgiøre den Kraft, som driver op efter.

Men da jo mindre Planet er inklinert over Horizonten,
desto mindre er Cylindrens Drift ned efter, saa følger og, at
den deraf kommende Modstand imod den op ad Planet drev-
vende Kraft maa være allermindst over et horizontal Plan, saa
at derfor Cylindren over det bevæges hastigst, og siden immer
langsommere og langsommere, alt som Planet meer løstes op
til en større Vinkel over Horizonten.

- 2) Sættes (Taf. V. Fig. 10.) Cylindren paa det horizontale
Plan BF saaledes, at Tyngdens Center D ligger i den Linie
ADB, der gaaer igiennem Centret C og Rørelse-Punktet D,
da hviler Cylindren. Falder det derimod nok saa lidt uden
for Linien CB, da ruller den hen efter BF, indtil det Punkt
A, haver beskrevet en halv Cykloide AF, eller indtil i F.
Tyngdens Center D falder over Rørelse-Punktet A, og paa sit
nederste.

ffkillig Tyngde. §. 73. Det er; Faldet maatte altid fæe
 faaledes, at alle Delene i Legemet bevægede sig med en eens-
 dan Bevægelse, siden det saa var lige meget, enten enhver
 Partikel for sig bevægede sig ned efter Planet, eller om de

11 2

alle

nederste i F. Men da Cylindren i Faldet fra A til F haver
 vundet en Hastighed, kan den ei blive staaende, men maa
 bevæge sig videre fort efter FG; paa samme Maade, som
 vi forhen have forklart det om Pendulerne §. 93: Indtil nem-
 lig, at Tyngdens Center kommer i den høieste Stilning og A
 falder over D. Siden maa den bevæges med Sving frem
 og tilbage, indtil endelig Tyngdens Center, som i Pendulerne,
 bliver staaende i sin laveste Stilning udi F.

- 3) Deraf sees, at over et horizontalt Bret falder Tyngdens Cen-
 ter D i Cylindern fra en Stilning, der er fast vertical igien:
 nem den horizontale til en anden Vertical, i hvilken det er
 paa sit laveste. Faldet er saaledes, naar det regnes efter
 Vuen A α B, af 180°. Man seer let, at et Fald over saa
 mange Grader aldrig bliver mueligt over de inclinerte Planer;
 og man bestemmer ligesaa let Forhøjnings-Vinklen af det Plan,
 (Taf. V. Fig. 13) over hvilket, saasnart som Tyngdens Center D
 kommer til at ligge horizontal, Cylindren ikke meer kan bevæ-
 ges, men maa over dette Plan staae stille.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, kan man agte:
 At om, som i Taf. V. Fig. 10. Brettet er horizontal, og
 man betragter Linien CD, der sammensæier Tyngdens og

Størrel-

alle i Sammenhang bevægede sig med Hastigheden af deres Tyngdes Center. Følgelig maatte da Tingene alene glide ned efter Planet, saa tidt som dette sidste paa ingen anden Maade stod imod, end for saavidt, at det alene bar en Deel af

Størrelsens Center, som at ligge horizontal; da bliver Dd Direktions-Linien af Tyngdens Center D og CB , eller den Linie, som gaaer fra Centret C til Røre-Punktet, begge parallelle. Beholder CD sin horizontale Stilning og Planet bliver inklineret, da falder CB alt nærmere ind til Dd , indtil at endelig, som i Fig. 13, Cd og Dd falde over det samme Punkt eller over Røre-Punktet d . Da derfor, fordi GdF er et retvinklet Triangel, $dGF = EdF = CdD$. Saa sees, at siden CD er Sinus til CdD , saa maa i den horizontale Stilning af Tyngdens Center Cylindren staae ubevægelig paa det inklinerte Plan, uden at kunde stige, naar Planet GA er forheiet under den Vinkel AGC , hvis Sinus er DC eller Tyngdens Centers Distance fra Størrelsens Center.

- 4) Hvoraf følger atter igien: At jo mindre DC er, eller jo nærmere Tyngdens Center falder ind til Størrelsens Center, desto mindre Sving kan Cylindren giere op efter Planer af samme Inklination, og desto mindre bliver den heieste Forheiningens-Vinkel, under hvilken Cylindren kan stige. Jo større derimod at DC bliver, desto større Sving kan den giere over eens inklinerte Planer, og desto stærkere kunde
- Pla-

af Tyngden, og denne Bevægelse maatte altid have Sted, hvad heller at Tingene vare sir- og meerfantede, eller og, om de vare runde; hvad heller at Perpendiklen fra Tyngdens Center faldt over eller uden for Grund Linien.

11 3

Da

Planerne nærme sig Verticalen, før den over dem ei mere skulde kunde løbe op efter.

- 5) For at forstaae det allerede sagte endnu saa meget desto bedre, maa ydermere agtes, at det ei er alene i dette Tilfælde, da Planets Inklinations Vinkel (Fig. 13) $AGC = CaD$ og CD er horizontal, at Cylindren hviler; men den maa endog hvile over alle andre Planer, under hvad Vinkel at de end ere inklinerte, saa tidt som Tyngdens Centers Direktions-Linie gier med Cd en Vinkel CaD , saa stor som Planets Inklinations-Vinkel; og dette sidste er det egentlige, som bersee paa et hvert Plan, naar paa det Cylindren ei skal kunde rulle høiere op efter Planet. Men Forskiellen imellem alle disse og den No. 4. omtalte Tilfælde er, at over de andre Planer ligger CD ei, som i Fig. 13. horizontal, naar Cylindren er kommen til Hvile paa Planet, men den kan have to adskillige Stillingen, som i Fig. 15. En, udi hvilken at Tyngdens Center paa den Linie eB staaer paa sit høieste udi D . En anden, da den over samme Linie staaer paa sit Laveste udi d . Den i No. 4. omtalte Tilfælde er derfor den da $DB = dB$, eller Tyngdens Center, for at blive staaende paa Planet, ikke kan have uden en eneste Stilling, som bliver den nederste,

Efter

Da derfor Erfarenhed lærer, at de Ting, som falde hen efter et inklinert Plan, have snart en, snart en anden Bevægelse. En, som man kalder at glide ned efter Planet, naar det nemlig idelig rores af de samme Dele af den faldende Ting. En anden, naar de anrørende Dele idelig forandres, som

Eftertanke man lidt mere, hvorledes Bevægelsen af Tyngdens Center skeer i disse to adskillige Stillingen, (hvilke ligeledes have Sted paa den horizontale Linie) da seer man strax, at om dette Punkt er i sit nederste, da hvad heller man vil bevæge Cylindren hen imod G eller op imod A, maa Tyngdens Center altid stige, selgelig falder det igien tilbage til d , saa Bevægelsen hen over Planet i dette Tilfælde ikke haver Sted.

Staaer derimod Tyngdens Center paa sit høieste udi D, helder da Cylindren over imod G, falder den der henester. Helder den hen imod A, falder den der henester; thi man seer strax, at i begge Tilfælde falder idelig Tyngdens Center alt lavere og lavere, saa dets Bevægelse ei er hindret. Forstyrrer derfor Cylindrens Hvile udi D, løber den saa lange op efter Planet, indtil den naaer den Stilling D , da Centret af Tyngden kommer i sit nederste, hvor det nødvendigt, som før sagt, maa blive staaende.

Men deraf skyder, at i det i No. 4. omtalte Tilfælde Cylindren aldeles ikke, i hvorledes man end gier det, kan løbe op efter Planet. Thi da i denne Stilling $DB = dB$, saa har

som i Kuglernes Fald; hvilket man kalder at rulle eller veltes ned ad Planet. Af hvilke begge Bevægelser, naar de findes tillige i en og den samme Ting, endnu en tredie kan sammensættes. Saa sees strax, at disse to sidste tildeels maa forarsages af den Modstand hen efter Planet, som man sædvanlig kalder Friction.

Fore-

har Tyngdens Center ingen høieste Stilling, hvilken alene kan forarsage, at den løber op efter Planet. Saa den yderste Grendse, da den kan staae paa Planet og ei mere løbe op ad, er den, naar CD eller rettere $\frac{CD}{CB}$ er Sinus til Planets Inklinations-Vinkel AGC .

- 6) Da vi have sagt, at Cylindren sadt paa det horizontale Plan i sin høieste Stilling (Fig. 10.) beskriver 180° , før den kan komme til at hvile i den laveste, eller en Linie $BF = A_nB$. Saa kan man ligeledes bestemme, hvor mange Grader af den halve Peripherie Cirklen beskriver over et givet inklinert Plan, før Tyngdens Center fra den høieste Stilling D kan komme til at ligge i den laveste d Fig. 15. Thi da i Cylindrens Omvektning Distancen DC altid bliver den samme, saa bliver $dB = dD$. Videre sees let, om b trekkes ud til x , at bxG , AGC og CbB ere ligedanne Triangler, saa at Vinklen $bCB = AGC = ACa = aCe$.

I det D falder og søger den Stilling d , ville vi sætte, at Cylindren bevæger sig op efter Planet til l , saa $Bl = Bg$, og naar l er det Punkt, hvor Cylindren staaer stille, falder g over l .

For

Forestiller man sig (Taf. V. Fig. 3.) Planets Modstand eller Ujevnhed, som en Kraft udi E, der driver Basis DE af Parallelogrammet HD hen efter EA, imidlertid at i Tyngdens Center en Deel af Tyngden FG driver DH hen efter FG parallel med AC, saa sees strax; at disse to Kræfter, som

For at bestemme dette Punkt, maa agtes, at om igiennem D treffes den Korde gDm , da maa $gD = De = dB$. Thi naar det Punkt g i l haver denne Egenskab, er det eensynligt, at Tyngdens Center D er paa sit Laveste udi l . Fordi, naar $gD = eD$, bliver og $Dm = DB$, fordi i Cirklen altid er eD , $DB = gD$. Dm . Derfor og $gDm = eDb$, saa Stillingen i l bliver den den her.

Deraf bestemmes let Vuen $Bg = 180^\circ - Ag = 180^\circ - ACE (= 2 AGC) - eg$, saa at alt kommer an paa at bestemme Vuen eg . I Trianglerne eDC og gDC ere alle 3 Sider lige store, selgelig Vinklen $ecf = gcf$ og $ge = 2fg$, saa alt kommer fremdeles an paa at bestemme fg , eller Vinklen DCG : Hvilket let skeer, om i Trianglet Deg , hvori to Sider DC og Cg ere givne, den tredie Dg og bliver bekendtgjort.

For at finde Dg , maa agtes at $Dg = dB$. I Trianglet CKB findes CK af CB , som er givne; af 90° ved K, og af Vinklen $CBK = AGC$. Videre findes Kd af Cd og CK givne i det retvinklede Triangel CKd . $KB - Kd = dB = Dg$. Selgelig er Vinklen feg bekendt, hvilken saaledes uden Udregning strax kan bestemmes. Fra

som drive Legemet efter imodsatte Direktioner, let kunde faae den Forhold imod hverandre, saa at det ved deres forenede Virkning maa veltes om, saa tidt som Vertikalen fra Tyngdens Center falder uden for Grund-Linien. Hvoraf flyder:

1) At da Vertikalen altid over inklinerte Planer falder uden for Grund-Linien i Kuglerne og de runde Legemer, saa rulle disse ned over de inklinerte Planer bestandig, fordi Frictionen af Brettet ikke behøver at være stor, for at drive dem om, med mindre, at som i Taf. III. Fig. 4. Vertikalen fra Tyngdens Center D falder paa den Side imod A, saaledes, som nylig er blevet forklart i §. 109, da de rulle op ad Planet. De rulle af samme Aarsag med en veltende Bevægelse hen over horizontale ujevne Planer, naar de kastes ud over dem med en progressiv Bevægelse og Hastighed.

2) Jo bredere derimod at Grund-Linien er i de Legemer, som have platte Bases, alt for Resten lige; desto større maa Kraften af Frictionen eller Modstanden være, for at kaste Legemet om, saa det velter ned efter Planet.

Saa

Fra B eller Nære-Punktet paa Planet treffes Diametern ACB med Vertikalerne ax og eB , ace tages $= ACa$, igien: nem Tyngdens Center D, eller det Punkt, hvor den Cirkel, som beskrives fra C med CD, ffier eB , treffes Cf, og man tager $ef = fg$. Saa er gB den søgte Due, hvis Længde er den Vel B/, som Cylindren kan løbe op efter Planet.

Saa man deraf seer, at et Legeme ikke bør vâlte sig ned over et inklinert Plan, af den ene Aarsag, at Vertikalen fra Tyngdens Center ikke falder over Grund-Linien. Planets Ujevnhed eller Friction maa nødvendig i en vis Grad give det en Bevægelse efter ED, tværtimod den af Tyngden efter FG, om det skal rulle ned efter Planet. Vi skulle handle om denne Friction udførlig siden.

§. III.

En anden fast
ligedan Erfa-
ring.

Kaster man Dinene paa dette andet Instrument, (Taf. IV. Fig. 5.) saa seer man endnu et andet Tilfælde, i hvilket en Tyngde bevæger sig op efter Planet, uden at man haver lagt Centret af Tyngden ud af sit rette og naturlige Sted, saaledes som i næstforrige Tilfælde ved en fremmed Tyngde af anden Slags. For at forstaae Aarsagen til denne, efter hvad der synes unaturlige Bevægelse, maa man agte, at i I er en Cirkel af Træ, i Midten af hvilken er indlagt en dobbelt Keile, ligeledes af Træ, hvilken iglen ligger an paa de to verticale og oven til skraaeliggende Bretter CE og BD, som løbe sammen efter Vinklen DKE, ligesom Figuren viser. Hele Instrumentet hviler paa to Fodder F og G, som bør sættes i Horizontal eller næsten Horizontal-Stilling. Da Rundingen af den dobbelte Keile idelig vøjer fra H til L, som bedre (skiont i mindre Tegning) vises i Giennemsnittet Taf. III. Fig. 6, hvor HL og H/ ere Snittene midt over begge Keiler; HM derimod er Halv-Diametern af Cirkel-Fladen I. Saa ligger Tyngden i A virkelig høiere, da den

den ligger an paa den brede Deel af Keilen inde ved H (Fig. 6) end bedre op ad paa Planet, for Gr. udi CB, hvorefter den kommer til at ligge an ud imod de tynde Spitzer L og I af Keilene: Og da Tingene altid falde ned efter, det er, fra det Hoiere til det Lavere, indtil at de omsider naaer det laveste Sted, saa er der ingen Vanskelighed i at see, hvorfor denne Tyngde maa bevæge sig op ad Planet, siden Tyngdens Center, og folgelig den selv, da virkelig falder ned efter.

For at forstaae denne Bevægelse saa meget desto bedre, kan man agte (Taf. V. Fig. 12.) at, naar FCH er Midt-Cirklen af den dobbelte Keile, BD Planets EB Høide, CE Halv-Diametern af Cirklen, da maa $BD = AE$ være noget mindre end CE. Om Tyngdens Center af den dobbelte Keile skal falde langs hen efter Linien CB.

Siette Forelæsning.

Om Kræfterne af Tyngden deres Ligevægt under sig.

§. 112.

Afhandling om
Kræfternes Lige-
vægt ved Tyng-
den, og hvorudi
denne Ligevægt
bestaaer.

Vi lovede i vores sidste Forelæsning, at tale om Kræfternes Ligevægt ved Tyngden. Dette Stykke af Mechanik er høist nyttigt; Det kommer overalt, men især i Machin-Basenet, saa ofte for, saa det er et af dem, der bør læres med en besynderlig Flid, og som fortæner at eftertænkes med en særdeles Altsomhed. Man veed da, at to Kræfter siges at staae i Ligevægt med hverandre, naar den ene ikke kan overvinde eller bevæge den anden. For Ex. (Taf. IV. Fig. 12.) Om AB er en Stang, der ligger an paa et Punkt C af Underlaget CG, som understøtter den; og paa AB ere heftede to Tyngder A og B saaledes, at A ei kan bevæge B, ei heller B, A, da ere disse to Kræfter udi Ligevægt med hverandre.

Hvad Hvile-
Punktet er.

Det Punkt C kaldes gemeenlig Hvile-Punktet.

§. 113.

Første og sim-
pleste Tilfælde af
lige store Tyng-

Saa meget seer man strax, at dersom Taf. IV. Fig. 12. Over en Stang AB, som hviler udi C, to lige store Tyngder A og

A og B trykke paa den i lige store Distancer AC og CB ^{fra deres Ligevægt i} Hvil-Punktet, at disse to Tyngder da maa staae i Ligevægt ^{lige store Distancer fra Hvil-Punktet.} med hverandre, siden Kræfterne anvendes i A, aldeles paa selvsamme Maade, og efter samme Størrelse som i B, saa paa begge Steder er ingen Forskiel.

§. 114.

Men hvad maa ssee, paa det at Kræfternes Ligevægt ^{Almindelig} kan finde Sted, dersom ulige store Tyngder D og a trykke ^{Opløsning af} paa Distancer DC og aC fra Hvil-Punktet C, som ligele- ^{alle de andre} des under sig ere ulige? Dette Tilfælde er vanskeligere, men ^{Tilfælde, naar} forstaaes dog let af, hvad vi forhen have sagt om Kræfternes ^{Distancerne fra} Ligevægt §. 25, at nemlig Pressionerne ere indbyrdes under ^{Hvil-Punktet} sig lige store, og følgelig Kræfterne udi Ligevægt, saa tidt ^{ere ulige.} som de Modstand, de skulde bevæge, ere i Størrelse af Inertie, de Rum forkeert Wiis proportionerte, igiennem hvilke de skulde bevæges, om virkelig Bevægelse skulde ssee.

Anvender man denne Regel paa vor nærværende Tilfælde, da er det klart, at Inertierne i a og D ere som Vægten af Tyngderne a og D §. 35. De Rum, igiennem hvilke a og D i samme Tid skulde bevæges, ere aA og DE. Følgelig, om Ligevægt skal have Sted, maa Inertien a multiplicert med aA, være saa stor som Inertien D multiplicert med DE, eller, da DE og Aa ere ligedanne Buer, og derfor deres Halv-Diametrer aC og DC proportionerte, maa, om Ligevægt imellem a og D skal have Sted,

$$a \cdot aC = D \cdot DC, \text{ eller } a : D = DC : aC. \quad \text{Det er:}$$

Inertierne, eller, hvilket er det samme, Tyngderne a og D maa være deres Distancer fra Hvile-Punktet C , nemlig aC og DC forkeert Viis proportionerte, om de skulle staae i Ligevægt med hverandre.

§. 115.

Følgelig om, som i §. 113, $AC = BC$, og $A = B$, er $Aa = Bb$ og Tyngderne i Ligevægt, fordi de ere Distancerne fra Hvile-Punktet, forkeert Viis proportionerte.

§. 116.

Tunge Ting
staae i Ligevægt
over Vægt-
Stænger, der
som deres Iner-
tier ere deres
Hastigheder for-
keert viis pro-
portionerte.

Jeg haver tilforn sagt §. 23, at i de elementære Pres-
sioner, saadanne som de, der have Sted i Tyngdernes Lige-
vægt over Stænger, kommer det paa et ud, hvad heller man
vurderer Kræfterne af Rummet eller af Hastigheden, siden
de ere hinanden begge proportionerte.

Følgelig kan man og sige, at to Tyngder staae i Lige-
vægt med hverandre paa ulige Distancer fra Hvile-Punktet,
dersom deres Inertier eller Tyngder ere deres Hastigheder for-
keert Viis proportionerte; thi i dette Tilfælde, hvad det
Mindre haver mindre i Masse, haver det meer i Hastighed;
og hvad det Storre haver meer i Masse, haver det Mindre
igien i Hastighed.

§. 117.

En Vandske-
lighed hæves.

Men man kunde spørge: I Kræfternes Ligevægt, hvor alt
høiler, hvorledes kan der Betragtning skee, som om de i Lige-
vægt

vægt staaende Ting bevægede sig igiennem virkelige Rum, eller med virkelige Hastigheder? Tilforladelig var intet urimeligere, end om man vilde sige, at Tyngder, som stode i Ligevægt, bevægedes eller havde en virkelig Hastighed. Men det er heller ikke, hvad man siger. Men at, endskjønt Ligevægt er, søger dog Pressionerne af Tyngden ligesuldt at meddele Inertierne Bevægelse og Hastighed, saa de have en bestandig Bestræbelse til at iverksætte disse sidste, og at disse Bestræbelser, som i sig ikke ere uden elementære, ere i Forhold med de virkelige Rum aA , DE , (Taf. IV. Fig. 12.) og de dem proportionerte endelige Hastigheder. Saa det er paa denne Maade, at man maa forstaae, hvad vi have i Kræfternes Ligevægt sagt om Bevægelse og Hastighed.

§. 118.

En Stang, som ACB , kalder man ellers en Vægt. Hvad en Vægtstang er, og at Tyngderne holder sig, naar de ere som Vægtstangs-Armene forkeert tagne. Distancerne fra Hvile-Punktet C , som AC og CE , kalder man Vægt-Stangs-Armene, og i Henseende til disse nye Benævninger giver man Regeln §. 114, endnu paa en anden Maade, skjønt alt kommer ud paa et med det forrige.

Alt nemlig, Tyngder staae over en Vægtstang udi Ligevægt, dersom de udi Vægt ere de til dem svarende Vægt-Stangs-Armers Længder proportionerte.

§. 119.

Vi ville her ikke videre indlade os i de Betragtninger I hele Systemet af afskilte Legemer undersøge over Ligevægten, som høre til Statik, og som vi i det følgende de

tiden, og i hele de skulde foretage, da vi her have anført saa meget af Bægt-sammenhengende Legemer, som Stangens Egenskaber, som vi i Mekanik nødvendig bruge. i hule Ringe. Men Et kunde vi ikke undlade at erindre, at da vi tilforn have eller Kugler, o. s. v. talst om Tyngdens Center, have vi alene betragtet det Tilfælde, da det falder inden i det Materielle selv; man maa desuden agte, at der gives andre, da i et System af flere sammenhengende Legemer, og undertiden i et eneste, Tyngdens Center falder uden for Materien i den frie Luft, saa at sige. Som om (Taf. V. Fig. 4.) AD er en Ring, hvis Materie er indsluttet imellem Cirklerne AD og BE; men inden for BE er den hult; da, om denne Ring er overalt af ensdan Materie, er der ingen Tvivl paa, at jo Tyngdens Center falder i C, og folgelig i det Ledige.

§. 120.

Hvorledes deslige hule Ting kunde understøttes.

Man understøtter et saadant Legeme, dersom Tyngdens Center C, og den fra det faldende Vertikal-Linie CF falder i F perpendicular over FG, som man haver sat til Fod-Stykke, for at understøtte AD.

§. 121.

Andre Tilfælde, i hvilke Tyngdens Center falder uden for det Materielle.

Men for at komme paa andre og i Mekanik vigtigere Tilfælde af dette Slags, ville vi (L.V. §. 5.) betragte to Tyngder A og B, hvis Tyngders Centrer A og B hvile paa Enderne af en Stang AB, hvilken vi her betragte som ubøielig stiv, men at være uden Tyngde. Da Stangen er, efter Hypotesen, uden Tyngde, saa er det klart, at Tyngdens fælles Center for A

og

og B hverken kan falde over A, eller over B, men paa et Sted C i den Linie AB, som sammenføier de enkelte Tyngders Center, og som findes af §. 118.

Meget meer maa Tyngdens Center falde i det Løbige, og ei paa det Materielle af Systemet, om, som i Fig. 6. Taf. V. Legemer henge over Stænger uden Tyngde, (Skiont her kunde de og være med Tyngde) AC, CB og AB, som forene A, B, C; thi ere de enkelte Tyngdens Centre Punkterne A, B, C, da faae A og B deres fælles Tyngdes Center et Sted i D. §. 118. D og C deres ligeledes et Sted i Linien DC udi E, hvilket Punkt saaledes bliver det fælles Tyngdens Center for alle tre Legemerne A, B og C. Og man seer uden Noie, at det falder uden for alt det Materielle af Systemet, fordi den hele Linie DF falder uden for det.

§. 122.

Vi skulle strax vise, hvorledes de fælles Tyngdernes ^{hvorfor Vægt-} Centre kunde findes, alene, at jeg i Forveien faaer gjort et ^{stængerne be-} Par Anmerkninger. Den ene er, at man betragter Vægt- ^{trages som} Stængerne, og Stængerne som AB, (Taf. V. Fig. 5.) som ^{umaterielle, og} uden Tyngde. Dette gior man alene, for ikke at giøre ^{at det kommer} Hø- ^{paa et ud, hvad} ved-Reglerne, som der egentlig spørges om, af vanskelige ^{eller at de i Vi-} Betragtning. Virkelig; at betragte Tyngden af Stængen, ^{gevægt staaende} var og i sig unyttigt, thi den er accidentel og hører ei til ^{Tyngder ligge} Spørsmaalet. ^{umiddelbar paa} ^{Vægtstængen,} ^{eller om de hen-} ^{ge i længere eller} ^{forterre Linier.}

I det følgende skalde vi i Machin-Væsenet tage denne Tyngde i Betragtning, thi der er Stedet. Her ville vi ale-

ne agte, at i et Tilfælde kan en tung Stang ansees, som om den var uden Tyngde; i den, da dens Tyngdes Center D er tillige dens Hvile-Punkt. Thi da forvirrer Armenes Tyngde ikke Virkningen af Tyngderne A og B (Taf. V. Fig. 5.) omendskiont at, naar Tyngdernes sælles Center C falder uden for Stangens Tyngdes Center D.

Det andet er, at det kommer paa et ud, hvad heller Tyngderne A og B ere umiddelbar stødte ind paa Stangen AB, og Distancerne til Hvile-Punktet regnes fra deres Tyngders enkelte Centrer A og B. (thi disse maa nødvendig ligge paa Linien AB, i hvilken Hvile-Punktet er) eller om Tyngderne a og b ($= A$ og B) henge i Linier uden Tyngde udi A og B, som gaaer fra Tyngdens Centrer A og B.

Her kan ydermere agtes, at i dette sidste Tilfælde kommer det paa et ud, hvad heller Linierne Aa og Bb ere lange eller korte. Tyngden i a og b bliver derved hverken større eller mindre, thi, som før er bleven sagt §. 43, endskiont Tyngden efter den strenge og meget noie Theorie vojer bestandig ned ad imod Jorden, saa ere dog de Distancer, paa hvilke vi kunde henge Tyngder, saa korte, at paa dem Forskiellen er virkelig intet.

Efter at have gjort disse Anmerkninger, ville vi bestemme det sælles Tyngdes Center udforligere.

§. 123.

At finde Tyngdens sælles Center for to Legemer.

Da Tyngdens Center er det Punkt, i hvilket, naar bærende eller holdende Kraft, som er stærk nok, staaer Tyng-

Tyngden imod, denne sidste da hviler, uden at Bægten af det, som er paa den ene Side, kan overveie hoed. der er af tung Materie paa den anden Side, saa findes altid det fælles Tyngdens Center af to givne sammenhengende Tyngder A og B, ved at søge (Taf. V. Fig. 5.) et Punkt C i Linien AB, fra hvilket af at regne Distancerne AC og CB ere i forkeert Forhold af Tyngderne B og A, §. 118.

Kaldes den hele Linie AB, a , Distancen AC, x , saa er $CB = a - x$ og $A : a - x = B : x$, §. 118, og $CA = x = \frac{aB}{B+A}$, Saa for at finde det fælles Tyngdens Centers Afstand eller Distance fra en af Tyngderne, haver man alene nodig at multiplicere den anden af Tyngdernes Bægt med Tyngdernes Distance, og at dividere det Udkommende med Summen af begge Tyngders Bægt.

§. 124.

Deraf sees ligeledes, hvorledes det Tilfælde af 3 Lege- Ligeledes for tre og flere, der ikke ligge i ret Linie. mer (Taf. V. Fig. 3.) opløses, thi først søges D, §. 123, siden ligeledes E; da Tyngden i D ansees at være saa stor som $A+B$.

Vi ville ei betragte flere deslige Tilfælde, thi som man arbejder i en, maa man arbejde i alle. Men for Nyttens Skyld i andre Henseende, ville vi derimod foretage det Tilfælde, naar af flere tunge Ting alle de enkelte Tyngders Centrer ligge over en Linie, efter at vi først have gjort et Par andre Anmerkninger.

§. 125.

Hvori en Tyngdes hele relative Kraft bestaaer.

Nemlig, at en tung Tings Styrke i at tynge imod en anden i Ligevegt med den staaende Tyngde, eller Momentum Ponderis, bør dommes af dens Vægt, multiplicert med dens Distance fra Hvile-Punktet. Siden at den Kraft, som A har til at veie imod B (Taf. V. Fig. 5.), er A. AC, og ligeledes den Kraft B har til at veie imod A, er B. BC. §. 123. 118.

§. 126.

Det samme agtes i Henseende til Pressionerne i Almindelighed.

Tages den ene Tyngde A pludselig bort, da blev dog Momentet i B usforandret det samme; saa, naar en Pression B, hvad heller det er en Tyngde, eller ikke, virker lodret paa en Vægtstang (T.VF.7.), hvis Hvile-Punkt er C, maa dens hele Kraft til at drive Stangen, altid dommes af B. BC. Var den samme Kraft udi E, blev dens Kraft, til at drive Vægtstangen, ikke uden B $\times$ EC.

§. 127.

En Pressions hele Kraft i at virke er, som den Virkning, den gjør paa Inertien i et Dødt, multiplicert med denne sidstes enten virkelige eller mulige Hastighed.

Med et Ord, saa tidt som Pressionerne virke paa Vægtstænger, maa man ingenlunde forglemme at multiplicere dem, (eller, hvilket er det samme, de Tyngder, de foraarstager,) med deres vedkommende Vægtstangs-Arme.

Og da disse Vægtstangs-Arme ere i samme Forhold, som Hastighederne af de Inertier, paa hvilke Pressionerne virke. §. 116. Saa maa i Almindelighed Pressionens hele Kraft altid sluttet af Pressionen selv, multiplicert med den Inerties eller det Punkts Hastighed, paa hvilket den virker.

§. 128.

§. 128.

Efter at have gjort disse Anmerkninger, gaae vi til det omtalte Tilfælde §. 124, da vi først agte (Taf. V. Fig. 8.) at saa tidt som flere Tynghder P, P', P'', P''', skulde holde Ligevægt under sig paa begge Sider af Hvile-Punktet A, over en Stang uden Tynghde, der holdes i B, da maa Momenta af Tynghderne paa begge Sider være lige store $P \cdot PA + P' \cdot P'A = P'' \cdot P''A + P''' \cdot P'''A$.

For at bevise dette, ville vi alene betragte tre Tynghder (Taf. V. Fig. 7.) for ikke at gjøre Beviset unødigt vidtloftig, da alle andre Tilfælde kunne bevises paa samme Maade.

§ Beviset kommer alt alene derpaa an, at man i Steden for de enkelte Tynghder E og B betragter dem som samlede i deres Tynghdes fælles Center D. Thi saa er ingen Tvivl paa, at jo $A \cdot AC = (E + B) \cdot DC$. §. 114. Alt kommer da an paa at kunde bevise, at $(E + B) \cdot DC = E \cdot EC + B \cdot BC$.

For at bevise dette, maa det fælles Tynghdes Center D imellem E og B først findes, som §. 123 er $\frac{E \cdot EB}{E + B} = BD$. Følgelig bliver $DC = BC - \frac{E \cdot EB}{E + B} = \frac{E \cdot (BC - EB) + B \cdot BC}{E + B}$, og videre $(E + B) \cdot DC = E \cdot EC + B \cdot BC$. Følgelig kommer det paa et ud, om begge Tynghderne E og B henge hver for sig til adskillige Distancer, fra Hvile-Punktet C, eller om de i deres fælles Tynghdes Center udgiøre en eneste samlet Tynghde.

§. 129.

At bestemme
det fælles Tyng-
dens Center for
flere Legemer,
hvis enkelte
Tyngdens Cen-
trer ligge over en
og den samme
rette Linie.

Man seer deraf let, hvorledes Tyngdens fælles Center, eller Hvile-Punktet, findes til flere Tyngder P, P', P'', P'''; som henge over en og den samme ubøielige Linie uden Tyngde, Taf. V. Fig. 8.

Thi kaldes den hele Linie PP''', a , og Tyngdens Center antages at være udi A. $PA = x$, $PP' = b$. $P''P''' = c$. Da, naar alle Distancerne regnes fra Tyngdens enkelte Centrer i P. P'. P''. P''', bliver §. 128.

$$\begin{aligned} P \cdot x + P' \cdot (x - b) &= P'' \cdot (a - x - c) + P''' \cdot (a - x) \\ Px + P'x - P'b &= P''a - P''x - P''c + P'''a - P'''x \\ \hline P'b + P''a - P''c + P'''a \\ x &= \frac{P + P' + P'' + P'''}{P + P' + P'' + P'''} \\ &= \frac{P' \cdot b + P'' \cdot (a - c) + P''' \cdot a}{P + P' + P'' + P'''} \end{aligned}$$

Saa man har alene nødig, for at finde det fælles Tyngdes Centers Afstand eller Distance fra den ene af Tyngderne, at multiplicere alle de andre Tyngder med deres Distancer fra samme Tyngde, og at dividere det Udkommende med Summen af samtlig Tyngderne.

§. 130.

Hvorledes Kræf-
ternes Overvægt
bør bestemmes.

Derfor flere Tyngder ere som før fæstede over en og den samme Linie, som P, P', P'', P''', (Taf. V. Fig. 8.) og en Styrke i B holder Linien efter BA, eller om Stangen eller Linien

Linien hænges op i B og bæres af BA: da om P, P', ei ere i Ligevægt med P'', P''', er det klart, at deres Overvægt maa være $P \cdot PA + P \cdot P'A - P'' \cdot P''A - P''' \cdot P'''A$, siden disse Tyngder, om de skulle komme til at staae i Ligevægt omkring A, maatte i P'', og i P''', formeres med Tillsæg til Tyngden, saa længe, til Momenta paa begge Sider bleve lige store. §. 128.

§. 131.

Man kan til Slutning agte, at Tyngdens Center for: Den mindste andres overmaade let, (Taf. V. Fig. 7.) ei alene, om noget Tyngderne over legges til eller tages fra Tyngderne A, E, B, men end og, om en Vægtstang en af dem det allermindste forrykkes, thi da forkortes eller at det falles Tyngdens Cen: forlænges Vægt-Stangen, og Udregningen, som man let seer, ter forandres. bliver for Tyngdens Center strax en anden.

Fjerde Tillæg.

I.

Om de med en given Hastighed stigende
Tyngder.

§. 54.

Derfor (Taf. V. Fig. 9.) fra et Punkt B af en Tyngde stiger op Bestemmelse efter BA, med en vis given og bestemt Hastighed, og B_a af Hastigheden i et hvert Punkt = x. Den i Begyndelsen eller i B givne Hastighed = c, den af den Linie, udi udi

hvilken en Tøngde med en vis given Hastighed stiger.

udi d derimod, som søges $= v$. Da bliver, fordi Direktio-
nen af Hastigheden gaar tværtimod den naturlige Drift af Tøngden,
eller fordi x vorer, alt som v tager af, i Følge §. 9. — vdv
 $= gdx$, og $-vv = 2gx + C$, hvoraf Hastigheden umiddelbar
kan findes i alle Punkter af x , alene at C først bestemmes. Hvilket let
skeer ved at agte, at naar $x = 0$ er $v = c$. Og altsaa $vv = cc$,
saa at $cc - vv = 2gx$ og $v = \sqrt{cc - 2gx}$.

§. 55.

Sættes derfor $vv = cc - 2gx$, og a er den Høide, som
svarer til Hastigheden c , V derimod er den Høide, som svarer til
Hastigheden v . Da bliver §. 17 $V = a - x$. Thi $\sqrt{2gx}$ er Ha-
stigheden, som vindes igiennem x . §. 10. 12. Følgelig bliver Qua-
draten af Hastigheden $2gx$, og altsaa proportionert x . §. 17. Der-
af sees

1) At om $x = a$. Bliver $V = 0$. Saa en Tøngde ei kan
stige høiere, end den er falden, før den taber sin hele Hastighed.

2) At om den stigende Tøngde vandt sin Hastighed ved at falde
igiennem en Høide AB , og steeg siden igjen fra B af op efter samme
eller en anden ligesaadan Høide med den Hastighed, den havde vun-
det ved Faldet igiennem AB . Da maatte den i lige høie Punkter i
begge Tilfælde altid bevæges med lige Hastighed. Thi Høiden V ,
som svarer i det ubestemte Punkt d til Hastigheden, er overalt $a - x$
 $= AC$.

§. 56.

Man finder ligeledes alt, hvad der angaaer Tiden af Bevægelsen. Thi da $\frac{dx}{v} = dt$ og $v = \sqrt{2g \cdot \sqrt{a-x}}$, saa $\frac{dx}{\sqrt{2g \cdot \sqrt{a-x}}} = dt$ og $t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{a-x})$, naar nemlig Integralen gieres fuldstændig; saa seer man let, at alt det herhid hørende er ikke andet end en simpel Følge af hvad vi forhen have sagt i Tillægget til den anden Forelæsning.

2.

Om Tyngdens Center.

§. 57.

Derfor L. V. §. 7. N. 2. saa mange Tyngder, som man vil, henge over en Grund-Reglen, Linie, der er bevægelig omkring sin ene Ende: §. E. om Tyngderne P. P'. ^{for at bestemme Tyngdens Center, bevises.} P''. P''' tyngde alle paa den Linie AP''', hvilken vi vilde ansee som bevægelig omkring det Punkt A, og man vilde finde et Punkt Q i Linien AP''', i hvilket, naar en Kraft P'''' holdt inod, der havde samme Styrke, som alle disse Tyngder, og hvilken derfor maatte være saa stor, som deres hele Sum; Kraften og Tyngderne da skulde staae udi Ligevægt sammen.

Da siden disse Kræfter, i Følge Hypotesen, skulde staae i Ligevægt sammen, maa nødvendig, §. 101. 128.

$$\frac{[P.PA + P'.P'A + P''.P.A + P'''.P''A + + = P'''.QA]}{P.PA + P'.P'A + P''.P''A + P'''.P'''A + +} = QA$$

$$\text{thi } P'''' = \frac{P + P' + P'' + P''' + +}{3} \quad \text{§. 101.} \quad \text{Det}$$

Det er: samtlig Tyngderne skal multipliceres med deres Distancer fra det Punkt, om hvilke de kunne bevæge sig i Vinkel-Bevægelse. Det Udkommende skal divideres med Summen af alle Tyngderne, saa faaes det søgte Punkt Q. Man seer let, at dette Punkt er Tyngdens Center, siden Momentet af samtlig Tyngderne under et eller i en Sum tagne, giere i det selsamme Virkning, som alle de enkelte Tyngder hver for sig, multiplicerte med deres respective Distancer fra A, hvilket er just det, som er blevet beviist, at være en Egenskab af det sølles Tyngdernes Center. §. 129. Førel.

§. 58.

Reglen §. 57 anvendes, og først i Linier af ensdan Tyngde overalt.

For at vise i de simpleste Exempler, hvorledes ved Hielp af denne Regel Tyngdens Center kan findes, ville vi først undersøge, hvor dette Punkt ligger i de rette Linier.

Saaledes, (Taf. V. Fig. 9.) om AB er en ret Linie ophængt udi A, hvis alle Punkter ere lige tunge, da er cd en af disse smaa Tyngder. Sættes den hele Linie $AB=a$, $Ad=x$, da er $cd=dx$. Summen af alle de smaa Tyngder multiplicerte med deres Distancer fra A $= \int x dx$. Summen af dem alle derimod er $\int dx$. Følgelig er $\int x dx : \int dx$, eller $\frac{x}{2} x^2 : x = \frac{x}{2}$ den søgte Størrelse.

Er $x=a$, bliver alt $= \frac{a}{2}$, saa derfor Tyngdens Center falder midt i den rette Linie. Man seer, at ingen bestandig Størrelse her legges til; thi naar $x=0$, er Integralet 0, som det bør være.

§. 59.

Derfor samtlig Punkterne i den rette Linie AB sættes at have ensdan Tyngde, som ei er ensdan, men for Ex. er proportionert Distancen

een

een fra det Punkt A, da om denne sidste som før kaldes x ; cd , dx ; overalt Distan-
 og $AB=a$. Saa bliver for det søgte Punkt $\frac{\int x x dx}{\int x dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$, een fra det Punkt, hvort Linien er op-
 hængt, forkeert
 Wiis proportio-
 nert.
 og for den hele Linie $\frac{2}{3}a$; uden at legge noget til Integralen, fordi
 naar x er $= 0$, er den og $= 0$, som den her være.

§. 60.

Saafermt derimod, at samtlige Punkterne i Linien sættes at være Egeledes, om Tyngden er som
 i Tyngde som Distancen forkeert fra A, og $Ad=x$ som før. Da Distancen for-
 keert.
 bliver, om Tyngden i den Distance a fra A $= p$, i Almindelighed

det søgte Punkts Distance fra A $= \frac{\int ap dx}{\int (ap dx) : x}$, hvoraf er Integra-
 len $\frac{apx}{ap L, x}$. For den hele Linie derfor er det søgte Punkt $= \frac{a}{\text{Log. } a}$.

§. 61.

Egeledes findes Tyngdens Center overmaade let udi Figureerne, Det samme i alle de Figurer, som kunne op-
 læses i lutter uen-
 delig smaa Pa-
 rallelogrammer, hvis Tyngders
 Center ligge als-
 le i en ret Linie.
 saa tidt som de kunde opleses ved deres Ordinater i lutter uendelig smaa
 Parallelogrammer, af hvilke alle Tyngdernes enkelte Center ligge
 udi en og den samme Arel. Thi i dette Tilfælde er den hele Figur
 ikke at ansee for andet end en tung Linie.

Er (Taf. V. Fig. 18.) ACD et Triangel; da er,
 som strax sees, Tyngdens Center i den Linie AB, der deler alle
 Linier som Km, hvilke ere ligelebende med Grund-Linien CD udi to
 lige store Dele. Men da disse sidste ikke ere lodrette eller perpendiku-
 lære paa AB. Kastes da Perpendiklen AE ned, som altid er given, for-
 di Trianglets ACD Sider og Vinkler ere givne og AE kaldes p ,
 3 2 AB_a,

AB, a ; CD, b ; Ag, x , da er AB : CD = Ag : Km eller
 $a : b = x : \frac{bx}{a} = Km$ og AB : AE = Ag : Af eller $a : p = x : \frac{px}{a}$
 $= Af$. Følgelig er $fh = \frac{pdx}{a}$ og $fh \cdot Km$, eller den elementære
 Tyngde $Kmni = \frac{bx}{a} \frac{pdx}{a}$, som multiplicert med Bægtstangen gA ,
 §. 127, giver det hele Moment af Tyngden, hvilket derfor bliver for
 et hvert Element $\frac{bpx^2 dx}{a^2}$. Men Summen af samtlige de smaa Tyngde
 der er $\int \frac{bpx dx}{aa}$. Derfor bliver i det søgte Punkt $\int \frac{bpx^2 dx}{a^2} : \int \frac{bpx dx}{aa}$
 $= \frac{\frac{1}{3}bpx^3 : a^2}{\frac{1}{2}bpx^2 : a^2} = \frac{2}{3}x$. Som for det hele Triangel er $\frac{2}{3}a$, thi da er
 $x = a$.

§. 62.

Det samme
 vises i Parabo-
 lerne.

Paa samme Maade findes Tyngdens Center i alle krumme Linier
 med lige Arme, eller som i Almindelighed have en Arel. (Taf. VI.
 Fig. 1 og 2.) Vi ville derpaa ikke anføre uden et Exempel, da heri
 ingen synderlig Banffelighed findes.

Er Fig. 1. CAF en Parabel, som henger i det Punkt A.
 AB dens Arel. Er AE = x , CE = y , Parametern = p , bli-
 ver $px = y^2$ i denne krumme Linie. Videre er $gf = y = \sqrt{px}$
 og $cefd = 2\sqrt{px} dx$. Følgelig Momentet af et hvert Element
 $= 2dx \cdot \sqrt{px^3}$. Derfor bliver $\frac{2\sqrt{p} \int dx \cdot x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p} \int dx \cdot x^{\frac{1}{2}}}$, det søgte Punkts Di-
 stance fra A = $\frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x$; og for det hele Stykke af Parabelen,
 naar AB = a , er den = $\frac{3}{5}a$. Er

Er Parabolen ei given efter sin Arel, men efter sin Diameter; da er det klart, at Tyngdens Center er i Diametern, saa at alt er endnu som før; om ved p forstaaes Parameter til Diametern, som man veed af den koniske Geometrie er adskillig om en bestandig Størrelse, der heroer paa Abscissen, fra Axlens Parameter. Ligeledes i andre krumme Linier, saa tidt som alle de smaa Tyngder deres Tyngdes Centreer ligge i en og den samme Linie, findes dette Center ved en eneste Udregning, saaledes som i Exemplet er blevet beviist.

§. 63.

Men dermed ere vi langt fra ikke ferdige med Parabolen; der spørges videre om at finde Tyngdens Center i den ydere Parabol, ter bestemmes i den ydere Parabol, be- den ydere Parabol i et Tilfælde. staaende af de to Stykker HAC og IAF, (Taf. VI. Fig. 1.) hen-

førte til Axlens HI. Ligge begge Delene sammen om en fælles Arel, som i Taf. VI. Fig. 2, da er Oplesningen let, thi den lader sig umiddelbar finde efter §. 57. Fordi i den ydere Parabol AB, Semiordinat og Abscisse ere net op forvekslede med de i den innere; Cd med hB, dB med Ch, saa Ligheden bliver til alle Punkter udi ABC, $ay = x^2$. Derfor $df = \frac{ady}{2\sqrt{ay}}$, og det dobbelte Element CdfE $= \sqrt{ay} \cdot dy$, som multiplicert med sin Begistang $dB = x = \sqrt{ay}$, giver det hele Moment $= ay \cdot dy$, hvoraf Summen er $\frac{1}{2}ay^2 = \frac{x^4}{2a}$

Derimod er Summen af alle de smaa Tyngder $= \int \sqrt{ay} \cdot dy = \frac{2\sqrt{a}}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{a}}{3} \cdot \frac{x^3}{a\sqrt{a}} = \frac{2}{3} \frac{x^3}{a}$. Naar man hermed dividerer $\frac{x^4}{2a}$, faaes $\frac{3}{4}x$. Da for det hele Stykke ydere Parabol BAD, $BC = b$; bliver Tyngdens Centers Distance fra B, $BE = \frac{3}{4}b$.

Saa man seer, det er overmaade let at finde dette Tynghdens Center, naar man stiller paa før sagte Maade den ydere Parabols Dele fra den innere, saaledes at begge legges omkring en og den samme Arel.

§. 64.

Endnu i et andet og vanskeligere.

Men, om alt er, som Taf. VI. Fig. 3. at AEF og AGH ligge paa hver sin Side af den innere Parabol, da siden EFHG er et Parallelogram, hvis Tynghdes Center falder udi Midten B af Areln AK, saa beroer det hele Spørsmaal paa følgende: Naar Tynghdens Center er givet af den hele saavel ydere som innere Parabol udi B, saa $AB = \frac{1}{2}a$, (thi vi kalde AK, a .) og desuden af det ene Stykke, den innere Parabol nemlig, saa $AC = \frac{2}{3}a$ §. 62. da at finde Tynghdens Center af de ydere Paraboler EFA og AGH.

Antager man dette Center at være udi D, da maa man betragte de 2 Tynghder D og B, som anlagte paa Vægt-Stangen KA, saaledes, at den hele Tynghde udi B, naar den virkede efter imodsat Drive-Linie eller Direktion, maatte staae i Ligevægt med D og C og selvsigelig D. $DA + C.CA = B.BA$. §. 128. Førel.

Før at forstaae dette desto bedre, maa man erindre sig af den koniske Geometrie, at af Parallelogrammet GEFH er den innere Parabol $\frac{2}{3}$ og den ydere $\frac{1}{3}$; saa at, om Parallelogrammet EFHG kaldes c , forholder sig den innere Parabol til den ydere $= \frac{2}{3}c : \frac{1}{3}c = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$.

Dette forudsat; kaldes da AD, x , saa bliver $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{1}{2}a$, derfor $x = \frac{2}{10}a = AD$, som er det søgte Punkts D Distance fra A.

§. 65.

Man kan paa samme Maade i andre Tilfælde bestemme Tyngdens Center; saa tidt som nemlig de enkelte Tyngders Centrer ere givne, kan af dem det fælles Center eller det, som svarer til det Hele, findes. Er dette sidste og en af Delenes givne, da det andet af Delenes. Saaledes, om Tyngden af det Hele udi B er i Almindelighed B, af den ene Deel udi D, D, af den anden udi C, C, og Distancerne DA og CA ere givne, da findes let BA eller det Punkt B, som er det heles Tyngdes Center. Thi kaldes BA, x , da bliver B. $x = D \cdot DA + C \cdot CA$ og $x = \frac{D \cdot DA + C \cdot CA}{B}$.

Ligeledes om Taf. VI. Fig. 6. til det paraboliske Stykke ABC, hvis Vægt er K, Tyngdens Centers Distance fra B, KB nemlig var given, tilligemed HB, naar i H var den hele Parabols Tyngdes Center, hvis Vægt vi ville sætte $= H$. Da findes strax det Punkt I, som var Tyngdens Center i Stykket ACED. Thi kaldes dets Vægt I. og IB $= x$, da er I. $x + K \cdot KB = H \cdot HB$ og $x = \frac{H \cdot HB - K \cdot KB}{I}$.

§. 66.

Saafermt at alle de omtalte smaa Tyngdens Centrer ikke ligge i en Linie, men dog i det samme Plan, eller og om den Linie, udi hvilken disse Centrer ligge, er ikke strax bekiendt, maa man bruge to eller tre Udregninger, for at bestemme Tyngdens Center, nemlig ved at udregne dette Punkts Afstand fra to Linier tagne i samme Plan, efter som det i den givne Tilfælde kan synes mest beqvem.

Vi ville opløse denne Maade at arbejde paa med et Exempel, og til den Ende ville vi igien betragte Trianglet BDE (Taf. VI. Fig. 4.)

soms

som sæt i B og henført til den Linie ABC, parallel med Basis DE. Kaster man Perpendiklen BF ned, og betragter de smaa Tynghder $bcdx$, som at henge over ABC; da om BF kaldes a , og DE, b , bliver bf parallel DE $= \frac{bx}{a}$, om Bb $= x$. $be = \frac{bdx}{a}$ og $bcdx = (a-x) \cdot \frac{bdx}{a}$.

Da Tynghdens Center i dette Parallelogram falder i Midten, saa bliver dets Tynghdes Centers Distance fra Aflen ABC $= \frac{a+x}{2}$, og sølgelig bliver den hele Styrke af $bcdx$ til at tynge paa Aflen AG $= (a-x) \cdot \frac{(a+x)}{2} \cdot \frac{bdx}{a}$, og derfor er det søgte Punkts Distance fra

$$ABC = \frac{\int \frac{b}{2a} (a^2 - x^2) dx}{\int \frac{bdx}{a-x} \cdot \frac{bdx}{a}} = \frac{\frac{a^2}{2a} bx - \frac{bx^3}{6a}}{bx - \frac{b}{2a} xx} = \frac{a^2 - \frac{1}{3}x^2}{2a-x}.$$

Da b saaledes gaaer ud af sig selv af Regningen, er deraf at slutte, at Bredden af Basis i Trianglet gjør intet til Sagen. Og for det hele Triangel, naar $x=a$ er Tynghdens Centers Distance fra ABC $= \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}BF$. Saa om man i k , hvor $Fk = \frac{1}{3}BF$, treffer en Linie RkM parallel ABC, da er et Sted i samme Tynghdens Center af Trianglet.

Gjør man paa selsamme Maade Udregningen for Trianglet, henført og betragtet i Henseende til GEH, som antages for desto større Bequemheds Skyld at være parallel med Grund-Linien i Trianglet DB; da findes, om Perpendiklen EK ligeledes kastes ned, at Trianglets Tynghdes Centers Distance fra GEH bliver, som før, $\frac{2}{3}EK = OE$. Trekkes da igiennem o en Linie poq parallel DB; hvor den i n overskier den forrige RM, der er Tynghdens Center i Trianglet. Thi dette Punkt er altid der, hvor to af Tynghdens Diametre overskier hinanden.

§. 67.

Denne Maade er, som man seer, almindelig for alle Figurer, ^{Maade, at be-}
 saa den ikke behøver videre Anmerkninger end at gjøre Regningen efter ^{stemme Tyng-}
 forrige Plan, indrettet som et hvert forekommende Tilfælde det udfor- ^{dens Center i}
 drer. ^{krumme Linier}
 Man seer tillige, hvorledes Centret af Tyngden kan findes i
 de krumme Linier, som have ulige Arme eller i de Figurer, som ere
 sammensatte af uligedanne Stykker af krumme Linier. Man haver
 alene nødig efter §. 65. at søge Taf. VI. Fig. 5. Tyngdens Center G
 i den givne Figur ABE, og ligeledes samme Center F i Figuren A
 CD, og siden søge et Punkt H, fra hvilket af Distancerne FH og
 HG ere i forkeert Forhold af Tyngderne udi F og G, saa er H det
 søgte Tyngdens Center. §. 65. Till. og 114. Forel.

Og man seer deraf endnu meer, hvorledes denne Maade kan
 anvendes til en hver sammensat Figur, bestaaende af saa mange des-
 lige adskillige Dele, som man vil.

§. 68.

Man skønner let, at det ikke altid behøves at søge Tyngdens Center ^{Naar man ei}
 ved 2 Arter. Ofte er det strax bekiendt, i hvad Linie Tyngdens ^{behøver at gjøre}
 Center maa falde, og saa tidt det er, behøves ikke at henseere Figu- ^{Udregningen}
 ren uden til en Arel. ^{for Figurene}
 Saaledes, om man Taf. VI. Fig. 3. vil paa ^{uden efter en}
 denne Maade søge Tyngdens Center til den ydere Parabol, henseert til
 de to perpendicularære Arter EG og AK, som de bequemmeste Linier;
 da seer man strax, at i Henseende til Arten AK, falder Tyngdens
 Center i den selv, thi AEF er ligedan og lige stor med AHG.
 Altsaa behøves alene at finde, hvor langt hen over AK at AD fal-
 der; alt efter Metboden §. 65.

Til den Ende er, efter det forhen sagte §. 53, $ay = x^2$,
 om $cd = y$, $AC = x$, $bc = dx = \frac{ady}{2\sqrt{ay}}$. Videre $bc \cdot ab$
 $= \frac{aydy}{2\sqrt{ay}} = \frac{V^a}{2} y^{\frac{1}{2}} dy$. og $badc \cdot \frac{1}{2} ab = \frac{V^a}{4} \cdot y^{\frac{3}{2}} dy$. Hvoraf Sum-
 men er $\frac{2V^a}{4 \cdot 5} y^{\frac{5}{2}} = \frac{V^a}{10} \cdot y^{\frac{5}{2}}$. Hvilket skal divideres med Summen
 af $bcda$.

Da samme nu er, efter det nylig sagte $\int \frac{V^a}{2} y dy = \frac{V^a}{2} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{V^a}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}}$. Saa bliver $\frac{V^a}{10} y^{\frac{5}{2}} : \frac{V^a}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{10} y$; som er Distan-
 cen fra Arlen EG, og da Tyngdens Center er i AK, saa bliver Di-
 stancen $AD = \frac{3}{10} AK = \frac{3}{10} a$; ligesom vi paa en anden Maade ser
 have fundet den §. 64.

§. 69.

Maade, at be-
 stemme Tyng-
 dens Center i de
 afbrudte Figu-
 rer.

Man seer og, at denne samme Maade, at finde Tyngdens Cen-
 ter paa, strekker sig til de afbrudte Figurer: man kan alene agte (Fig.
 6. Taf. VI.) at dersom de krumme Linier, og det af dem indsluttede
 Rum, ere af den Besskaffenhed, at de have en Arel, der gaaer igien-
 nem alle de smaa Tyngders Centre, og det afbøgne Stykke ABC
 gaaer efter Lebet af Ordinaten AC; da, naar man anseer den hele
 Figur, som henført til et Plan parallel Ordinaten, og hestet til sam-
 me i det Punkt B, som er Spitsen af Arlen, da kan i alt Udregnin-
 gen gøres som før §. 62, nemlig for den hele Figur; alene at man
 legger den bestandige Sterrelse til Integralen, som gier Forskiellen
 imellem den forrige Tilfælde og denne.

For

For at oplyse dette, som i sig selv er let, med et Exempel, kan agtes, at efter §. 62 blev fundet for Parabolen $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}$ og $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Sættes nu, at det afbrudte Stykke er ABC, dets Høide efter Arlen b ; da her, naar $x = b$, Integralen være $= 0$. Følgelig bliver for det Stykke CEDA Integralen $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}b^{\frac{5}{2}}$, for det første Stykke, eller for Tælleren, og for det andet eller Nævneren $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$. Saa for det affortede ubestemte paraboliske Stykke DACE bliver det søgte Punkts Distance fra B, $\frac{\frac{2}{3}(x^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}})}{(x^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})}$, og om $x = a = Bg$, da for

det hele Paraboliske Stykke DACE som bestemte, $\frac{\frac{2}{3}(a^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}})}{(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})}$.

Saa vel i dette, som i andre Tilfælde, seer man let, at man kunde have fundet Tyngdens Center efter det forhen sagte §. 65, eller og at man kunde have søgt Tyngdens Center H til den hele Figur BCED for sig. Til disse Centrer H og K kunde man videre have søgt et Punkt I, saaledes, at Tyngderne udi I og K vare i forkeert Forhold af IH og HK. Derved blev Tyngdens Center i DACE, fundet efter §. 114. Forel.

§. 70.

Saa tidt som man behøver at finde Tyngdens Center i Buerne, Tyngdens Center bestemmes i som i ABC (Fig. 8. Taf. VI.). Eller i Almindelighed af Perime- Cirkel: Buerne. tern eller Omkredsen af Figurerne, da kan det altid skee paa en af de foromtalte Maader. For Ex. Er ABC en Cirkel: Bue, hvis Cen-

ter er D. DC Halv-Diametern, BE den forkeerte, EC den rette Sinus. Da, om $Bg = x$, $hg = dx$, $BD = a$, bliver Elementet af Buen $= \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ansees Figuren, som hængt an i B efter en Arel parallel Lobet af fg eller AC; og BD skier Bue i to lige store Dele, da er Tyngdens Center udi BD, selgelig er man her i den letteste af de foranferte Tilfælde, da samtlig de smaa Tyngder beløbe $2 \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, og deres hele Styrke i at tyngte imod det Punkt B, eller deres hele Moment beleber $2 \int \frac{axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, hvorfor og det segte Tyngdens Centers Afstand fra B beleber til

$$\frac{-a \int \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} - \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}}{\text{Buen Bf.}} = \frac{a. B. Bf. - a\sqrt{2ax - xx}}{B. Bf.}$$

$$= \frac{a. \text{Buen} fB. a\sqrt{2ax - x^2}}{\text{Buen Bf.}}; \text{ men } \sqrt{2ax - x^2} \text{ er den halve Streng}$$

eller Chorda fg , saa at selgelig, om for den hele Bue i Steden for x sættes b , bliver $fB = AB$ og fg forandres til AE. Hvoraf følger, at den givne Bue forholder sig til Diametern, som den givne Bue, formindsket om sin Sinus, til det segte Centers Afstand fra B $= Bh$, om h er det Punkt, i hvilket at Centret af Tyngden skal være.

Vil man heller finde samme Afstand fra D, da er

$$Db = \frac{a. AB - a. AB + a. AE}{AB} = \frac{a. AE}{AB}, \text{ selgelig er den givne Bue til}$$

dens hele Korde, som Halv-Diametern til Db , fuldkommen som før i §. 106. a. Forel. Men da vi i Forelæsningerne udferlig have afhandlet, hvad der angaaer Cirklen, er det nok her at have viist Metboden.

§. 71.

Saafermt Buer gives af andre krumme Linier, hvilke ei skæres midt over af en Linie, paa hvis begge Sider at de som smaa Tyngder betragtede Elementer ere ligedanne, da maa Tyngdens Center søges efter §. 64 eller 65. Men da dette i Henseende til Maaden at arbejde paa, ingen Vanskelighed videre indeholder, saa ville vi derved ei længere opholde os, for at gaae til de materielle og forperlige Ting selv.

I Buene i
Almindelighed.

§. 72.

Maaden at gaae frem paa i Henseende til dem, er den samme, Tyngdens Center som i det forrige. Men i Almindelighed maa de henføres til tre Planer, og Tyngdens Centers Afstand fra alle tre bestemmes; da det Punkt, hvori det sidste Oversnit skæer, er Tyngdens Center. De Vanskeligheder, som falde for efter denne almindelige Maade, undgaaer man i de nyttigste Tilfælde, hvor det nemlig er vigtigst at vide Tyngdens Center. Saaledes seer man strax, at i en Cylinder, hvis Dele ere overalt lige tunge, er Tyngdens Center i Midten af Aksen. I de Legemer, som blive til ved en Figurs Sving om en ubevægelig Arel, er altid Udregningen, som behøves, for at finde Tyngdens Center, overmaade let; fordi i dem Aksen er bekiendt, i hvilken dette Center ligger, saa at derfor Linien, hvori de to Plan overskære hverandre, er bekiendt, og man alene haver nødig at søge Tyngdens Centers Distance fra det tredie. Saaledes findes derfor Tyngdens Center let i Keilen, og i alle de Ting, som man paa denne Maade kan forestille sig at blive til ved en udregnelig Figurs Omveltning. Tyngdens Center findes i den saa let, fordi Aksen af Tyngden forud er bekiendt, paa

ter bestemmes i
Legemerne.

hvilken samtlig Oversnittene, betragtede som smaa Tyngder, antages at tynges. Vi ville opløse begge disse Metoder med et og andet Exempel.

§. 73.

Den Maade
at bestemme
Tyngdens Cen-
ter ved tre Plæ-
ner opløses ved
et Exempel i Pa-
rallelopipe-
der-
ne.

Saaledes kan i de saa kaldte Parallelopipe-
der Tyngdens Center strax bestemmes ved tre Planer.

Er Taf. VI. Fig. 9. *adchgeb* et Parallelopipe-
dum i Almindel-
lighed, hvis Høide paa den forlangte Basis er *ck*; da er Indholden
adcb.ck, eller *ah*, om Indholden af Grund-Fladen *abcd* kaldes *a*,
og Høiden *ck*, *h*. Følgelig; da Tyngdens Center er i de Planer,
som dele Parallelopipe-
dum i to lige store Dele, saa gaae disse Planer
der, hvor Delene af Parallelopipe-
det ere $\frac{ah}{2}$. Hvilket indeholder et
tredobbelt Plan.

Thi $\frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot h$ og $a \cdot \frac{h}{2}$. Det første viser, at det ene af Planer-
ne er Diagonal-Planet *ache*; men da ingen Marsag er, hvorfor meer
Diagonalen *ac* skulde tages, end Diagonalen *bd*, saa er Tyngdens
Center saavel i Diagonal-Planet *ache*, som i *dbgf*, følgelig i Linien
pq, hvor de overskiere hverandre, og man seer let, at *qp* er Midt-
Linien saavel af Parallelopipe-
det, som af disse Parallelogrammer selv,
fordi *q* og *p* ere de Punkter, i hvilke Diagonalerne overskiere hver-
andre.

Men da $\frac{a \cdot h}{2}$ er og $= a \cdot \frac{h}{2}$, saa er det Plan, der gaaer igien-
nem den halve Høide *ck* udi *l*, nemlig *mpon*, det tredie. Dette
Plan (hvoraf den Deel, der er inden i Parallelopipe-
det er *novt*) er
perpen-

perpendikulær paa ck , og parallel Basis $efgh$, thi ck antages at være perpendikulær paa Basis $efhg$. Man seer let, at siden dette sidste Plan deler hele Paralleloppedet i to lige Dele, maa den Linie rCL gaae igiennem Midten af qp . Tyngdens Center er da i Linien qp i det Punkt C. Derfor i alle Paralleloppeder i Almindelighed falder Tyngdens Center i Midten af den Linie, som sammensæier Midt-Punkterne af begge Grund-Fladerne.

§. 74.

Da alle prismatiske Legemer kunne ligeledes gives ved a, b , saa Ligeledes i de prismatiske Legemer. maa den samme Maade at slutte paa og kunde gielde i dem, som i de forrige. Skient de tre Plan, i Henseende til deres Stilning, kunne antages paa flere adskillige Maader, ville vi dog her endnu vise, hvorledes de i det triangulære Prisma kunde betragtes paa samme Maade, som i §. 73.

Saaledes, om (Taf. VI. Fig. 11.) $ABCEF$ er et triangulært Prisma. N et Punkt i samme Plan, som Grund-Fladen CDE . FN Høiden. Trekkes da igiennem Midt-Punkterne o og l , eller Tyngdens Centrer af de triangulære Grund-Flader to Linier, som Ah , Bg i den øverste Grund-Flade og Ci , DK i den underste; saa bliver, naar Parallelogrammerne fuldendiges, $ADKh$ det ene Plan, som deler hele Prisma i 2 lige Dele, og $BgiC$ ligeledes det andet. Det tredie er Planet $HRGp$, som er parallel Grund-Fladen CDE , og gaaer igiennem Midt-Punktet T af Høiden. ol og tv ere de Linier af alle tre Planerne, som overskiere hverandre. Derfor er p Tyngdens Center, som det Punkt, hvori alle Planerne overskiere hverandre. Og $op = \frac{1}{2}ol$.

Der

Dersom man i alle andre prismatiske Legemer finder ligeledes i begge Grund-Fladerne to ligedan trokne Diametre af Tyngden. Da kan man anlegge Planerne, ligeledes som i de nylig anførte Exempler, saa at derfor i Almindelighed følger, at i alle prismatiske Legemer Tyngdens Center er i Midten af den Linie, som sammenføier Midt-Punkterne af begge Grund-Fladerne, eller, hvilket er det samme, disse Fladers Tyngdes Centreer. Imidlertid er dette alene sagt, for at oplyse den Methode, som i Legemerne er den egentligste, den at søge Tyngdens Center ved 3 Plan; thi intet kan være lettere, end strax af §. 99. at slutte, at i alle prismatiske Legemer Tyngdens Center er i Midten af den Linie, som sammenføier Tyngdens Centreer af de to imodsatte Sider, det er, af de parallelle Bases, fordi de enkelte Tyngders Centreer af alle Snittene i Prisma, som gøres parallelle Basis, ligge i denne Linie.

§. 75.

Jeg maa ved den Anledning med et Par Ord tale om Størrelsens Center i Figurerne. Dette Ord defineres sædvanlig ikke for vel; thi forstaaer man derved et Punkt simpel hen, igiennem hvilket at Figuren kan deles i to lige Dele, da findes en Mængde deslige Punkter i de retlinede Figurer. Tager man Størrelsens Center i denne Mening, da sees meget let, som der er blevet sagt i Forelæsningen §. 108. 2. at Tyngdens Center i Trianglet er ikke altid det samme Punkt, som Størrelsens Center. Thi er Trianglet ABC, i E Tyngdens Center, og DEF parallel BGC, da er $ADF:ABC=AE^2:AG^2$, fordi ADF og ABC ere ligedanne Triangler. Det er $ADF:ABC=4:9$, saa at ADF er mindre end den halve Deel af Trianglet.

glet. Vil man derimod T. V. F. 1 6. finde i AG det Punkt I, igiennem hvilket Linien HIK parallel BGC skal dele Trianglet i to lige store Dele, da bliver $AI^2 : AG^2 = 1 : 2$ og $AI = AG : \sqrt{2}$. Man seer fremdeles, at om fra B og C ligeledes bleve trukne Diametre af Tyngden, da fandt man i dem paa samme Maader deslige Punkter som I, men adskillige fra I, igiennem hvilke de Linier, som blive trukne parallel med de vedkommende Bases, deelte Trianglet i to lige store Dele. Selgelig fandtes paa denne Maade ikke et, men flere Størrelsens Centre.

Forstaaer man derimod ved Størrelsens Center, eller Midten af en Figur, det Punkt, fra hvilket alle igiennem det gaaende Linier dele Figuren i lige Dele, saaledes som Diametrene i Cirklen og Ellipsen, da findes et saadant Punkt i Parallelogrammet, hvor nemlig Diametrene overskære hverandre, som let sees. Derimod findes et saadant Punkt ikke i Trianglet og andre retlinede Figurer.

Men forstaaer man ved Midten af Figurerne eller Størrelsens Center det Punkt, fra hvilket af at en Figur kan deles i saa mange lige store Triangler, som den haver Sider. Da passer denne Definition sig ikke paa alle de Figurer, der have i egentlig Mening et Center som paa Cirklen, men dog paa alle de reguliere Figurer, hvis Midte eller Størrelses Center, altid findes i Centret af den Figurerne indskrevne eller omskrevne Cirkel. Tages desuagtet Størrelsens Center i denne sidste Mening, da kan man sige, at Trianglens Tyngdes og Størrelses Centre virkelig ere et og det samme Punkt. Thi trekker man til Tyngdens Center E Linierne BE og EC, da sees strax, at $EG = \frac{1}{3}AG$; kastes Perpendiklerne EL og AM ned, bli-

ver ligeledes Høiden $EL = \frac{1}{2}AM$ og Trianglet $BEC = \frac{1}{2}AM$.
 $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AM$. $BC = \frac{1}{2}ABC$.

Dette Beviis er fuldstændigt, imidlertid kan man, om man vil, overbevise sig desangaaende paa denne Maade. Er Fig. 17. ABC et Triangel, $BD = DC$. i E Tyngdens Center, og derfor $ED = \frac{1}{2}AD$. Trekkes CEG, og DF Parallel AC. Da er $DF = \frac{1}{2}GC$, fordi BFD og BGC ere ligedanne Triangler. Men FED og AEG ere og ligedanne Triangler og derfor $DE : DA = FD : AG$, eller $1 : 2 = \frac{1}{2}GC : AG$, saa $AG = GC$. Da derfor $CG : CA = CD : CB$, bliver og GD parallel AB. Derfor igjen GED og AEB ligedanne Triangler, og $GE : EB = DE : EA$. Selgelig $GE = \frac{1}{2}BG$. Saa man seer, at i Trianglet de tre Diametre af Tyngden AD, BG, CK, overskiere hvoerandre i et og det samme Punkt, nemlig i Tyngdens Center C og at derfor $ABE = BEC = AEC$, thi ethvert af disse Triangler $= \frac{1}{2}ABC$.

Man kan og betragte de retlinede Figurer paa samme Fod som de krumme, ved at kalde de rette Linier deres Diametre, hvilke overskiere i to lige store Dele alle andre, som i Henseende til dem, hele Figuren igiennem, trekkes paa en og den samme Maade. Saaledes som vi Taf. IV. Fig. 9. og i S. 105. Forel. have viist det. Paa denne Maade bliver i Trianglet tre Diametre, som gaae alle igiennem et Punkt efter det nylig beviiste. I alle Parallelogrammer 4, hvilke gaae igiennem Midten af de ovenstaaende Sider eller Vinkler. Man faaer i de reguliere Figurer ligeledes saa mange deslige Diametre, som man haaver Vinkler eller Sider, og de løbe sammen i et Punkt. Kalder man da Figurens Midte det Punkt, hvori disse Linier alle løbe sammen, da bliver Figurernes Midte og deres Tyngdes Center altid det samme.

samme, saa tidt som de bestaae overalt af eensdanne Dele. Denne sidste Bemærkelse af Sterrelsens Center er den mest bequemme, saa tidt som man af Tyngdens Center vil slutte paa Midt-Punktet af Figurerne eller Legemerne, men man maa tillige agte, at det ikke er nok at kalde Sterrelsens Center det Punkt, fra hvilket af Figuren deles i to lige store Dele. Man maa legge til, at i dette Punkt Delningen i lige Dele maa ske af de Linier, der kunne ansees, som Figurerens Diametre, og i det overfliere sig.

§. 76.

Den Vanskelighed, at betragte tre Plan, falder altid bort, saa Tyngdens Center tidt som Oversnittet af de to strax er bekiendt, det er; saa tidt som en ^{ter bestemmes i} Diameter af Tyngden hele Legemet igiennem strax er given. Dette gier Udregningen saa let i alle de Legemer, hvilke man kan bilde sig ind, blive til ved en Figures Omveltning om sin Arel. For Ex. Er ABC (Taf. VII. Fig. 1.) en Keile. Da om Ag, Arel af Keilen $= a$, gB $= b$. Forholden af den halve Diameter til Peripherien $= 1:p$, Af $= x$, fE $= dx$. Saa bliver Ag: gB $= Ae: ed$; eller $a:b = x: \frac{bx}{a} = de$ og Rummet i Cirklen, hvis halve Diameter er $de = \frac{pb^2x^2}{2a^2}$, selgelig bliver det Cylindriske Element af Keilen; hvis Tykkelse er $dx, = \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$. Antages nu Keilen i A at være fastet fast til et Plan, ligeløbende med dens Basis eller Grundflade BC, da blive alle de sinne Tyngder $\int \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$ og deres hele Styrke i at overveie paa den Side af A, bliver $\int \frac{pb^2x^3dx}{2a^2}$, saa det søgte Punkts Distance fra A er

$\int \left(\frac{pb^2 x^3 dx}{2a^2} \right) : \int \frac{pb^2 x^2 dx}{2a^2} = \left(\frac{pb^2 x^4}{2a^2 \cdot 4} \right) : \left(\frac{pb^2 x^3}{2a^2 \cdot 3} \right) = \frac{3}{4}x$. Saa at for den hele Keile, fra Spitsen af at regne, er Tyngdens Centers Distance $= \frac{3}{4}Ag$.

Og ligeledes i den afbrudte.

Saafermt Keilen var afbrudt, saa det Stykke *Adh* manglede, og $AE=c$, alle andre Benævninger ellers giorte, som før. Da, naar $x=c$, maatte Integralen være $=0$. Følgelig fandt man for Tyngdens Centers Distance fra *A* i dette Tilfælde $\frac{\frac{1}{4}(x^4 - c^4)}{\frac{1}{3}(x^3 - c^3)}$; nemlig for den forforkortede Keile. Vil man uden Integral-Begning finde Tyngdens Center, da skeer det let efter §. 64; Thi om *f* er Tyngdens Center i den afbrudte Deel *Adh*, *n* i den hele Keile *ABC*, da findes af disse to efter de der givne Regler *k*, som vi ville antage at være Tyngdens Center for den Deel *dECB*.

§. 77.

Saaersom i den paraboliske Keile.

Vil man antage, at Keilen var parabolisk, nemlig bleven til ved en halv Parabols Omveltning om sin Arel (Taf. VII. Fig. 2.). Er da i Parabolen *BAC*, $Ae=x$, da bliver og $de=\sqrt{ax}$, Cirkel Rummet $dehq=\frac{p}{2}ax$. Det Cyldrindriske Element $=\frac{p}{2}axdx$, og følgelig de smaa Tyngder i en Sum $=\int \frac{p}{2}axdx = \frac{p}{4}ax^2$. Desuden er deres hele Overvægt $=\int \frac{p}{2}ax^2dx = \frac{p}{6}ax^3$. Saa den søgte Tyngdens Centers Distance fra *A* $=\frac{\frac{p}{6}ax^3}{\frac{p}{4}ax^2} = \frac{2}{3}x$, og for den hele paraboliske Keile $=\frac{2}{3}Ag$. Hvortil maa, som før, legges en bestandig Størrelse, om den paraboliske Keile er forforkortet. Man seer deraf

deraf fuldkommen, hvorledes arbeides bør i alle andre deslige Tilfælde, saa det var til Unytte at vilde anføre flere og tungere Exempler uden synderlig Nytte.

§. 78.

I Anledning af Keilen kunne vi ikke undlade at tale videre om ^{Og i Pyramiden.} Pyramiden. Er (Taf. VII. Fig. 3.) GABC en Pyramide. GBA og GBC to af dens Sider. DEF et Snit Parallel ABC, som man veed af Geometrien, bliver altid en Figur, der ligner Basis ABC. Da ere ABC og alle Snit, som DEF, ligedanne Triangler den hele Pyramide igiennem. Treffes ligeledes den Linie, hvilken gaaer igiennem Midt-Punkterne s og t , af alle Trianglerne, eller i Almindelighed af alle Snittene, parallelle Grund-Fladen, da kan iagttages, at G_sE , G_tB ere ligedanne Triangler; thi Vinklerne ved s og t ere lige store, og EG_s er en fælles Vinkel, selgelig om Eh og Bk ere Høiderne af Trianglerne ABC og DEF, blive altid $DE: Eh$ og $AB: BK$ i bestandig Forhold; thi man veed, at i ligedanne Figurer ere Linier, som treffes paa en og den samme Maade ligedanne, eller i samme Forhold med de øvrige. Ligeledes ere og $G_s: DF$ og $G_t: AC$, i bestandig Forhold, thi $DE: AB = DF: AC = GE: GB = G_s: G_t$. Selgelig om $G_s = x$, og $1: m$ tilkænder giver en bestandig Forhold, saavel som og $1: n$, kan man sætte $DF = mx$ og $hE = nx$, selgelig Trianglet $DEF = \frac{mnx^2}{2}$, og det elementære Prisma $= \frac{mnx^2 dx}{2}$, saa Summen af alle de smaa Tyngder belever $\frac{mn}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3$. Deres Overvægt derimod paa denne Side af G belever

flg til $\int \frac{mn}{2} x^3 dx = \frac{mn}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4$. Felgelig bliver Tyngdens Centers hele Afstand fra G $= \frac{3}{4}x$, og for den hele Pyramide $= \frac{3}{4}a$. Det er; i en Pyramide er Tyngdens Center om $\frac{3}{4}$ borte fra Spitsen udi den Linie, der gaaer fra dens Spitse igiennem Tyngdens Center af den overliggende Grund-Flade, eller et af de Planer, som med den er ligelebende.

§. 79.

Tyngdens Center bestemmes i Keilen ved tre Planers fælles Overflade, for ydermere at oplyse denne Methode, at søge Tyngdens Center paa.

Skiant, som før er blevet forklart; udi alle de Legemer, der blive til ved Omveltning, Tyngdens Center let kan bestemmes, ville vi dog kortelig vise, hvorledes dette Punkt i dem ligeledes kan findes ved at hense dem til tre Planer, og til den Ende ville vi igien foretage Keilen (Taf. VII. Fig. 5.). Hensees den da først til det Plan ACDB, hvori Linien lk er parallel med Keilens Arel eh , og Planet selv perpendicular paa Mide-Linien lb af Snittet i Keilen, hvilket vi igien antage perpendicular paa eh og parallel Basis. Ansees Keilen videre som fæstet til det Punkt k i Planet, da er enhver af de smaae elementære cylindriske Snit af Keilen, hvis Basis er adc , som før §. 76. $= \frac{pb^2 x^2 dx}{2a^2}$, og deres hele Sum $= \frac{pb^2}{6a^2} \cdot x^3$. Derimod da d er i det cylindriske Element Tyngdens Center, bliver dl samme Elements Vægt-Stang $= bk = b$, Benævningerne giorte som i §. 65. Videre bliver Elementernes hele Overvægt efter KI $= \int \frac{pb^3 x^2 dx}{2a^2}$ $= \frac{pb^3}{6a^2} \cdot x^3$. Saafermt det sidste divideres med det første, faaes b for Distancen fra Planet ABCD. Saa at man deraf seer, at Tyn-

dens

dens Center er i det Plan, der gaaer igiennem Aksen af Keilen parallel med ABCD.

For videre at bestemme, hvor dette Plan overskieres af et andet, som efter Bredden gaaer igiennem Tyngdens Center, maa, som før, den hele Keile henføres til det Plan $GHmN$, parallel med Grund-Fladen LKI; og da §. 76. $eb = \frac{3}{4}ch$, (thi den der giorte Udregning er den, som nu her skulde gøres) saa er Tyngdens Center i den fælles Linie, hvor Planet igiennem Aksen overskierer Planet parallel Grund-Fladen. Det behøves egentlig ikke, at finde i hvad Punkt i den Linie, som er disse Planer fælles, at Tyngdens Center b ligger, da man allerede veed, at det er i Aksen eb selv; imidlertid om det skulde seges, maatte Keilen beregnes, som før, i Henseende til det tredie Plan $EFxQ$, da man igien finder, at i Linien qbr , som var de to forrige Planers fælles Linie, hvor de overskar hverandre, ligger Tyngdens Center udi b , saaledes, at $qb = rb = b$, og selgelig, at dette Punkt er i Aksen selv fra Spitsen e af regnet om dens $\frac{3}{4}$, fuldkommen som i §. 76.

§. 80.

Før jeg slutter denne Afhandling, vil jeg endnu for deres Skyld, som kunde ønske, at see de Tilfælde alle anførte, hvilke i Udøvelsen og Brugen i sær kunne have Nytte, anføre Følgende, som dog til stor Deel er overmaade let.

1. I ethvert Trapeze ABCD (Taf. VII. Fig. 6.) findes let Tyngdens Center efter §. 65. ved at trekke Midt-Linien eller Diagonalen BD, for først at bestemme Tyngdens Center i Trianglet ABD, og siden i BDC. Ere disse Centrer a og b ; da ved at søge imellem dem

Tyngdens Center i Trapezerne bestemmes.

dem igien det fælles Center c , findes Tyngdens Center for det hele Trapeze. §. 123. Forel.

Ligeledes i alle
be ved dem til-
veiebragte pris-
matiske Lege-
mer.

2. Deraf sees videre, at i alle prismatiske Legemer, beskrevet af Trapezer, findes den Linie, i hvis Midte er Tyngdens Center, ved at sege et Punkt som c , saavel i den øverste, som underste Basis eller Grund-Linie. Den Linie i Prisma, i hvis Midte Tyngdens Center er, gaaer igiennem disse Punkter.

Saa og i de re-
gulære Figurer.

3) I alle Figurer, som ere regulære, seer man let, at Cirklen, som indskrives i dem, eller, som skrives uden om dem, dens Center maa være deres Tyngdes Center, thi haver den regulære Figur et lige Antal af Sider, seer man det i første Diekast. Er den derimod af et ulige Antal Sider, er Bevist lidet vanskeligere, men det forstaaes dog i Almindelighed let paa denne Maade. Er f. E. T. V. F. 14. ABDGI en regulær Figur, EFHKL den omkringskrevne Cirkel, CE, CF o. s. v. Perpendiklerne paa Korderne forlængte til Peripherien. Da er den hele Cirkels Tyngdes Center udi c . Den hele Cirkel bestaaer af samtlige Trianglerne, som BCD, DCG, o. s. v. udi hvilke at den regulære Figur fra Centret C opløses, og af samtlige Segmenter, som BDE, DGF o. s. v. selgelig om Tyngdens Center af Segmenterne ere i a de af Trianglerne i b , og i a og b deres hele Tyngder betragtes, som samlede eller koncentrerte. Da er det klart, at alle Tyngder, som a , ligge lige langt fra c , og alle Tyngderne som b ligeledes.

Selgelig have alle a og alle b deres fælles Tyngdes Center udi C. Antager man, at alle a bleve forringede udi a paa hvert Sted om lige meget, da blev endnu Ligevægten paa Vægt-Stangerne EC, CF o. s. v. ligesfuldt ved, fordi alle Momenta af Tyngden bleve

paa

paa alle Sider af c forringede lige meget. Følgelig om alle a blive til slet intet, maa Vægsagten endnu være ved imellem alle b . Følgelig maa den regulære Figur endnu beholde sit Tyngdes Center udi C .

Vil man betiene sig af den Maade, som vi have brugt forhen i Forelæsningerne S. 105, da er den endnu fast lettere. Thi trekkes fra Vinklen B Perpendiklen BH paa den imodsatte Side IG , (eller om Sidernes Antal er lige i den regulære Figur, da man trekker Figurens Diagonaler) og hele Figuren betragtes som opløst i Lutter Linier, som *ik*, perpendikulære paa BC , da deles de alle, følgelig og den hele Figur af Diametren BH i to lige store Dele, saa at i BH derfor er Tyngdens Center. Ligeledes bliver i enhver anden Linie som BH , for Er . AF Tyngdens Center. Hvor derfor at to deslige Linier oversfiere hverandre, der er dette Punkt. Men man seer strax, at det er i Centret af den is eller omkringskryvne Cirkel, fordi saavel BH , som AF , staae perpendikulær paa Korderne IG , GD , og dele dem udi to lige store Dele.

Man seer ligeledes let, at de regulære Figurers Perimeter, Og i disse Figurers Perimeter som gier deres Omkreds ud, intet andet Tyngdes Center haver, end ^{der} de selv.

4. Men er Figuren irregulær (Taf. VII. Fig. 7.), da kan det samme i dog endnu ligesuldt Metboden bruges af S. 64. Thi i mange-Kantede irregulære Figurer, og i de ten eller Polygonen $ABDEC$, faaes ved at trekke Diagonalerne BC ved dem tilveiebragte prismatiske Legemer. og CD , Trianglerne ABC , BCD , CDE , hvis enkelte Tyngtiste Legemer. des Centrer, om ere a , b , d ; imellem a og b det fælles Center c , imellem c og d ligeledes e ; da er e den hele Figurs Tyngdes Center.

Ved at sege fremdeles i begge Bases et saadant Punkt, seer man, at den Linie strax findes, i hvis Midte er Tyngdens Center i

Cc

alle

alle prismatiske Legemer, der kunne blive til ved irregulære Figurers Synkning.

§. 81.

Tyngdens Cen-
ter bestemmes i
Kugel-Snitte-
ne.

For den hele Kugle er Tyngdens Center let funden, men det er i adskillige Tilfælde nyttigt at finde Tyngdens Center af affkaarne Stykker af Kuglen. Taf. VII. Fig. 8.

Saa meget seer man strax, at siden Basis i Snittene af Kuglen BC ber være Cirkler parallelle med den største Cirkel i Kuglen, saa blive de til ved Cirkel-Vuens BAC Omvæltning om Aksen eller Diametern. Er BACB et Kugel-Stykke; EAF en af Kuglens største Halv-Cirkler; AD Halv-Diametren, og Diameter kaldes a . Ad, x . Da er $ad = \sqrt{ax - x^2}$. Er Forholden af Diametern til Peripherien $1 : p$, da bliver Peripherien af Kugel-Snittet $abf = 2p\sqrt{ax - xx}$. Dets Indhold $= p.(ax - xx)$. Det lille Cylindriske Element, som faaes, naar den cirkulære Grund-Flade abf multipliceres med fd , eller dx , bliver $p.(ax - xx) dx$; og da de enkelte Tyngders Centreer ligge alle i Aksen AD, bliver af enhver af dem Momentet $= p.(ax - xx). x dx$, hvoraf Summen er $p.(\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4)$. Summen af de elementære Tyngder derimod er $p.(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$. Det første dividert med det sidste $= \frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$, som er Tyngdens Centers Distance fra Spitsen A for ethvert ubestemt affkaaret Stykke af Kuglen, som BAC. Sætter man $x = \frac{1}{2}a$, ser at bestemme Tyngdens Center for den halve Kugle EACF, da om dette Punkt er e , faaes AE, $= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})a^2}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})a} = \frac{5}{8}a = Ae$.

Saa

Saa man seer, at $Ae:ed = 5:3$, det er Tyngdens Center i en halv Kugle ligger om $\frac{3}{8}$ af Halv-Diametern borte fra Centret (*).

Sættes $a=r$, om man nemlig ei vidste Tyngdens Center i den hele Kugle, da fik man $\frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x} = \frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})a^2}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})a} = \frac{1}{2}a$, det er ; Den hele Kugle haver sit Tyngdes Center i sit eget Sterrelses Center.

§. 82.

Derfor Snittet var Elliptisk, eller af en Elliptisk Spheroide, Da i Snittene da veed man af den Koniske Geometrie, at saa tidt som (Taf. VII. af Ellipsoiderne. Fig. 10.) Abscissens AD Begyndelse er i Spitsen A af Ellipsen, og

Cc 2

dennes

(*) Qvanam paa foransorte Sted beviser dette paa en synthetisk Maade meget artig, som jeg ikke kan undlade her at anføre, efterdi jeg forhen paa samme Maade haver viist, hvorledes Tyngdens Center i alle øvrige egentlig kaldte geometriske Legemer kan findes. Hans Beviis er dette:

Da den halve Kugle (Taf. VII. Fig. 9.) beskrives, som man veed, af den Quart-Cirkel BA, Keilen af en Triangel BED, og Cylindren af en Parallelogram EBAD; Forestiller man sig da disse Figurer saaledes, som Figuren viser, saa EDF bliver Keilen; ABC den halve Kugle; EACF Cylindren; da er, som man veed af Geometrien $EDF = \frac{1}{3}EACF$. Afse saa maa det hule Rum EADCF være saa stor som den halve Kugle. Men man veed, at Tyngdens Center af Keilen er i I saaledes, at $BI = \frac{1}{4}BD$, og Cylindrens i Midten H, saa $BH = \frac{1}{2}BD$. Deraf kan §. 64 K findes, eller Tyngdens Center i den halve Kugle. Thi da Kuglens Tyngde er som 2, og Keilens som 1, er $HI = 2$ og $HK = 1$, §. 114 Forel. saa $HK = \frac{1}{2}HI$. Men $BH - BI = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Følgelig er $HK = \frac{1}{8}$ og $BK = \frac{5}{8}$. Følgelig $BK:KD = 5:3$.

dennes Arel AB kaldes a . Parameteren b . Abscissen Ad , x . Den halve Ordinate Ed , y . Da er Ligheden til Ellipsen $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$. Halv-Diameteren cd beskriver ved den halve Ellipses Omvæltning en Cirkel *sege* i Spheroïden. Er da Peripherien til Diameteren $= p: 1$, bliver samme Cirkels Indhold $= y^2 p = p.(bx - \frac{bx^2}{a})$. Er $fd = dx$, bliver det cylindriske Element af Ellipsen, eller $cqEsf. fd = p.(bx - \frac{bx^2}{a})dx$, og dets hele Moment findes at være $= p.(bx - \frac{bx^2}{a})xdx$, hvoraf Integralen er, som man strax seer, $p.(\frac{1}{3}bx^3 - \frac{b}{4a}x^4) = A$.

Derimod er Summen af Tyngderne $= \int p.(bx - \frac{bx^2}{a}) dx$
 $= p.(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}x^3) = B$.

Divideres A med B, faaes $\frac{\frac{1}{3}x - \frac{x^2}{4a}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{x}{a}} = \frac{\frac{1}{3}ax - \frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$, som

er det sølsomme, hvilket vi forhen have fundet for Cirklen, hvoraf man seer,

at dersom omkring en Elliptisk Spheroïde beskrives en Kugle AaB , saa at begge have samme Arel, da have og deres affkaarne Stykker det samme Tyngdes Center.

Man beviser paa samme Maade, at denne Regel gielder og for Cirklen og Ellipsen selv, naar de have samme Arel. Deres affkaarne Stykker have altid det samme Tyngdes Center, saa at man ved at bestemme det ene, og kan bestemme det andet. §. 83.

§. 83.

Før vi forlade den Betragtning om Tyngdens Center, ville vi endnu agte, at hvad heller alle de smaa Dele, i hvilke Tyngderne, som i lige saa mange smaa Elementer, betragtes at være deelte. De enkelte Tyngder multiplicerte hver for sig med deres Distance fra et horisontalt Plan give det samme Moment, som deres fælles Tyngdes Center multiplicert alene med sin Distance fra dette Plan. Hvad heller, siger jeg, at disse smaa Dele deres Tyngders Centreer multipliceres hver for sig med deres Distancer fra et horisontalt Plan, til hvilket de alle henføres; eller og om deres hele Tyngde multipliceres alene med det fælles Tyngdes Centers Distance fra samme Plan, da faaes i begge Tilfælde den samme Størrelse.

Thi forestilles (Taf. VI. Fig. 7.) de enkelte Tyngders Centreer ved a, b, i, k, l , og de i dem concentrerte Tyngder benævnes med disse Bogstaver. Er ab den Linie, som sammenfører de to af dem a og b , da findes disses fælles Tyngdes Center f , ved at tage $af:fb$ $b:a$. §. 123. Forel. Trekkes fra f den Linie fe perpendicular paa det horisontale Plan $ABCD$, saa fe derfor bliver parallel da og bc , og videre paa efg fra a og b Perpendicularerne ag og bh kastes ned, da blive afg og bhf ligedanne Triangler, og fordi $a.af = b.bf$, bliver og $a.fg = b.bf$, det er; $a.(ad - fe) = b.(fe - bc)$ eller $a.ad + b.bc = a.fe + b.fe = (a + b).fe$.

Da nu den selsomme Betragtning kan gøres imellem f og i , siden imellem deres fælles Tyngdes Center og k , og saa videre fort, saa Slutningen immer bliver den samme, i hvor mange enkelte Tyngders Centreer at der end ere antagne, saa følger; at den hele Tyngde multiplicert med sit Centers Distance fra det hele Plan, udgier alene lige saa meget, som samtlig Tyngderne af alle enkelte Elementer af

Tyngden, multiplicerte hver for sig med deres Tyngders Centreers enkelte Distancer fra det horisontale Plan.

Syvende Forelæsning.

Fortsettelse om de svingende Tyngder.

§. 132.

At Pendulerne
bevistes, at en
Tyngde falder i
det første Se-
kund $15\frac{1}{12}$
Pariser Fod.

Efter at have forklart det nødvendige om Tyngdens Center, ville vi igien foretage den Sag om de svingende Tyngder, eller om Pendulerne, og strax begynde med at vise en overmaade stor Nytte, som denne Lærdom fører med sig, i det den siensynlig beviser, hvor meget man behøver endog de høiere og vanskelige geometriske Beregninger og Undersøgelser, naar man vil gaae lykkelig frem i Naturens Kundskab. Det her handles om, er en af de store Hovedforsøg, hoorpaa man maa anlegge alt i de mekaniske Udregninger, forstaae; engang for alle ved en upaatvivlelig Erfaring at afgjøre, hvor langt en Ting falder i Vertikalen ned efter i en vis given Tid, for Ex. i et Sekund; naar den drives af den naturlige Tyngde. Dertil udfordres intet andet, end at afgjøre ved Erfaring Længden af et Pendul, som svinger i en vis given Tid. Saaledes, da man paa denne sidste Maade noie haver fundet, at et Pendul, som svinger i et Sekund Tid, holder i Længde 3 Fod $8\frac{1}{2}$ Linie Pariser Maal (*), og man tillige maa ansee som bekiendt, §. 97. 2.

at

(*) Mr. Mairan *Memoires de l'Acad. des Scienc. An. 1735.*

at Tiden af Svinget igiennem Buen, naar denne ei er uden liden, det er, ei overgaaer $15^\circ, 30' (^{\circ})$, forholder sig til Tiden igiennem Pendulets halve Længde, som Peripherien til Diametern. Saa findes let Tiden, i hvilken et faldende Legeme igiennemløber Sekund-Pendulets halve Længde, eller $220\frac{1}{4}$ Linie, ved at sige, som $314 : 100 = 1'' : \text{Tiden}$ igiennem $220\frac{1}{4}$ Linie, hvilken Tid derfor bliver $= \frac{100''}{314}$. Veed man saaledes, at i den Tid af $\frac{100''}{314}$ igiennemløbes $\frac{881}{4}$ Linie, kan ligeledes det efter Vertikalen i et Sekund igiennemløbne Rum let findes; da disse Rum forholde sig som Quadraterne af Tiderne, §. 48. og følgelig, om det søgte Rum kaldes x ,

bliver $\frac{881}{4} : x = \frac{10000''}{98596} : 1''$. Hvoraf videre faaes $\frac{86863076'''}{40000} = x$, men $\frac{86863076'''}{40000} = 2171\frac{23076}{40000}$, for hvilken Brøk vi sætte 1, saa man faaer $x = 2172''$, samme dividert med $144 = 15\frac{12}{144} = 15\frac{1}{12}$ Pariser Fod, som er den vertikale Høide, hvilken et Legeme igiennemløber i et Secund.

§. 133.

Saaledes kan man ved Hielp af Pendulerne afgjøre en Maade, at undersøge Tiden, som ellers er høist vanskelig ved Erfaring rigtig at bestemme, som et Legeme

som med størst Flid synes at have undersøgt Sekund-Pendulets Længde, sætter den til $440\frac{17'''}{30}$, men sædvanlig bruger man $440\frac{1}{12}'''$.

(*) Dette er beviist §. 43. 3. i Tillæggene.

igiennemløber i
et Secund ved
umiddelbar Er-
faring.

stemme, og som mange have forsøgt, uden at en Erfaring nogen-
sinde haver vildet stemme ret med den anden, deels fordi Luften
svækker de faldende Tings Hastighed anseelig, naar denne bli-
ver nogenlunde stor; deels og, fordi man ei lettelig kan
sige sig frie for at begaae betydelige Feil i den simple Erfaring
ved at bestemme, hvor det faldende Legeme net op var ved
Slutningen af den foresatte Tid. Hugenius synes at have
optænkt (*) den beste Maade af alle, som man og nogenlunde
kan vente at være lykkelig i: Den bestaaer i at henge et sort
anloben Pendul op paa en horizontal Nagle perpendicular imod
en Væg, saa Pendulet, naar det hviler, rører Væggen, og kan,
naar det løstes op, falde om sit halve Sving net op, før det
støder an paa den. Lader man da paa en og den samme
Tid baade Pendulen, løftet ud fra Væggen, og ligeledes
en Tyngde, heftet til et langt Stykke Papiir, falde høit oven
fra, da viser Slaget af Pendulen paa det lange Papiir, som den
faldende Tyngde treffer efter sig, hvor langt denne sidste er
falden i den Tid, Pendulen haver gjort sit halve Sving;
hvilken kan, eftersom man finder det beqvemmest til, være en
vis Deel af et Secund. Hugenius fortæller, sig at have igien-
taget dette Forsøg adskillige gange, og altid at have fundet
Længden af Faldet i et Secund Tid $= 15\frac{1}{2}$ Pariser Fod.

§. 134.

(*) Denne store Mand var den første, som i sit prægtige Werk,
kaldet *Horologium Oscillatorium*, paa en fast syntetisk Maa-
de beviste de feromtalte merkkelige Egenskaber af Cykloiden
og Pendulerne. Man kan her see *Hor. Oscill. p. IV. prop. 25.*

§. 134.

Men for at finde Længden af et Pendul, som slaar Secunder, er det nok, at vide Længden af et hvert andet Pendul og af den Tid tillige, hvori det svinger, hvilket kan bestemt ved følgende Slutninger, som i en Mængde Tilfælde have en anseelig Nytte. Den første er, at Længderne af adskillige Penduler, som enten svinge over smaa eller over lige danne Buer, forholde sig under sig som Quadraterne af de Tider, hvori de svinge. Dette sees overmaade let. Det sidste af §. 81. 4 Foræl. Det første derimod saaledes. Ere (Taf. VII. Fig. II.) AB og ab to Penduler, CDB og cdb de smaa Buer, i hvilke de svinge, da er Tiden over CDB til Tiden igiennem $\frac{1}{2}AB = \text{Periph. : Diametern}$, §. 97. Og ligeledes Tiden over cdb til Tiden igiennem $\frac{1}{2}ab = \text{Periph. : Diametern}$. Derfor er Tiden i CDB til den i cdb = Quadratkoden af $\frac{1}{2}AB$ til Quadratkoden af $\frac{1}{2}ab$. §. 48.

Kaldes den første Tid T, den sidste t, da bliver $T : t = \sqrt{\frac{1}{2}AB} : \sqrt{\frac{1}{2}ab}$, følgelig $T^2 : t^2 = \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = AB : ab$.

Saaledes er et Pendul, som svinger i dobbelt Tid, fire-dobbelt lang, og det, som svinger i halv Tid, ikke uden fjerdede-Delen saa lang, som det, der svinger udi enkelt Tid.

§. 135.

Deraf sees, hvorledes man altid kan, naar Længden af et Pendul er givet, og den Tid, hvori det svinger, finde Længden af et andet Pendul, som svinger ligeledes i smaa

Pendulernes Længder ere som Quadraterne af Tiderne, hvori de svinge.

Al Tiderne, hvori to Penduler svinge, og den ene Længde, at

Dd

Buer,

finde Længden af den anden.

Buer i en anden given Tid. Thi er Længden af det givne l . Tiden, det svinger i t . Længden, som søges, x . Tiden, hvori det skal svinge, T . Da er $t^2 : T^2 = l : x$, og $x = \frac{lT^2}{t^2}$. For Ex. Et Pendul til Sekunder er 3 Fod $8\frac{1}{2}''$, hvad er Længden af et Pendul, som skal svinge i $\frac{1}{3}''$? Saa bliver $x = \frac{lT^2}{t^2} = \frac{88\frac{1}{2}}{18} \text{ Linie} = 48\frac{1}{18}''$.

§. 136.

At to Pendulers Længder og Tiden, hvori den ene svinger, at finde Tiden, hvori den anden svinger.

Ligeledes sees, hvorledes man kan, naar Længderne l og x af begge Pendulerne ere givne med Tiden T , hvori det ene svinger, finde Tiden, i hvilken det andet skal svinge.

Thi $x = \frac{lT^2}{t^2}$ og t er den Tid, som søges, saa bliver $t = T \sqrt{\frac{l}{x}}$.

Da derfor et Pendul til $3' 8\frac{1}{2}''$ Længde svinger i et Sekund, findes Tiden af Svinget for et Pendul af $48\frac{1}{18}''$ Længde at

være $= T \sqrt{\frac{l}{x}} = \sqrt{\frac{88\frac{1}{2}}{2}} : \sqrt{\frac{88\frac{1}{2}}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \text{ Sekund}$.

§. 137.

Penduler, som svinge bestandig i samme Tid, giøre et Antal af Sving, som er Tiderne forkeert proportionerte, hvori de enkelte Sving skeer.

Da det er lettere at finde, hvor mange Sving et Pendul gior i en vis Tid, end den Deel af samme, hvori et eneste skeer, saa er det andet, man her maa agte: At naar to Penduler giøre hver for sig i samme Tid alle deres enkelte Sving, eller bestandig svinge inden for 15° . Da ere Antallene af alle deres Sving i samme Tid forkeert, som Tiderne af de enkelte Sving. Dette er af sig selv overmaade klart, thi gior

gør den ene to Sving i den Tid, hvori den anden ikke gør uden et, maa Tiderne af de enkelte Sving være $= \frac{1}{2} : 1$. o. s. v.

§. 138.

Følgelig om Antallene af Svingene i to Penduler, som Længderne af svinge over smaa Buer, kaldes N og n , og Tiderne, hvori Pendulerne ere de enkelte Sving fæe, kaldes T og t ; (T svarer til N og t til n) da er $N : n = t : T$. §. 137. ere Længderne af Penduler. Sving, som de ne L og l ; (L svarer ligeledes til N , og l til n) da ere $t : T$ Tid. $= \sqrt{t} : \sqrt{T}$, §. 134. følgelig bliver $N^2 : n^2 = l : L$, det er :

Længderne af Pendulerne forholde sig som forkeert-Viis Quadraterne af de Antal Sving, hvilke samme Penduler gjøre udi en og den samme Tid.

§. 139.

Man kan derfor altid, saasnart som man veed Antallet Af det givne af de Sving, hvilke et Pendul af en given Længde gjør i en vis Antal Sving at Tid, og hvor mange Sving et andet gjør i samme Tid, finde Penduleres Længde. Længden af dette sidste.

Saaledes; Da man veed, at Længden af et Pendul, som svinger engang i en Sekunde, er $\frac{881}{2}$ Linie, findes let Længden af det, som svinger 10 gange i et Sekunde, ved at sige, som $100 : 1 = \frac{881}{2}$ til den søgte Længde.

Man kan deraf ved Erfaring allerbest bestemme Længden af et Pendul til Sekunder; thi tager man et Pendul af en bekendt Længde L , og lader det svinge med smaa Sving, jo længere desto bedre, for Ex. i en Time. Tæller man Svin-

gene, og finder deres Antal $= n$, da gjør et Pendul af den Længde L i et Secund Sving, hvis Antal er $\frac{n}{3600}$. Deraf findes let den søgte Længde x af et Pendul, som i et Sekund skal gjøre et Sving. Thi

$$L : x = \frac{(3600)^2}{n^2} : 1. \S. 138. \text{ saa } x = \frac{L n^2}{(3600)^2}$$

§. 140.

Et Slags be-
hunderlig Brug,
som kan gøres
af det forrige.

Man kan af denne sidste Pendulernes Egenskab undertiden gjøre en anseelig Brug i at bestemme noget næsten Høiden af de Ting, fra hvilke i Snorer Tyngder henge ned efter, som i at maale Hvelvingers Høider i Kirkerne, naar ved dem ere hengte Lyse-Kroner, og i andre deslige Tilfælde. Man haver alene nodig at bevæge de saaledes hengende Tyngder, og at tælle, hvor mange Sving de gjøre, for Ex. i et Minut, for efter §. 139 at finde Høiden. For Ex. Et saadant Legeme svinger frem og tilbage 30 hele Sving i et Minute, hvad er Høiden eller Længden af det simple Pendul? til hvilket et saadant Legeme altid kan bringes, efter hvad i det følgende udførligere skal blive viist.

Da Svingenes Antal i et Minut er 30 efter Hypothesen, saa er samme i $\frac{1}{60}$ eller i $1'' = \frac{1}{2}$, folgelig da Længden af det Pendul, som svinger en gang i et Secund er $\frac{881}{2}''$, saa bliver §. 138, $\frac{3}{4} : 1 = \frac{881}{2}$ til det søgte simple Penduls Længde; eller til $1762''$, eller $12' 2'' . 10'''$.

§. 141.

§. 141.

Vi have seet i det forrige en anseelig Nytte af Pendu- ^{Pendulernes} lerne, men i Brugen er iblant alle, som de kunde have, ingen ^{store Nytte i Uh-} større end den, at de give Uhrene en jævn og ligedan Gang, saa disse nøie og tilforladelig ved Hielp af dem kunne indrettes til at vise Tiden. Thi om de Uhret drivende Kræfter drive ulige, da er det klart, at Pendulen derved alene sættes nu i en stærkere, nu i en svagere Bevægelse; men siden disse Bevægelser skee efter det forhen sagte §. 97. alle i den samme Tid, saa holdes i den ene Tilfælde Takker og Hiul i Uhret oppe, at de ei gaae for hastig om, i den anden derimod befordres ved Pendulen deres Omveltning: Saa intet større og bedre Middel kunde optænkes til Uhrenes Forbedring og Tidens Indretning end disse svingende Tynghder, alene at de Buer, som de slaae, ei overgaae den feromtalte Størrelse af 15° . Hvorved man kan agte, at ligesom de cycloidaliske Buer ere de beste i Theorien, ere derimod de cirkulære de beqvemmeste i Brugen, og mindre Uleiligheder underkastede, end disse andre, efter det forhen sagte. Man gier i Brugen Pendulerne af Linse-Figur (Lenticulares), at de desto bedre kunne bevæge sig igiennem Luften.

§. 142.

Da Længderne af Pendulerne, fra Henge-Punktet til Tynghdens Center af en meget liden Tynghde, som vi have i det ^{Maade, at} forrige antaget, skulde henges i Enden af Pendul-Linien: Da, ^{rette Uhrene ved} siger jeg, disse Længder forholde sig som Quadraterne af Tiderne,

Da 3

eller,

eller, om man vil, Tiderne som Quadrat-Rodderne af Længderne, §. 134. saa maa et langt Pendul anvende længere Tid i sit Sving, et kort derimod en kortere. Følgelig, om man nok saa lidt forlænger eller forkorter Pendulen, ved at skue Tyngden i Enden lidt op eller ned, saa er det viensynligt, at Uhrets Gang derved maa forandres. Derfor er det, at man stiller og retter Uhrene, ved at skue Tyngden i Enden af Pendulerne lidt op, om Uhret gaaer for langsom, og lidt ned, om det gaaer for fast.

§. 143.

Dette er saa meget meer nødvendigt, som Pendulerne ere tillige med alle Delene i et Uhr Veirsligets Forandringer i hoi Grad underkastede, fordi Snorer forkortes ved Fugtighed, og blive længere i Varmen; Metallen derimod breder sig videre ud i Hede, og trekker sig sammen i Kuld. Man har Instrumenter, de saa kaldne Pyrometrer, hvorved man undersøger Metallerne's Forandringer. Men da Forklaringen af disse Instrumenter egentlig henhører til Physik, ville vi derved ei opholde os. Desagylter forsikrer i den femte Forelæsning af sin Physik §. 75, at Forandringen i en lang Pendul kan gaae til $\frac{1}{40}$ Tomme.

§. 144.

En anden betydelig Nytte, som kan gøres af Pendulerne.

Men Nyttens af Pendulerne bliver ikke staaende derved, de give os desuden et almindeligt Maal, om vi deraf ville betiene os. Et Maal, som aldrig kan blive tabt for Estertiden, med mindre

dre Tyngden selv paa et og det samme Sted i Verden skulde forandre sig, og da i Eftertiden ei være meer den samme som nu. Disse og andre deslige store Hoved-Forandringer i Naturen, saa længe de ei træffe ind, er det altid let, at give i Steden for det nu værende og efter Behag tage et i Naturen grundet og af den bestemt Maal, forstaae Længden af et Pendul, som slaaer Secunder, eller en dets Deel. For Exemp. med Hugenio Tredie-Deelen, som da blev meget lidt adskillig fra en af vore nu brugelige Danske Fodder. Dersom de gamle Folk havde nok saa rigtig bestemt os i deres Fodder og Noder Længden af en Grad i Meridianen, hvilken man i vor Tid med saa stor Møie og Besøstning haver søgt, havde det dog i vor Tid ikke meer været os muelig, at vide Længden af denne Grad, fordi det af dem dertil tagne Maal i Tiden, som intet sparer uden den uforanderlige Natur selv, var forgaaet, uden at det var os nu meer mueligt at komme efter, hvad det var. Denne Uleilighed kunde man undgaae paa før sagte Maade, ved at give vores Maal i Siemme til Naturen, det er, ved at gjøre den Tredie-Deel af Sekund-Pendulets Længde til den brugelige Fod, og det var overmaade at ønske, at dette ved offentlig Myndighed virkelig skede, siden man da altid i Eftertiden kunde vide, hvad Maal det Folk paa det Sted havde brugt, og saaledes betiene sig af de af dem giorte enkelte Maalninger og Udregninger. Hvor brudt (*) man i de ældre Tider haver været med at give Efterkommerne et vist

Maal

(*) See Snellii Eratosth. Batav. Lib. 1. Cap. 20.

216 Syvende Forelæsning. Fortsættelse om de sving.

Maal, kan iblant andet sees deraf, at Araberne dertil valgte Bygkorn 24 paa en Palme, og bestemte Bygkornets Størrelse igien ved 6 Heste-Haar af Halen, lagte umiddelbar hos hverandre; men om de Arabiske Heste-Haar alle vare lige tykke, og saa tykke som vore, er ondt at bestemme, saa kommer det og an paa, om de alle gange kunde legges eens, hvoraf sees, at dette Maal er meget uvisst.

§. 145.

Hvad ved den
tillige maa ag-
tes.

Men herved maa agtes, at det Steds Bredde maa nogenlunde rigtig tillige angives, hvortil man regner Secund-Pendulets Længde, thi Erfaring lærer, at et Pendul, som staaer Secunder er ei af samme Længde hele Verden over. Under Linien, eller omkring ved den, er det kiendelig kortere, end i Landene høiere oppe imod Polerne. Deraf følger, siden man kan bevise intet andet dertil, at kunne være Aarsag end Tyngdens Formindskelse, at Tyngden af Tingene ei er hele Verden over den samme. Man seer let, hvorledes dette maa følge. Da nemlig den hastiggjørende Kraft, som driver Pendulen, er Tyngden af Loddet, og folgelig den paa et hvert Sted i Verden regierende naturlige Tyngde; saa er det klart, at saasnart som Pendulen, alt for Næsten lige, begynder at gaae langsommere, maa den drivende Kraft, det er Tyngden af Loddet paa Enden af Pendulen være bleven ringere: Siden det altid er en sikker Følge, at naar Virkningen bliver mindre, maa den virkende og uden Hindring handlende Aarsag og i sig være bleven mindre. En fuldkommene Forklaring af dette skulle vi foretage i næstfølgende

Forelæsning.

Ottende

Ottende Forelæsning.

Om

den naturlige Tyngdes Foranderlighed
paa adskillige Steder i Verden, og om
Svingets Center i de sammensatte
Penduler.

§. 146.

Vi sluttede vores sidste Forelæsning dermed, at Tyngden ei var hele Verden over den samme; men at den var mindre under Linien, større imod Polerne. Man maa vel agte, at den Forandring, vi her tale om, er den hastiggjørende Kraft selv af Tyngden i Naturen; den er det, som efter Stederne er foranderlig større eller mindre, hvoraf siden videre flyder Forandring i Vægten. Fortsættelse af
det forrige.

§. 147.

Man stod længe i den Tanke, at Tyngden var eens hele Verden over, saa Tingene paa alle Steder veiede lige meget, og denne Bildfarelse havde vel blevet uforanderlig ved, om man i Geometrien ei havde begyndt at gjøre Pendulernes Beskaffenheder bekendte; til al Lykke var dette Arbeide giort, da den store Hallei paa en Reise til St. Helena merkede, at

Ge

Pendu-

Pendulerne imod Linien maatte forkortes, dog uden at bestemme hvor meget. Men Aar 1679 forte Mr. Richer, en Franzos, et Pendul-Uhr med sig paa Reisen til Den Cajenne, der ligger 5° at regne fra Linien, eller Equator. Mr. Richers Uhr gik rigtig i Paris, men altid for langsom i Cajenne; man søgte Forskiellen i Barmen, men den var langt fra ikke dertil tilstrekkelig nok, Mr. Richer maatte forkorte sin Pendul, som var $3' 0'' 8\frac{2}{3}'''$ om $1\frac{1}{4}'''$, før det vilde gaae rigtig. Denne merkkelige Jagttagelse, eller Observation, gjorde de Europæiske Geometrer opmærksom, man sluttede deraf, at Tyngden maatte være foranderlig; mindre under Linien, større imod Polerne, og deraf igien, hvad vi paa sit Sted nærmere skulle vise, at Jorden maatte være aflang og ikke rund. Dette sidste er blevet ved den Kongelige Franske Gævmildhed saa vel beviist, og stemmer saa nøie med hvad man i samme Henseende kan udregne af Pendulerne, saa at da den ene Erfaring saa stærk bekræfter den anden, ingen Tvivl er paa, at jo Tyngden er mindre under Equator, og voxer siden immer hen imod Polerne.

Siden den Tid have vi en stor Mængde deelsige Jagttagelser, hvoraf de nyeste og næst under Linien gjorde vise, at til Quito, som ligger $0^\circ 25'$ sydlig Bredde paa hiin Side Linien, var Længden af Secund-Pendulet, efter Efterretningerne af Mr. Bouguer $438\frac{82}{100}$ Linie, efter Mr. Condamine $438\frac{84}{100}$. Da derimod til Pello, som er det høieste Sted imod Nord, hvor man haver observeret Længden af Sekund-Pendulet, efter Mr. Maupertuis Beretning, under $66^\circ 47'$

nordlig

nordlig Bredde Længden af Sekund-Pendulet beløb $441\frac{17}{100}$ Linie, som er en anseelig Forskiel fra dets Længde i Quitto. Men det er ikke her Stedet, at udføre alt det herhid hørende. Vi have dertil endnu heller ikke de fornødne Grunde.

§. 148.

Imidlertid trekke vi af Erfaringerne om Pendulerne atter igien en nye Bekræftelse paa en af de meget vigtige ^{Vægten er Materien proportionert.} Sandheder, som maa legges til Grund i Mechanik, paa den nemlig, at Tyngden altid er Materiens Mængde proportionert (*), hvorom vi have talt i det foregaaende §. 35. Thi dersom Tyngden ei drev alle Materier lige og efter deres mindste Dele, men efter deres ydere Omfæng, maatte lige lange Pendulers Bevægelse nødvendig være i Henseende til Tiden adskillig, saa snart som de bevægende Årsager vare adskillige, det er, saa snart som de Tyngder, der drev dem, vare adskillige i Størrelse, og i hvor liden end denne Forandring var, maatte den dog nødvendig tilsidst røbe sig ved Svingenes Mængde. Men dette sidste er just, hvad alle Erfaringer over Pendulerne bevise, at hvad heller de Lod, som henges i Enden af Pendulerne, gøres større eller mindre, alene at Længden af den hele Pendul derved ikke forandres, skee dog Svingerne desuagtet ligesuldt udi samme Tid. Det samme skeer, om Lod henges i Enden af Pendulerne, for at

Se 2 drive

(*) Dette findes af den Lærdom om Pendulerne udferligere beviist i næstfølgende Tillæg §. 76.

drive dem, hvilke vel ere af samme Tyngde, men af adskillig Materie, følgelig og af adskillig udbendig Peripherie eller Omkreds.

§. 149.

Penduler, som
svinge i samme
Tid, have deres
Længder de dri-
vende Kræfter
proportionerte.

Vi have seet, at Pendulerne, saa snart som de drivende Kræfter blive mindre, maa forkortes; Men hvor meget? Altid i Proportion af Kræfterne, thi det er beviist (*), at dersom Penduler, der drives af adskillige Kræfter, skulle svinge med hinanden i en og den samme Tid, da maa de drivende Kræfter være Længderne af Pendulerne proportionerte, hvoraf sees, at man kan af Pendulernes Længde strax slutte til Størrelsen af Tyngden paa et hvert Sted paa Jorden. §. 147.

§. 150.

Tiderne af
Svinget deres
Forhold til de
foranderlige dri-
vende Kræfter
og til Penduler-
nes Længde.

Det er ligeledes beviist (**), at saa tidt som de Kræfter af Tyngden, hvilke drive Penduler af ulige Længde, ere under sig adskillige, da forholde de sig til hverandre, som Længderne af Pendulerne lige frem tagne, og som Quadraterne af Tiderne forkeert tagne. Deraf kan man fuldkommen forstaae, hvad vi saa løslig beviiste §. 145.

§. 151.

* Thi man seer af denne sidste Sætning fuldkommen, hvad Overeenstemmelse der er imellem Pendulernes Sving og
de

(*) Dette findes beviist i næstfølgende Tillæg.

(**) Dette ligeledes.

de Kræfter af Tyngden, som drive dem. Kaldes den drivende Kraft g , Tiden af Svinget t , Længden af Pendulen L , da er §. 150. $t = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$, er Længden af Pendulen den

samme, da bliver $t = \frac{1}{\sqrt{g}}$ eller Tiden, som Quadrat-Roden af den hastiggjørende Kraft forkeert tagen. Hvoraf sees, at jo mindre denne Kraft bliver, desto større bliver Tiden af Svinget. Thi vare de drivende Kræfter som 1 og $\frac{1}{4}$, blive Tiderne som 1 : 2, følgerig varede Svinget dobbelt saa længe i det første, som i det sidste Tilfælde.

Og omvendt. Dersom Tiden, hvori Svinget skeer af samme Pendul, bliver længere, da bliver den drivende Kraft mindre. Thi da er $t = \frac{1}{\sqrt{g}}$. Bliver t større, maa Nævneren i Broken nødvendig blive mindre, hvoraf videre sees.

- 1) At man af Tidernes Forskiel i Svingene kan slutte sig til Tyngdens adskillige Beskaffenhed og Forhold paa adskillige Steder paa Jorden.
- 2) At i Almindelighed, naar Tyngden bliver mindre, maa Pendulen forkortes. Bliver den større, maa den forlænges.

§. 152.

Vi skulle i de Forelæsninger, som følge umiddelbar paa disse; i de, hvor vi handle om de saa kaldte Central Kræfter, nærmere vise, hvad det kan være i Naturen, som gjør, at

den naturlige Tyngde er saa foranderlig paa adskillige Steder paa Jorden. Her ville vi alene erindre, at da den Sag om Pendulernes ordentlige Gang, er, som man allerede haver seet, af en saa overmaade Vigtighed, bør man giøre sig stor Flid for at bringe de svingende Tyngder dertil, at man med dem kan giøre saa noie Erfaringer, som man behøver og bør have. Til den Ende maa agtes, at vi i det forrige have antaget Længden af Pendulen, eller af den Linie, hvori Loddet i Enden hengte, som uden Tyngde og uboielig. Videre have vi betragtet Loddet selv fast som et Punkt, hvori Tyngden var koncentrert. Da nu begge Dele ere en pur geometrisk Betragtning, og det sidste ikke svarer til vores antagne, uden saa lange det paahængte Lod er af meget liden Størrelse, saa er det hoi nødvendigt, endnu videre at betragte Pendulerne saaledes, som de i Brugen virkelig ere, som tunge Legemer, der overalt have en Materie, hvilken paa adskillige Steder af Pendulet, drives af Tyngden paa adskillige Maader, og med adskillig Bevægelse.

§. 153.

Foreløbende An-
merkninger om
Svingets Cen-
ter.

For at nærme os til disse Betragtninger, ville vi foretage den simpleste af alle Tilfælde; den nemlig, i hvilken vi endnu ansee Linien, der udgjør Pendulet AB (Taf. VII. Fig. 12.) som pyr geometrisk, men uboelig og belagt hist og her med Tyngder, som for Exempel i t , E og B. Det man derpaa bør søge, er at finde, hvor langt et Pendul AL skulde være, i hvis Ende L om samtlig Tyngderne, som ligge hele Stangen

Stangen over, bleve anhengte i deres Tyngdes Center, Svinget da af dette sidste Pendul burde skee i samme Tid, som af den hele Stang AB, med alle sine Tyngder.

Et Pendul, som Stangen belagt med Tyngder, kalder man et sammensat Pendul, da man derimod kalder det sidste et simpelt: Men det er af dette sidstes Længde, at man her, som man seer, domme det hele Sammensattes Længde.

Det Punkt L derimod, som bestemmer Længden AL af det simple Pendul, kaldes Svingets Center. Det Punkt A, hvori det hele Pendul ansees som ophængt, kaldes Hænge-Punktet, eller, om man vil, Pendulens Center (Centrum Suspensionis).

§. 154.

Videre maa agtes, at da den hele Stang AB med sine Tyngder, drives af den naturlige Tyngde saaledes, at alle Punkterne ι , E, B, igiennemlebe i samme Tid ligedanne Buer, fordi Stangen i at svinge kommer med alle sine Dele paa engang fra AB til AD, saa maa de Kræfter, som drive hver af disse Punkter ι , E, B, forholde sig som deres Virkninger i samme Tid, som ι C, EG, BD, det er; som Længderne fra Hænge-Punktet eller Pendulets Center A. Saa deraf forstaaes, at man kan ansee den drivende eller hastiggjørende Kraft af Tyngden, som foranderlig over alle Punkterne A, E, B af den svingende Stang, fordi et Punkts Bevægelse hindres eller befordres af de andre Punkters Bevægelse.

gelse i Stangen, og at i den derfor maa blive et Punkt L, og det alene, i hvilket den naturlige Tyngde yttre sin Kraft frit og ubunden, saa det falder eller svinger, som om intet hindrede. Alle Punkterne over L drives med en mindre, alle derimod under L med en stærkere hastiggjørende Kraft, end den er, hoormed Tyngden naturlig Vits skulde drive Pendulen i frie Fald. Det Punkt L, hvori den naturlige Tyngde virker frit og uhindret, er just Svingets Center, som søges. Alle Punkter neden for det derimod vinde af de Kræfter, hvilke tabes i de oven for, og som kunne dømmes (naar man treffer den Linie KMI parallel AF) af den Forskiel, som er imellem Buerne z , EG, BD, og den Bue LM, som beskrives af Pendulen, naar den svinger, drevet frit af Tyngden.

§. 155.

Regel for alle
Inertiernes
Omskifning i et
helt System til
et eneste Punkt.

Men før vi foretage at bestemme det Punkt L, ville vi videre undersøge, hvad der udfordres til, at om den Deel Materie z blev lagt hen i et andet Punkt, for Exempel udi F, den da kunde endnu gjøre den selsamme Modstand, som om den laae udi z . Vi betragte her ingen anden Forandring, end den, som kommer af den blotte Inertie. Man maa derfor agte, at Inertiens Modstand er altid Forandrings Størrelse proportionert, §. 11. Eller, den er saa stor som den Vei, hoorigiennem den med eensdan Bevægelse bevæges, multiplicert med den selv. §. 23. Følgelig om Massen i z kaldes m , og den anden, som med den udi F skal gjøre samme Virkning, kaldes M, bliver, naar paa begge Steder

Vægt:

Bøgt Stangs-Armene tillige tages under Betragtning. m .
 $At \cdot tC = M \cdot AF \cdot FK$. Thi tC og FK ere de i samme Tid
 igiennemløbne Veie, da Systemet er sammenhengende. Men
 $tC : FK = At : AF$. Følgelig bliver Momentet af Iner-
 tien udi t saa stor som Momentet af Inertien udi F , eller m .
 $At^2 = M \cdot AF^2$ og $\frac{m(At)^2}{AF^2} = M$.

Saa man seer, at Momentet af Inertien er denne selv
 multiplicert med Bøgt-Stangens Quadrat, og at derfor,
 saa tidt som en Inertie skal i deslige Tilfælde flyttes fra et
 Sted til det andet, og dog saaledes, at Inertierne desuagtet
 uden Forskiel skulle gjøre deres forrige Modstand, og Bevægelse
 i denne Henseende skal blive uforandret, maa den omflyttede
 Inertie eller Materie forholde sig til den givne som Qua-
 draterne af Distancerne forkeert. En Anmerkning, som i
 mange Tilfælde er af Bigtighed, saasnart som der handles
 om Bevægelsen af et helt legemligt System.

§. 156.

Dette forudsat, da for at oplosse det foresatte Spørs-
 maal om Svingets Center i de sammensatte Penduler paa
 den korteste og letteste Maade, kan man forestille sig et Sy-
 stem af Legemer, som Taf. VIII. Fig. 5, H, D, G, R, E , at
 bære ved umaterielle, men tillige ubøielige og ikke vankende
 Stænger hængte fast til det Punkt C , om hvilket de i det sam-
 me Plan svinge frem og tilbage. G i Buen GI for Ex. o. s. v.
 Er Tyngdens Center F , og man igiennem det trekker fra
 Henge-Punktet C en Linie CFG , da kunne alle de svingende

8f

Iner-

Inertier H, D, G, E, omflyttes til at ligge i Tyngdens Center F, saaledes, at naar de bleve drevne af den der værende Pression, blev Pendulets Bevægelse endnu den samme, som for §. 155.

Betragter man derpaa samtlig disse Inertier, som virkelig omflyttede til F, blev §. 155 i dette Punkt deres virkelige Størrelse.

$$\frac{H \cdot CH^2 + D \cdot CD^2 + G \cdot CG^2}{CF^2} \quad \text{o. s. v.}$$

Kaldes den naturlige Tyngde, for saavidt den er en hastiggjørende Kraft, g , da bliver Pressionen i Tyngdens Center $= g (H + D + G \text{ o. s. v.})$ Thi Pressionen i Tyngdens Center er Summen af Pressionerne over alle de andre Dele af Systemet. §. 101.

Da derfor den hastiggjørende Kraft er Pressionen divideret med Inertien, §. 16. 4. saa bliver den hastiggjørende Kraft, der i Tyngdens Center skulde drive den omflyttede Inertie,

$$\frac{g \cdot (H + D + G) \cdot CF^2}{H \cdot CH^2 + D \cdot CD^2 + G \cdot CG^2}$$

Thi efter Omflytningen antages, i Følge vor Hypothese, saavel i Henseende til Inertien, som i Henseende til den hele Pression i Tyngdens Center, alt at være det samme.

Vor derfor Penduler, som svinge udi lige Tid, have hastiggjørende Kræfter, som ere deres Distancer fra Hængepunktet proportionerte §. 149. og den naturlige hastiggjørende Kraft af Tyngden er den, som driver det simple Pendul, §. 154. Kaldes da det søgte simple Penduls Længde x , som vi vilde antage $= MC$, da bliver

$$\frac{(H + D + G) \cdot g \cdot CF^2}{H \cdot CH^2 + D \cdot CD^2 + G \cdot CG^2} : g = CF : x$$

$$\text{Følgelig er } x (= MC) = \frac{H \cdot CH^2 + D \cdot CD^2 + G \cdot CG^2}{FC \cdot (H + D + G)}$$

hvilket er det søgte simple Penduls Længde, som er Isokron med det hele sammensatte, eller svingende med det udi samme Tid. (*)

Det er, at for at finde Længden af et simpelt Pendul, der svinge udi samme Tid frem og tilbage med det hele sammensatte, bør man multiplicere samtlig Tyngderne med Quadraterne af Distancerne fra Henge-Punktet til Tyngdernes Centrer, og dividere det udkommende med Summen af samtlig Tyngderne multiplicerte med deres vedkommende Distancer fra Henge-Punktet.

§f 2

§. 157.

- (*) Dersom man ikke forflytter den hele Inertie til Tyngdens Centrer, hvilket gjer Beviset overmaade kort, men til et andet Punkt F, da blev dog alt endnu det samme. Thi kaldes Taf. VII. Fig. 12. Masserne eller Materiernes Mængder i t , E, B, ligeledes t , E, B; og man vil, som nylig sagt, forflytte disse adskillige Inertier fra Punkterne t , E, B til F, saa at deres Modstand efter Omflytningen endnu bliver den samme, som før; da maa §. 155. den hele Inertie være udi F, $t \cdot \frac{At^2}{AF^2} + E \cdot \frac{AE^2}{AF^2} + B \cdot \frac{AB^2}{AF^2} + \dots$ o. s. v. om flere Inertier være. Men disse Inertier, hvilke i

§. 157.

Da Tyngdens Center kan sættes i Steden for den hele Tyngde §. 101. i Henseende nemlig til Overvægten, saa følger: At i Steden for at multiplicere hver for sig af de enkelte Tyngder med deres dem egentlige Afstand fra Henge-Punktet, man i den Sted kan betragte dem under et samtlig, som koncentrerte i deres Tyngdes Center, da de i forrige Henseende altid gøre samme Virkning, saa at man derfor kan multiplicere deres hele Vægt med deres Tyngdes Distance eller Afstand fra Henge-Punktet.

§. 158.

z , E , B have en Vægt, forårsaget af den naturlige Tyngde g , maa i F drives af Kræfter saaledes, at det hele Moment i F bliver det samme, som Summen af de enkelte Momenter udi z , E og B . Følgelig blive de i F ei drevne af den hastiggjørende Kraft g , men af en anden, som vi ville kalde k , og som bestemmes deraf, at $K \cdot t \cdot \frac{A_z^2}{AF^2} \cdot AF = g \cdot t \cdot A_z$,
 hvoraf faaes $K = g \cdot \frac{AF}{A_z}$. Og saaledes bliver den hele Pression paa, eller Vægt af z udi $F = g \cdot \frac{AF}{A_z} \cdot t \cdot \frac{A_z^2}{AF^2}$
 $= g \cdot t \cdot \frac{A_z}{AF}$. Ligeledes findes den hele Pression eller Vægten af E udi $F = g \cdot E \cdot \frac{AE}{AF}$ og af B udi $F = g \cdot B \cdot \frac{AB}{AF}$.
 Men dividerer man Summen af Pressionerne med Summen af Inertierne, da faaes den hastiggjørende Kraft, hvilken derfor bliver

$G, t,$

§. 158.

* Vi vilde ophylse det allerede sagte med et Exempel i en Svingets Cen-
af de meget simple og de mest nyttige Tilfælde, samme er, en Cylinder af
naar en tung cylindrisk Stang er hængt op ved skarpe Hager uendelig smal
a og b i sin Ende, og svinger frem og tilbage, som AB (Taf.
Grund-Flade.

VII. Fig. 13.). I denne Tilfælde er det klart, at om man
anseer Længden af Stangen AB, som Høiden ac af en ret Py-
ramide, hvis Grund-Plan eller Basis *degf* er det virkelige
Quadrat af *ac*, da bliver et hvert andet Snit, som *iklm*,
ligeledes et Quadrat af den Høide, som til den svarer, i
Følge Geometrien; og da derfor Tyngden selv er Li-
nien AB eller *ac* proportionert, saa maa den hele Tyngde af

If 3

Stan-

$$g. z. \frac{Az}{AF} + g. E. \frac{AE}{AF} + g. B. \frac{AB}{AF} + + o. f. v.$$

$$z. \frac{Az^2}{AF^2} + E. \frac{AE^2}{AF^2} + B. \frac{AB^2}{AF^2} + + o. f. v.$$

$$= \frac{(z. Az + E. AE + B. AB + +) g. AF.}{z. Az^2 + E. AE^2 + B. AB^2 + +}$$

Men naar Penduler skulde svinge udi samme Tid, maa de
dem drivende Kræfter være deres Længder proportionerte.

§. 149. Følgelig, da AF er Længden af det simple Pen-
dul, som man ved Inertiernes Omflytning haver indbildt sig,
AL derimod af det virkelige, og den i L hastiggierende
Kraft er den naturlige Tyngde selv = *g*, §. 154. saa bliver

$$\frac{(z. Az + E. AE + B. AB + +) g. AF.}{z. Az^2 + E. AE^2 + B. AB^2 + +} : g = AF : AL.$$

$$\text{Og derfor igjen } AL = \frac{z. Az^2 + E. AE^2 + B. AB^2 + +}{z. Az + E. AE + B. AB + +}.$$

Stangen multiplicert stykkeviis med samtlig Distancerne fra a deres Quadrater §. 156. udgiore i en Sum det samme, som Indholden af den hele Pyramide $= \frac{AC^3}{3}$. Samtlig Tyngderne derimod multiplicerte med deres fælles Tyngdes Centers Distance fra Henge-Punktet $= \frac{1}{2}AC^2$. §. 108. 3. Følgelig bliver Svingets Centers Distance fra Henge-Punktet eller fra Pendulets Center $= \frac{AC^3}{3} : \frac{AC^2}{2} = \frac{2}{3}AC$.

§. 159.

Det simple isokrone Pendul's Bølgde anføres i de nyttigste og fornemmeste Tilfælde.

Da Svingets Center i de praktiske Dele af Mekaniken meget ofte behøves at være bekendt, i sær i Figurerne, ville vi endnu kortelig opholde os ved følgende forelobende Anmerkninger. At man nemlig gjør Forskiel imellem to Slags Sving udi Figurerne. Det ene er, naar de svinge over en Arel parallel deres Grund-Linie, det andet, naar de svinge hen efter Siden. Saaledes (Taf. VIII. Fig. 7.) om A er et Punkt, i hvilket Trianglet BDE betragtes som at være ophængt, saa det omkring samme frit kan svinge enten hen efter Horizonten, eller hen efter det vertikale Plan, som gaaer igiennem Tyngdens Center af ADE , da kalbes det første Slags af Sving, Sving efter Basen, det andet derimod kalbes Sving hen efter Siden.

I disse Tilfælde kalder man Svingets Arel den horizontale Linie FAG , som ligger, saa at sige, ubevægelig, imidlertid at Svinget skeer. Man bør derfor, i Henseende til begge Sving, betragte to Arel, den ene perpendicular paa den anden, af hvilke den, efter hvilken Svinget ikke skeer, altid

altid bevæger sig i Vinkel-Bevægelse med den svingende Figur. Enhver af dem staaer altid perpendicular paa det Plan, hvori Svinget skeer.

§. 160.

Dette forudsat, beviser man følgende, (*) naar at Figurerne drives hen efter Grund-Linien eller efter Siden,

a) i Trianglerne (Taf. VIII. Fig. 9.).

1) Saa tidt som de henges op til at svinge i Spitsen B, falder Svingets Center i den Linie BC, som gaaer igiennem Tyngdens Center, om $\frac{1}{4}BC$ borte fra Spitsen B, saa at, om Svingets Center er L, bliver $BL = \frac{3}{4}BC$, om de drives efter Grund-Linien.

2) Vender derimod Grund-Linien op efter, og de svinge i det Punkt C, bliver $CL = \frac{1}{2}BC$.

3) Er Trianglet (Fig. 7.) ophængt i et Punkt B i den ubøielige Linie AB, og svinger horizontal hen over den Arel FG, i hvis Punkt A Linien AB og med den Trianglet selv er ophængt, saa Svinget skeer om A, da om $AC = a$, $AB = c$, og Svingets Center er udi L, bliver $LA = \frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}$ Længden af det simple Pendul. Derimod bliver Taf. VIII. Fig. 4, naar $DB = a$ og $ED = c$; $\frac{a^2 + 6cc + 4ac}{6c + 2a}$ Længden af Pendulet.

2. 3

(*) See femte Tillæg.

b. 3 Parallelogrammerne, drevne efter Grund-Linien.

- 1) (Taf. VIII. Fig. 6.) Om de ere ophængte udi c , saa cA er en ubøielig, men ikke tung Linie. Kaldes cA , a . AG , c , da er Længden af det simple Pendul

$$= \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}.$$

- 2) Følgesig, om $cA = 0$, eller Figuren er ophængt udi Midten af sin Grund-Linie A . Da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}c$.

c. 3 Cirklerne.

- 1) Om en heel Cirkel svinger horizontal hen, og er ophængt udi et Punkt i Peripherien B , som Taf. VIII. Fig. 11. da er Svingets Centers Distance fra $B = \frac{5}{8}BF$.

- 2) Er Cirklen i dette samme Tilfælde ophængt i det Punkt I , og Diametern $BF = a$, da er det simple Penduls Længde, naar $IB = c = \frac{8ac + 5a^2}{16c + 8a}$.

- 3) Svinger en Cirkel paa Siden hen efter det vertikale Plan, og er ophængt i et Punkt af Peripherien, da bliver Længden af det simple isokrone Pendul $\frac{3}{4}$ af Diametern.

- 4) Og er den ophængt i det Punkt I , men svinger paa den sidst sagte Maade. Da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{3a^2 + 4ca}{8c + 4a}$.

d. 3 Kuglerne.

1) Naar de henges op i et Punkt af deres Peripherie og Halv-Diametern $= a$, da er det isokrone simple Penduls Længde $= \frac{7}{10}a$.

2) Ere de ophængte i den Distance l over Peripherien, bliver dette Penduls Længde $= l + r + \frac{2rr}{5 \cdot (l+r)}$.

e. 3 Keilene.

1) Ophængte i Spitsen. Om Høiden af Keilen $= a$, Diametern i den cirkulære Grund-Flade $= b$. Da er det simple isokrone Penduls Længde $= \frac{4a^2 + b^2}{5a}$.

2) Henges de op i Centret af Grund-Fladen, da er dette simple Penduls Længde $= \frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$.

f. Er en Cylinder ligeledes ophængt i Centret af sin Grund-Flade, og Benævningerne gøres, som i No. 5. Da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

§. 161.

Man kan ligeledes bestemme Svingets Center i andre Tilfælde, men vi ville derved ei opholde os, for at fortsætte efter Løste den Lærdom om Central-Kræfterne, og i den Anledning iblant andet vise, hvorledes at Hastigheden, eller Farten af Tingene kan til intet gøre Tyngden enten til Deels, eller ganske og aldeles.

Femte Tillæg.

Om
Pendulerne i Almindelighed, og i sær om de
sammensatte Penduler.

§. 84.

Devit's paa de i den ottende Forelæsning antagne Sætninger.

§ Vad sig angaaer de i Forelæsningerne §. 148 — 150 giorte Anmerkninger, angaaende, at slutte af de Liden, hvori Pendulerne bevæges, saavel som af de adskillige paa dem hængte Lod og Tyngder, deels; hvorvidt man kunde holde for, at Materiens Dele vare Bøgten i Tingene proportionert; Deels og for hvorvidt at de hastiggierende Kræfter af Tyngden vare paa adskillige Steder i Berden under sig adskillige. Da kunne de Regler, hvoraf begge Dele bør sluttet, paa ingen anden Maade lettere og fuldstændigere findes, end ved at foretage igien den forhen §. 38 fundne Lighed imellem Hastigheden og Liden, efter hvilken t er proportionert $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$, naar nemlig Forholden af Diametern til Peripherien udelades, siden vi her alene see i Almindelighed paa Proportionen. Man erindrer sig, at $4a$ er Længden af Pendulet, og $\sqrt{g}$ Quadrat-Roden af den bestandige Kraft, som driver det. Antages g som foranderlig, da siden g i Almindelighed er $= \frac{p}{m}$ §. 5. saa bliver og ligeledes

 $t =$

lange Penduler er virkelig efter hvad Erfaring lærer, den samme; Hvad heller at Tynghderne, som drive Pendulerne, ere større eller mindre, tungere eller lettere under samme Størrelse; saa bekræfte disse Erfaringer, forenede med Theorien, denne vigtige Sandhed, at Materiens Mængde udi Inertierne eller Legemerne ere altid Kræfternes Trykninger af Tynghden proportionerte.

§. 88.

Tynghden virker til alle Tider enesdan, og er i lige Distancer over Jorden den samme.

Er Materien den samme, da bliver $t = \sqrt{\frac{4^a}{p}}$, det er Tiderne blive proportionerte Quadratkædderne af Pendulernes Længde lige over Jorden den fremtagne, og Quadratkædderne af de bevægende eller hastiggjørendes Kræfter forkeert tagne.

Saa man deraf seer, at dersom Tynghden virkede snart saa, snart anderledes, kunde lige lange Penduler ei svinge til alle Tider udi den samme Tid. Følgelig, da dette skeer, maa Pressionen af Tynghden være til en Tid, som til den anden.

Ligeledes sees heraf, at saafremt lige lange Penduler i adskillige Distancer over Jorden svinge udi samme Tid, da maa Tynghden selv i alle disse Distancer være en bestandig Kraft. Da de derfor i de Distancer, paa hvilke vi kunne giøre Forsøg, altid, i Følge af Erfaringerne, svinge udi samme Tid, saa er Tynghden paa alle disse Distancer en ensdan virkende Kraft.

§. 89.

Penduler, som svinge udi samme Tid have Længder, som ere de hastiggjørende.

Forudsat; at p er foranderlig, t derimod en bestandig Stør-

relse. Da forvi $t = \sqrt{\frac{4^a \cdot m}{p}}$, saa sees: At om Tiderne, hvori ulige

ulige lange Penduler svinge, skulde være de samme, da om $t = 1$, de Kræfter proportionerte.
 bliver $4a = \frac{p}{m}$, det er, Pendulernes Længder maa være de hastiggjørende Kræfter proportionerte.

§. 90.

Man kan heraf ligeledes slutte paa de hastiggjørende Kræfter. Maade, at finde Tyngdens adskillige Kræfters Forhold paa adskillige Steder i Bredden.
 Thi $\frac{p}{m} = \frac{4a}{t^2}$. Følgelig bliver den hastiggjørende Kraft altid proportionert Længden af Pendulet lige frem tagen, og Quadraten af Tiden, i hvilken Svinget skeer, forkeert tagen.

Er derfor Tiden den samme, hvori ulige lange Penduler svinge under adskillige Grader af Bredden. Og disse Pendulers Længder ere L og l , da ere Kræfterne af Tyngden under samme Grader af Bredden ligeledes proportionerte L og l .

§. 91.

Hastighederne angaaende, vil jeg alene anføre det følgende. Hastighederne undersøges i
 Man seer nemlig let (Taf. VII. Fig. 14.), at saa tidt som det samme Cirkel = Buer, me Pendul svinger over adskillige Buer, som eb , db ; da ere i det samme have hvad nederste Punkt b de vundne Hastigheder ved Faldet over Buer, der ei Størrelse, som man vil.
 alene ere uendelig smaa, men af hvad Størrelse man selv vil, i samme Forhold, som Strengen eb til Strengen db .

Thi Hastighederne udi b , hvilke vindes ved Faldet igiennem eb og db ere som $\sqrt{eb} : \sqrt{db}$. §. 79. 3. Men da feb og fdb ere retvinklede Triangler, saa er $fb : bd = bd : ba$. Saa Korden $bd = \sqrt{fb \cdot ba}$. Ligeledes bliver $eb = \sqrt{fb \cdot bc}$. Derfor og $bd : eb = \sqrt{ba} : \sqrt{bc}$, og da disse sidste ere proportionerte Hastighederne

vundne ved Faldet igiennem *db* og *eb*, saa ere *db* og *eb* selv disse Højstigheder ligeledes proportionerte.

§. 92.

Ved Hielp af
Cykloiden at finde
de Tiden af alle
små isokrone
Bewægelser.

Fer jeg slutter disse Anmerkninger over de simple Penduler, som alle er en Følge af det, hvilket vi forhen have beviist om Bewægelsen i Cykloiden, kan jeg ikke undlade at vise, hvorledes man kan betiene sig af denne Linie, for at finde Tiden af alle små bekiendte isokrone Bewægelser i Kegemerne. Hvilket i en Mængde Tilfælde er af en anseelig Nytte. Saa tidt nemlig, som Udløbene fra et vist Punkt, skient de under sig ere ulige, dog skee udi lige store Tider, og saavel de drivende Kræfter som Udløbenes Længder ere bekiendte.

Thi da i Cykloiden Tiderne igiennem store og små Buer altid ere lige store. §. 38. Og saa tidt som Kræfterne ere Distancerne proportionerte, enten fra et virkeligt Kræfternes Center eller fra et Punkt, imod hvilket at Kræfterne efter Omstændighederne kunne ansees som at drive immer hen ad; Tiderne af Bewægelsen over små og store Buer da ligeledes altid blive lige store. Saa kan man betragte de saaledes igiennemløbne Rum (hvilke de drivende Kræfter antages at være proportionerte), som om de være små Cykloidal-Buer, og de drivende Kræfter selv, som Kræfter, der drive udi Cykloiden. Saa tidt derfor, som små Bewægelser skee omkring eller imod et Punkt over ulige eller lige Rum, men udi lige store Tider, kan, i Følge det allerede sagte, Længden af den halve Cykloide, i hvilken disse Bewægelser kunne antages at skee, let findes. Thi (Taf. IV. Fig. 3.) udi A, hvor den halve Cykloide begynder, er den naturlige Tyngde den drivende Kraft, fordi Tangenten af Cykloiden er der vertikal, og

denne

denne Kraft er i A desuden proportionert AB den halve Cykloides Længde. I *n* derimod er den i Cykloiden drivende Kraft proportionert *n*B. Dersom da det i en given Tilfælde igiennemløbne isokrone Rum forestilles ved *n*B, og den over samme drivende Kraft, som maa findes, kaldes K. Den naturlige Tyngde *g*. Da bliver $K:g = B:n$: AB, saa den halve Cykloides Længde saaledes findes.

Men denne Længde er det simple Penduls Længde, §. 85. 2 Forel., som svinger udi samme Tid med det givne Legeme. Følgelig, da Længden af Pendulen er bekendt, er Tiden af Svinget ligeledes bekendt. §. 136. Forel.

Fortsettelse om de sammensatte Penduler.

§. 93.

Vi ville her ikke opholde os ved at give et nyt Beviis for det Tilfælde, da de i det sammensatte Pendul svingende Dele ikke ligge alle i det samme Plan, siden man let seer, at Beviset altid maa blive det samme, alene, at Inertiernes Omflytning skeer paa den §. 156 anførte Maade.

Derimod ville vi vise, hvorledes man kan simpel hen deraf, at Svingets Center bestemmes
 det sammensatte Pendul skal svinge udi samme Tid med det simple, paa en anden
 lige saa godt finde den forhen givne Regel, som af det forhen brugte Maade.
 Principe, at Svingets Center var det ene Punkt, hvilket i et heelt
 System af Legemer bevægede sig frit og uhindret. Thi til at finde
 Regelen deraf, udfordres intet andet, end at søge Tiden af Bevægelsen i det sammensatte Pendul, og at sammenligne den med Ti-
 den

den af Bevægelsen i et simpelt. Men for at søge Tiden af Bevægelsen i det sammensatte Pendul, bør man søge Tiden af Bevægelsen i det hele Systems Tyngdes Center, saaledes, som den i dette Tilfælde bestemmes af Spørgsmaalets Betingninger.

Vi ville først bestemme Tiden af Bevægelsen i det simple Pendul, siden det drives af den naturlige Tyngde g , hvilken vi her ville sætte $= 1$. Er da, (Taf. VIII. Fig. 5.) ligesom før, CERGHD det svingende System. CG Længden af det søgte simple Pendul, hvilket vi antage at være faldet fra I til G. Videre, om den vertikale Heide KG kaldes y . Da bliver Hastigheden, som er vunden ved Bevægelsen eller ved Faldet $= \sqrt{2y}$. §. 10. Tiden igiennem et af Buens Elementer $dG = \frac{aG}{\sqrt{2y}}$. Sættes $CG = r$. $CK = x$. bliver $y = \sqrt{rr - xx}$. $aG = \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$ og $dt = \frac{aG}{\sqrt{2y}}$

$$= \frac{r dy}{\sqrt{2r^2 y - 2y^3}}.$$

For at finde fremdeles Tiden af Bevægelsen i det sammensatte Pendul, maa agtes. At F antages, som Tyngdens Center, udi hvilket den hele Tyngde af Systemet kan ansees som at være foreenet, og selgelig er i dette Punkt og den hele Pression samlet, som driver Systemet. Er FL et Stykke af den Bue, som dette Center beskriver i en uendelig liden Tid, og som før $CL = x$. $FL = z$. Den hele drivende Kraft udi $F = K$. Da bliver §. 32. den Kraft, som driver efter Tangenten af Cirklen (om Elementet af Cirkel-Buen kaldes ds)

$$= \frac{K dz}{ds}.$$

Kaldes den hele Tyngde af det sammensatte Pendul T.

CF.

CF, a . Da bliver $K = aT$, og $\frac{Kdz}{ds} = \frac{aTdz}{ds}$, som er den Kraft, der driver efter Tangenten af Cirklen det hele sammensatte Pendul.

Følgelig maa denne Krafts Virkning være lige saa stor, som den, Tyngden gjør paa alle de øvrige Inertier udi samme Tid. Saa fremt derfor at DN, PH ere de smaa Buer, som i den Tid igiennemløbes af Inertierne D og H, o. s. v. i hvilken nemlig at Tyngdens Center igiennemløber den lille Bue LF, saa bliver §. 5.

$\frac{aTdz}{ds} dt = D. DC. DN + H. HC. HP$. Men DN og HP ere Elementerne af Hastighederne proportionerte, saa om Hastigheden

i D = f . i H = p . er $\frac{aTdz}{ds} dt = D. DC. df + H. HC. dp$

++ o. s. v. men $dt = \frac{ds}{v}$ §. 7. Følgelig faaes, om ved v forstaaes Hastigheden udi Tyngdens Center F.

$$\frac{aT}{v} dz = D. DC. df + H. HC. dp ++ o. s. v.$$

som er den Lighed, hvoraf Hastigheden udi Tyngdens Center kan bestemmes.

Nemlig, da i Følge det sammensatte Penduls Natur v er proportionert $FC = a$, og ligeledes $f = DC$ og $p = HF$ o. s. v. saa bliver $Tdz = D. f. df + H. p. dp$, hvoraf Integralen er $2Tz = D. f^2 + H. p^2$.

Men da dette ikke viser uden Forholden, saa maa man videre agte, for at føre de virkelige Hastigheder ind i Regningen, at, naar Hastigheden i F, den nemlig som søges, = v , bliver den i D = $f = \frac{DC. v}{a}$, den i H = $p = \frac{HC. v}{a}$, hvilke Værdier af f og p , naar

§ 6

fættes

fattes i den forrige Eighed, faaes $2Tz = \frac{D \cdot DC^2 \cdot v^2}{a^2} + \frac{H \cdot HC^2 \cdot v^2}{a^2} + +$,

$$\text{hvoraf endelig faaes } v = \frac{a\sqrt{2Tz}}{\sqrt{D \cdot DC^2 + H \cdot HC^2 + +}}.$$

Da saaledes Hastigheden i Tyngdens Center er funden, findes
let Tiden af Bevægelsen, fordi $dt = \frac{ds \cdot \sqrt{D \cdot DC^2 + H \cdot HC^2 + +}}{a\sqrt{2zT}}$

$$\text{men } ds = \frac{adz}{\sqrt{aa - zz}}, \text{ selgelig bliver } dt = \frac{dz \cdot \sqrt{D \cdot DC^2 + H \cdot HC^2 + +}}{\sqrt{2T} \cdot \sqrt{(aaz - z^3)}}.$$

Sammenlignes denne Værdie af Tiden i det sammensatte Pendul med den forhen fundne, som tilkommer Bevægelsen af det simple. Da bliver, fordi begge disse Tider, i Følge Hypotesen, skulde være lige store,

$$\frac{rdy}{\sqrt{2r^2y - 2y^3}} = \frac{dz \cdot \sqrt{D \cdot DC^2 + H \cdot HC^2 + +}}{\sqrt{aaz - z^3} \cdot \sqrt{2T}}$$

$$\text{Men } r:y = a:z. \text{ Selgelig bliver } \frac{rdy}{\sqrt{2r^2y - 2y^3}} = \frac{r^2 dz}{a\sqrt{(a^2 \cdot 2r^3z) - 2r^3z^3}} = \frac{r^2 dz}{a^3}$$

$$= \frac{\sqrt{ar}}{\sqrt{2}} dz = \frac{dz \cdot \sqrt{D \cdot DC^2 + H \cdot HC^2 + +}}{\sqrt{a^2z - z^3} \cdot \sqrt{2T}}. \text{ Dg selgelig bliver}$$

$$r = \frac{D \cdot DC^2 + H \cdot HC^2 + +}{aT} \text{ fuldkommen, som i §. 156. Forel.}$$

§. 94.

Almindelig Regel for Svingets Center.

Derfor man kalder enhver af de smaa Tyngder i det sammensatte Pendul z , Distancen fra Henge-Punktet for enhver af dem i Almindelighed x , da bliver $r = \int \frac{3xx}{3x}$.

§. 95.

§. 95.

For nu at komme til de enkelte Exempler, ville vi først begynde Svingets Ceu-
 af de simpleste, og til den Ende undersøge Svinget af Tyngdens Cen-
 ter i de rette Linier, hvis lige store Dele overalt antages, som at have
 den samme Tyngde.

Er da (Taf. VII. Fig. 15.) en saadan Linie ab vertikal, og
 ophængt til at svinge i sin ene Ende a . Kaldes desuden ad , x . cd ,
 dx . den hele Linie ab , a . Da er $z = dx$, og $\int \frac{zxx}{\sqrt{3x}} = \int \frac{xxdx}{\sqrt{x}dx}$
 $= \frac{2}{3}x$, og for den hele Linie $\frac{2}{3}a$.

§. 96.

Er alt som før, men alene den Deel cb af Linien tung, ac Det samme,
 derimod uden Tyngde, da er, om $ac = b$. $\int \frac{zxx}{\sqrt{3x}} = \int \frac{xxdx}{\sqrt{x}dx}$, naar en Deel af
 men naar $x = b$, bør Integralen være $= 0$, saa bliver $\int zxx = \frac{1}{3}x^3$
 $-\frac{1}{3}b^3$ og $\int zxx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}b^2$, selgelig bliver det søgte simple Pen-
 duls Længde $= \frac{2}{3} \frac{(x^2 + bx + b^2)}{x + b}$, og for den hele Linie $ab = a$.
 er den $\frac{2}{3} \frac{(a^2 + ba + b^2)}{a + b}$. Er $b = 0$, faaes, som før, det simple
 Penduls Længde $= \frac{2}{3}a$.

§. 97.

Tages Henge-Punktet et Sted inde paa Linien, og den hele Li-
 nie ansees tillige som tung (Taf. VII. Fig. 16.) som om Henge-Punktet
 tet er udi A, og $AB = b$. $AC = x$. $cd = dx$, da bliver $\int \frac{zxx}{\sqrt{3x}}$ den tunge Deel
 af Linien.

$= \int \frac{xx dx}{x dx}$, og derfor $\int 3xx = \frac{1}{3}(x^3 + b^3)$, fordi naar $x = -b$,
 bør Integralet være $= 0$. Ligeledes er $\int 3x = \frac{1}{2}(x^2 - b^2)$. Er den
 hele Linie fra Henge-Punktet af a , bliver det søgte simple Pen-
 duls Længde $= \frac{2}{3} \left(\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} \right)$ og om $b = 0$, som før §. 95. $= \frac{2}{3}a$.

Man kan herved i Almindelighed agte, hvad der sees i dette
 Exempel; at nemlig den almindelige Regel strekker sig endog til de
 Tilfælde, da Henge-Punktet tages inden i Figurernes. Siden det
 alene kommer an paa at fyldestgiøre Integralen saaledes, som dette
 Tilfælde det udfordrer.

§. 98.

Evingets Cen-
 ter søges i hori-
 zontale Linier,
 som drives efter
 Siden.

Derfor (Taf. VIII. Fig. 1.) Linien CD er horizontal, svin-
 gende frem og tilbage hen efter et vertikal Plan, eller hen efter Siden.
 Da om Perpendiklen AB udi B deler Linien CD i to lige store Dele
 og $AB = a$. $CB = BD = b$. $Bc = x$. $cd = dx$. Bliver
 $Ac = \sqrt{aa + xx}$, og $\int 3xx = \int dx \cdot (aa + xx) = aax + \frac{1}{3}x^3 + B$.
 B bestemmes deraf, at naar $x = -b$, er Integralet $-aab - \frac{1}{3}b^3$,
 følgelig $\int 3xx = aax + \frac{1}{3}x^3 + aab + \frac{1}{3}b^3$, og for den hele Linie CD
 $= 2(aab + \frac{1}{3}b^3)$, men for den hele Linie er $\int 3x = 2ab$. §. 157. §.
 Følgelig bliver det simple Penduls Længde $= \frac{3aa + b^2}{3a}$.

Er $b = 0$, bliver det simple Penduls Længde $= a$, og saa-
 ledes det simple Pendul selv, som det her være.

Er $a = 0$, bliver i Tyngdens Center Længden af det simple
 Pendul ∞ .

§. 99.

§. 99.

Hænger (Taf. VIII. Fig. 2.) den svingende Linie CD skiev, ligeledes i de
 alt for Resten taget, som udi næst foregaaende Tilfælde. Da om skievliggende.

man kaster den Perpendikel $Ab = p$ ned paa den (hvilken altid er be-
 kiendt, fordi $AB = a$ er given, tilligemed Vinklerne AbB og ABb)
 og kalder den bekiendte Linie bB , q . Den halve Linie CB , b , $br = x$,

$rm = dx$. Da bliver $\int 3xx = \int dx \cdot xx + pp = \frac{1}{3}x^3 + p^2x + B$.

B bestemmes deraf, at, naar $x = 0$, bliver endnu $-x = b - q$

eller $x = q - b$, saa $\int 3xx = \frac{1}{3}x^3 + p^2x - \frac{1}{3}(q-b)^3 - p^2(q-b)$

for den hele Linie er $x = b + q$. $\int 3xx = \frac{1}{3}(b+q)^3 + p^2(b+q)$

$+ \frac{1}{3}(b-q)^3 + pp(b-q) = \frac{1}{3}(2b^3 + 6q^2b) + 2ppb$. Lige-

ledes er for den hele Linie $2b$, $\int 3x = 2ab$, saa at det søgte simple

Penduls hele Længde beløber $\frac{\frac{1}{3}(2b^3 + 6q^2b) + 2ppb}{2ab}$. Men $p^2 = a^2 - q^2$

Følgelig bliver det simple Penduls Længde $= \frac{\frac{1}{3}b^2 + a^2}{a} = \frac{3a^2 + b^2}{3a}$,

og derfor den samme, som naar Linien ligger horizontal. §. 98.

Vil man, som forhen, tage Begyndelsen til x udi B , da

saaes $\int 3xx = \int dx \cdot (a^2 + 2qx + x^2)$, fordi $Ar^2 = x^2 + 2qx + a^2$,

Følgelig bliver Integralen $a^2x + qx^2 + \frac{1}{3}x^3$, hvortil maa legges

den manglende Deel, som svarer til $-x = b$, saa det fuldstændi-

ge Integral bliver $a^2x + qx^2 + \frac{1}{3}x^3 + a^2b - qb^2 + \frac{1}{3}b^3$, og for

den hele Linie, $2a^2b + \frac{2}{3}b^3$. Men $\int 3x = 2ab$. Følgelig bliver

det simple Penduls Længde, ligesom før, $= \frac{2a^2 + b^2}{3a}$.

§. 100.

Alle disse For-
andringer for-
andre ikke Sving-
gets Center.

Da det saaledes ingen Forandring giver i det simple Penduls Længde, hvad heller Linien ligger horizontal eller skraa imod Horizonten, saa tidt som den drives paa Siden, og Svingdens Centers Distance fra Henge-Punktet uforanderlig bliver den samme. Saa maa og dette Penduls Længde endnu blive uforandret, naar Linien henger vertikal, alene at den forrige Betingning vedbliver, at nemlig Svingdens Centers Distance fra Henge-Punktet ikke forandres. For derfor at see, om dette og treffer ind med den forhen §. 95 giorte Udrekning, maa agtes. At saa tidt som (Taf. VIII. Fig. 2.) CB skal falde over AB, bliver $b = a$ og $\frac{3a^2 + b^2}{3a} = \frac{4}{3}a$. Men $a = \frac{1}{2}CD$. Selgelig faaes for det simple Penduls Længde $\frac{2}{3}CD$ fuldkommen som i §. 95.

Saa deraf sees i Almindelighed. At saa tidt som Linierne drives paa Siden, eller, som vi her kalde det, hen efter det vertikale Plan. Da er det lige meget, hvad Beining eller Inklination at Linien haver imod Svingets Arel, alene at Distancen fra Svingdens Center ei forandres i Henseende til Henge-Punktet, og at Planet, hvori Svingene skee, bestandig bliver det samme.

§. 101.

Svingets Center bestemmes i det horizontale Plan, som drives hen efter Grund-Linien, eller sit eget Plan.

Svinger en Horizontal-Linie DC (Taf. VIII. Fig. 3.) hen over det horizontale Plan, og ei som før, langs hen ad det vertikale. Da maa man forestille sig en horizontal Arel FAE, troffen igiennem Heng-Punktet A, og fra alle Punkterne a i den svingende Linie CD Perpendikler som ab , der ere kastede ned paa denne Arel, saa blive de

overalt

overalt Distancerne. Følgelig disse sidste overalt lige store $= a = AB$
 og $CB = BD = b$. Man faaer derfor $\int \dot{x} \dot{x} = \int a \dot{x} \dot{x} = a \dot{x} \dot{x}$
 $+ B$. Men $B = aab$, saa $\int \dot{x} \dot{x} = a \dot{x} \dot{x} + aab$, og for den
 hele Linie $2aab$, men $\int \dot{x} \dot{x} = 2ab$. Følgelig bliver det simple Pen-
 duls Længde $= \frac{2aab}{2ab} = a$.

Saa at et saadant Pendul er et virkeligt simpelt Pendul, eller
 rettere, en Mængde af lige lange simple Penduler, som svinge med
 hinanden. Hvilket og fuldkommen vel stemmer med det, som vi for-
 hen have forklart om Tyngden, at den nemlig i den frie Bevægelse
 driver alle Inertiernes Punkter ensdan.

§. 102.

Dette sidste Exempel forklarer, hvad vi forhen have sagt, at Forskiel imel-
 der er Forskiel paa, naar Svinget skeer hen efter det vertikale og ho-
 rizontale Plan. For derfor vel at kunde stille disse to Tilfælde fra
 hverandre, maa altid vel iagttages i disse Uldregninger, paa hvad Li-
 niens Bevægelse at Hastigheden af Inertiernes beroer, for deraf at
 demme Distancen fra Henge-Punkter.

§. 103.

Jeg har opholdt mig ved de rette Liniers Sving saa længe, Svingets Cen-
 fordi man i dem, som i de letteste Tilfælde, best kunde komme efter ter bestemmes i
 alle de Hoved-Poster, hvilke i Uldregningerne for Svingets Center bør Parallelogram-
 iagttages. Jeg gaaer fra dem til Figurerne. Da de to Tilfælde
 med Tilid maa stilles fra hverandre, den ene, naar de drives hen efter
 Grund-Linien og Svingets Arel er i det samme Plan med Figuren.

Den

Den anden, naar Svinget skeer hen efter Siden og Arlen af Svinget staaer perpendicular paa Planet af Figuren. Vi betragte her først det horizontale Sving som det simpleste, og i sær uden Vanskelighed, saa tidt som Figureerne have en Arkel, paa begge Sider af hvilken de i alle Henseende ere eensdan beskafne.

Er da (Taf. VIII. Fig. 6.) BDFE et Parallelogram ophængt i C, saa $BA = AD$ og CA er perpendicular paa BD . Grensdeles om $CA = a$. $AG = c$. $Ae = x$. $ef = ab = dx$. $BD = b$.

$$\text{Da er, fordi at } ac = b; \int \frac{3xx}{3x} = \int \frac{b dx \cdot a^2 + 2ax + x^2}{b dx \cdot (a+x)} \\ = \frac{a^2 bx + abx^2 + \frac{1}{3}bx^3}{abx + \frac{1}{2}bx^2}, \text{ uden at legge en bestandig Størrelse til.}$$

Thi naar $x = 0$, er det hele Integral $= 0$, som det her at være.

Da b gaaer ud af Regningen, er det et Tegn til, at Bredden intet gier til Sagen, saa at alle Parallelogrammer af samme Høide og paa denne Maade hængte, svinge eensdan, eller i samme Tid. Er da hele Parallelogrammets Høide $AG = c$, saa faaes for det hele

$$\text{Sving } \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}.$$

Er $a = 0$. hvilken Betingning haver Sted, saa tidt som Parallelogrammet er ophængt i Midten af sin Grund-Linie eller i det Punkt A. Da er det simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}c$.

§. 104.

Man maa her iagttage en Sag af nogen Betydning, den nemlig, at hvad heller et Parallelogram henger paa den nylig sagte Maade og svinger; eller om Henge-Linien CA er bøiet imod Figuren

ren

ren og dens Grund-Linie GA, under hoed Vinkel GAD som man selv vil. Saa bliver dog altid Længden af det simple Pendul, og sælgelig Svingets Centers Veie i Figuren, de samme; alene at Svingets Arels Distance fra Tyngdens Center bliver det samme. Thi man seer let, at alle Punkterne i Parallelogrammet deres Distancer fra Arlen blive endnu de samme, som før. Sælgelig og Svingets Center det samme.

Man seer videre uden Meie, at denne samme Maade at slutte paa kan anvendes udi alle Figurer, og at dette derfor er i Henseende til dem alle almindelig sandt.

§. 105.

Slønger et Triangel DBE (Taf. VIII. Fig. 7.) horizontal hen omkring det Punkt A, og Linien AB ansees som før, for at være ubøielig og uden Tyngde. Er da $AC=a$, $DE=b$. $AB=c$. $AK=x$. $kl=dx$. Da er og $a-c:b=x-c:fh$, saa fh

$$= \frac{bx-bc}{a-c}, \text{ og } \int \frac{3xx}{3x} = \int \frac{\frac{bx-bc}{a-c} x dx}{\frac{bx-bc}{a-c} x dx} = \frac{\frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}bcx^3}{\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}bcx^2} = \frac{a-c}{a-c}$$

Men naar $x=c$ ere Integralerne. Det første $= \frac{\frac{1}{4}bc^4 - \frac{1}{2}bc^3}{a-c}$.

Det andet $= \frac{\frac{1}{3}bc^3 - \frac{1}{2}bc^2}{a-c}$. Sælgelig er det fuldstændige Integral

$$= \frac{\frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}bcx^3 - \frac{1}{4}bc^4 + \frac{1}{2}bc^3}{\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}bcx^2 - \frac{1}{3}bc^3 + \frac{1}{2}bc^2}, \text{ hvilket er for alle Triangler af}$$

Si

samme

samme Høide, siden b eller Grund-Linien gaaer plat ud af Regningen. Næmlig; om $x = a$, bliver for det hele svingende Triangel det simple

$$\text{Penduls Længde} = \frac{\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}ca^3 + \frac{1}{12}c^4}{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}ca^2 + \frac{1}{6}c^3}, \text{ men Tæller og Nævner}$$

have den fælles Divisor $a^2 - 2ac + c^2$; naar derfor med samme divideres, findes det simple Penduls Længde at være

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{6}ca + \frac{1}{12}c^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}c} = \frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}.$$

Er $c = 0$, det er, om Trianglet er hængt op til at svinge i sin Spitse B, da bliver Svingets Centers Afstand fra Spitsen $B = \frac{3}{4}a$.

§. 106.

Ligesledes i de,
hvis Grund-Li-
nie ligger skiev.

Alf §. 105 sees, at Svingets Center er det samme i alle Triangler af samme Høide, naar de ere i samme Distance fra deres Spitse af ophængte, og deres Grund-Linie er Svingets horizontale Axl parallel.

Det andet Tilfælde derimod (Taf. VIII. Fig. 8.) da Trianglets Grund-Linie ED ei er parallel Aflen AF, med hvilken at Trianglet svinger i horizontal Bevægelse; Dette Tilfælde er lidt vidtlesligere at udregne, men man kommer altid paa den samme Slutning som før.

Thi er BED et saadant Triangel, da fordi det er given i en vis Stilling imod Aflen AF, og Trianglet er givet i sig, maa Vinklerne ABE og FBD være givne, tilligemed alle Sider, selgelig og alle Vinkler i Trianglet BED, da derfor BC er vertikal eller perpendicular paa AF, er Vinklen $EBC = 90^\circ$. — ABE og
given,

given, følgerig og BC selv. Kastes Høiden af Trianglet BG ned paa ED, er den ligeledes bekiendt, saavelsom EG og EC.

Dette forudsat. Kalder man da Bc, a . BG, h . BI, x . Ia, dx . EG, b . Ec, c . ED, f . og LH antages, at være trokken parallel ED og uendelig nær th . Da fordi de Linier, som i ligedanne Figurer trekkes fuldkommen paa samme Maade, altid ere under sig og de øvrige Linier proportionerte: Bliver BG : ED = BI : LH eller $h : f = x : \frac{fx}{b} = LH$; og LH i dx , eller Elementet LHbt af Trianglet = $\frac{fx dx}{b}$, men for at faae $\int x dx$, skal dette Element multipliceres med $MN^2 = (BK + M)^2$, om KL er parallel AF, og M Tyngdens Center i LHb eller LH.

For at bestemme BK + LM, maa agtes, at ED : Bc = LH : BK, eller $f : a = \frac{fx}{b} : \frac{ax}{b} = BK = LN$. Videre er Bc : cE = BK : KL eller $a : c = \frac{ax}{b} : \frac{cx}{b} = KL$. Men $LM = \frac{fx}{2b}$, saa er $KM = \frac{fx - 2cx}{2b} = Ll - LK$.

Ydermere er BG : Gc = Ba : aK, eller $h : c - b = x : \frac{(c-b)x}{b} = aK$, men BaK og KLM ere ligedanne Triangler (MLN antages parallel BK) saa BK : aK = KM : Ml, eller $\frac{ax}{b} : \frac{c-b}{b}x = \frac{fx - 2cx}{2b} : \frac{(f/2 - c)(c-b)}{ba}x$. Sættes $\frac{(f/2 - c)(c-b)}{ba} = \frac{g}{b}$, er Ml = $\frac{g}{b}x$ og NM = $\frac{a+g}{b}x = lx$, om $\frac{a+g}{b} = l$. Saaledes bli-

ver Elementet $LHtb$ i $(MN)^2 = \frac{fl^2 x^3 dx}{b}$, hvoraf Summen er $\frac{fl^2}{4b} x^4 = \int 3xx.$

$$\text{Men } \int 3x = \int \frac{flx^2 dx}{b} = \frac{fl}{3b} x^3 \text{ og } \frac{\int 3xx}{\int 3x} = \frac{3}{4} lx.$$

Er ED parallel AF, bliver $BG = BC$, $b = a$. $EG = EC$. $c = b$, saa $g = (\frac{f}{2} - c)c - b = 0$ og $l = \frac{a+g}{b} = \frac{a}{b} = 1$, følgelig bliver $\frac{3}{4}lx = \frac{3}{4}x$, fuldkommen som i nest forrige Exempel.

Dg deraff sees, at saa tidt som to Triangler, L. VIII. §. 9. et, hvis Grund-Linie GH er parallel Arlen, som BGH, et andet, hvor den ikke er Arlen parallel, som BED, svinge over samme Plan eller Arl med lige Grund-Linier, og have sælles Tyngdes Center, saavelsom ens Distance af samme fra Arlen BL, da svinge de i samme Tid, men i det sfierre Triangel maa vel agtes, at Svingets Center M maa tages i den Linie BLC perpendicular paa GH, som gaaer igiennem Tyngdens Center L. Dette iagttaget, bliver Svingets Center i alle Triangler det samme.

§. 107.

I alle krumme Linier i Almindelighed, hvilke have en Arl, som Taf. VIII. Fig. 10. Linien DAE. Da, om de ere ophengte i Spitzsen A, bliver, naar $cA = x$ og $cf = y$. $\int \frac{3xx}{\int 3x} = \frac{\int yxxdx}{\int yx dx}$. Ere de derimod ophengte udi andre Punkter, kan dog Udregningen altid gøres for Arlen, og saaledes alle de øvrige Tilfælde henføres til denne, efter hvad der er bleven sagt §. 104. Er Henge-Punktet i C, og

og $AC = a$, bliver, som i de nylig forhen anførte Exempler, $\frac{\int 3xx}{\int 3x}$
 $= \frac{\int y(x+a)^2 dx + B}{\int y(x+a) dx + b}$, hvilket altid lader sig integrere, saa tidt som
 i de krumme Liniers givne Ligheder x kan bestemmes udi y .

§. 108.

Saaledes, om $y = \sqrt{px}$, som i den simple Parabol ophængt i A ,
 da faaes for denne Størrelse $\frac{\int 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{5}{2}} dx}{\int 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{3}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \frac{5}{7}x$.

§. 109.

Ligeledes, i samtlig Paraboloiderne eller i de krumme Linier,
 som indbefattes under denne almindelige Lighed $y^m = ax$, er fordi
 $y = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}}$, Svingets Centers Afstand fra Spitsen af den krumme
 Linie, omkring hvilken Figuren antages at slynge,

$$\frac{\int \frac{1}{a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}} \frac{1+2m}{m} dx}{\int \frac{1}{a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}} \frac{1+m}{m} dx}, \text{ hvoraf det fuldstændige Integral er}$$

$$\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}} \frac{1+3m}{m}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}} \frac{1+2m}{m}} = \frac{1+2m}{1+3m} x.$$

Er $m = 2$, bliver $\frac{1+2m}{1+3m} x = \frac{5}{7}x$, som ser i den simple Parabol.

Er $m = 3$, faaes for Svingets Center $\frac{7}{10}x$. o. s. v.

§. 110.

Vil man, i Steden for at lade Figurerne svinge om deres Spitse, henge dem op i et Punkt af deres Grund-Linie, som om et ligesidet Triangel ACB (Taf. VIII. Fig. 4.) svinger om Midt-Punktet D i dens omvendte Grund-Linie AB og $CD = a$, $AB = b$, $DL = x$, da er $ef = \frac{ba - bx}{a}$ og $\int xxx = \int \frac{ba - bx}{a} x dx = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{3}{a}} ax^3 - \frac{\frac{b}{a}}{\frac{4}{a}} x^4$ men $\int x = \int \frac{ba - bx}{a} x dx = \frac{\frac{1}{2} b a x^2 - \frac{1}{3} b x^3}{a}$, selgelig den søgte Længde af det isokrone eller i samme Tid svingende simple Pendul $= \frac{\frac{1}{2} ax - \frac{1}{4} x^2}{\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} x}$, som for det hele Triangel, naar $x = a$, beløber $\frac{1}{2} a$.

§. 111.

Antages det Stykke efc at være afbuggen parallel med AB saaledes, at $DL = c$, da er det klart, at det forrige Integral forandres til $\frac{\frac{1}{2} ax - \frac{1}{4} x^2 - B}{\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} x - b}$, hvori de bestandige Størrelser bestemmes deraf, at naar $x = c$ ber Integralet være $= 0$, saa selgelig den Deel gaaer af, som svarer til $x = a - c$, hvilken paa samme Maade, som forhen, kan bestemmes.

§. 112.

Tages i Horizontal-Slyng, som før, Punktet inden i Figuren, for Exempel, udi L i Trianglet ABC (Taf. VIII. Fig. 4.) og $CD = a$, $BA = b$, $CL = c$, $Lg = x$, da er $hi = \frac{bc + bx}{a}$ og $\int xxx = \int \frac{bc + bx}{a} x dx$, $\int x dx = \int \frac{bc + bx}{a} x dx$ hvilk

hvilke Integraler fyldestgøres ved at legge under stridig Tegnet til, hvad de blive, naar $x = -c$.

§. 113.

Er den svingende Figur en Cirkel $FABC$ (Taf. VIII. Fig. 11.) Videre. I Cirkelen og deres Stykker.
ophængt udi B . GBH et Snit af Cirklen, til hvis Sving man vil finde det simple Penduls Længde. BF Diametern $= a$. $Ba = x$.
 $ab = dx$. Da er $Aa = \sqrt{ax - xx}$, og Elementet af Segmentet eller Cirkel-Snittet $= AC$. $ab = 2dx \cdot \sqrt{ax - xx}$. Følgelig
 $\int 2\sqrt{ax - xx} = 2\int (x^2 dx \cdot \sqrt{ax - x^2})$. En Sterrelse, som let gieres integral, ved at sætte $ax - x^2 = x^2 z^2$. Da man faaer $x = \frac{a}{(1+z^2)}$
 $dx = \frac{-2azdz}{(1+z^2)^2}$ og $x^2 dx \sqrt{ax - x^2} = \frac{-2a^4 z^2 dz}{(1+z^2)^5}$. Men da Divisionen af $(1+z^2)$ ere irrationelle, nemlig $1+z\sqrt{-1}$ og $1-z\sqrt{-1}$; saa dette Integral saaledes henhører til de logarithmiske Imaginaires, hvilke man igien veed, kunde paa en reel Maade forstaaes af Cirklen, saa ville vi integrere det ved denne sidste.

$$\begin{aligned} \text{Man faaer da } \int x \sqrt{ax - xx} dx &= \int \frac{(ax^3 - x^4) dx}{\sqrt{ax - xx}} = \int \frac{-x^4 dx}{\sqrt{ax - xx}} \\ &+ \int \frac{ax^3 dx}{\sqrt{ax - xx}} = \int \frac{-x^7 dx}{\sqrt{ax^7 - x^8}} (=A) + \int \frac{ax^3 dx}{\sqrt{ax^7 - x^8}} (=a). \\ \frac{1}{8} \int \frac{-8x^7 + 7ax^6}{\sqrt{ax^7 - x^8}} dx &= \frac{1}{4} (ax^7 - x^8)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{7ax^6 dx}{\sqrt{ax^7 - x^8}} (=B, \\ B + a &= \int \frac{-\frac{7}{8}ax^5 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}} + \frac{ax^5 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}} = -\frac{a}{8} \int \frac{(-x^5 dx)}{\sqrt{ax^5 - x^6}} \\ &= -\frac{a}{48} \int \frac{(-6x^5 dx + 5ax^4 dx)}{\sqrt{ax^5 - x^6}} + \int \frac{5ax^4 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}} (=C) \\ &= -\frac{a}{24} (ax^5 - x^6)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

C

$$C = \frac{5}{48} \cdot \frac{a^2 x^3 dx}{\sqrt{ax^3 - x^4}} = \frac{5a^2}{4 \cdot 48} \cdot \frac{-4x^3 dx + 3ax^2 dx}{\sqrt{ax^3 - x^4}} + \int \frac{5a^3 x^2 dx}{64 \sqrt{ax^3 - x^4}} (=D)$$

$$= -\frac{5}{96} a^2 (ax^3 - x^4)^{\frac{1}{2}} + D.$$

$$D = \frac{5a^3}{64} \int \frac{x dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int \frac{5a^3}{64 \cdot 2} \left(\frac{-2x dx + a dx}{\sqrt{ax - xx}} \right) + \int \frac{5a^4}{128} \cdot \frac{dx}{\sqrt{ax - xx}} (=E)$$

$$= -\frac{5a^3}{64} \sqrt{ax - x^2}^{\frac{1}{2}} + E.$$

E derimod eller $\frac{5a^4}{128} \int \frac{dx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{5a^3}{64} \int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}}$, er en Cirkel-
 kel-Bue, til hvilken Afsnittet eller Abscissen $BD = x$, og følgelig
 er den Buen BG selv,

$$\text{saa } \frac{1}{2} \int x x = \frac{1}{4} (ax^2 - x^3)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{24} (ax^3 - x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{5}{96} a^2 (ax^3 - x^4)^{\frac{1}{2}} - \frac{5a^3}{64} (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} + \text{Buen BG, } \frac{5}{64} a^3.$$

Saa vidtlesfig, som denne Formular er for Cirkel-Snittene,
 saa fort bliver den for den hele Cirkel, da alle Leddene, fordi $x = a$
 tilintet gøres, undtagen det sægte, saa for den hele Cirkel er $\int x x$
 $= \frac{5}{32} a^3$. BF.

Da nu, om P betyder den halve Peripherie $\int x dx = \frac{Pa^2}{4}$.
 §. 157. Forel. saa bliver $\frac{5}{8} a$ Svingets Centers Længde for den hele
 Cirkel, eller rettere dets Distance fra Spitsen B af Peripherien,
 hvor Cirklen er ophængt.

For den halve Cirkel derimod findes Svingets Centers Distance
 fra Spitsen af Peripherien, saa som for de øvrige Cirkel-Snit ved
 Hielp af Værdierne af $\int x x$ og $\int x$, som et hvert givet Tilfælde det
 udfordrer.

§. 114.

Paa samme Maade kan man udregne alle de Tilfælde, udi hvilke Cirklen er ophængt i et Punkt inden i eller uden for Figuren, siden det alene kommer an paa at integrere den almindelige Lighed

$$\int \frac{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}{\sqrt{ax - x^2}} dx.$$

Men vi ville derved ei opholde

os, da vi strax skulde vise en ulige kortere Maade, at finde det simple Penduls Længde paa; en Maade, som er almindelig i Henseende til alle Hænge-Punkter, alene at det simple Pendul er givet, som svarer til et saadant Punkt, hvad for et det og er, og paa hvad Maade end at Figuren svinger.

§. 115.

For at forklare disse almindelige Metoder, ville vi forestille os Saa lange, som i det samme Stykke af Legemet, L. VIII. §. 12. en Materie uden Forskiel FGH ophængt udi A. Ansees Hænge-Punktets og Tyngdens Center C af den hele Figur. Kaldes desuden en uendelig liden Deel af Materien z og $\text{fz} = \text{P.}$ $\text{AC} = a, \text{AD} = x,$ da er usforandret, er det simple isokrone Penduls Længde altid det samme.

$$\text{§. 66. } AB = \int \frac{xxz}{aP} = \int \frac{(DE^2 + AE^2)z}{aP}, \text{ men dette er}$$

$$= \int \left(\frac{DC^2 - CE^2 + AE^2}{aP} \right) z, \text{ (om DE er perpendicular paa AB)}$$

$$= \int \frac{DC^2 + AC \cdot (AC - 2CE)}{aP} = \int \frac{DC^2 + AC^2 - 2AC \cdot CE}{aP} z$$

Da nu al den Deel af Tyngdens Virkning, hvilken er som CE. z , nødvendig maa tilintetgjøre hinanden paa begge Sider af Tyngdens Center C, §. 128. Forel. siden ellers i C ingen Rørbægt kunde

sk

vare,

$$\begin{aligned} \text{være, saa bliver } \int \frac{xxz}{aP} &= \int \frac{DC^2 + AC^2}{aP} z = \frac{\int DC^2 z + \int a^2 z}{aP} \\ &= \int \frac{DC^2 z + a^2 P}{aP} = a + \int \frac{DC^2 z}{aP}, \text{ hvoraf sees.} \end{aligned}$$

At siden i det samme System af Kegemer $\int DC^2 z$ altid bliver en bestandig og uforanderlig Sterrelse, saa maa nødvendig, saa længe som Henge-Punktets Distance fra Tyngdens Center, eller a , er uforandret, saavelsom Planet, hvori Svinget skeer, den hele $\int DC^2 z + a$ eller $\int \frac{xxz}{aP}$, det er, det simple Penduls Længde blive det samme og uforandret.

§. 116.

Følgelig om en given Figur (Taf. VIII. Fig. 13.) som f. Ex. EAD blev hængt op til at slynge i det Punkt o uden for Arken pAg, saa om gaar igiennem Tyngdens Center. Da om man med den halve Diameter no slaar den Cirkel-Bue po, er det det samme, hvad heller den til at slynge givne Ting ophænges udi o eller i p. §. 115.

§. 117.

Ligeledes kan man af denne Sætning $\int \frac{xxz}{aP} = a + \int \frac{DC^2 z}{aP}$ altid bestemme, hvad Længden bliver af de simple Penduler, som svare til de ophængte Tings Sving, der hænges op snart i en eller i en længere Distance fra Tyngdens Center. Thi da Længden af det simple Pendul er om $\int \frac{DC^2 z}{aP}$ større end a , eller Tyngdens Centers Afstand fra Henge-Punktet, saa sees,

1) At

1) At det simple Pendul altid haver større Længde end Tyngdens Centers Afstand er fra Henge-Punktet. ge-Punktet, for-
keert-viis pro-
portionerte.

2) At da Forskiellen imellem disse to sidste Linier altid er $\int \frac{DC^2 z}{aP}$, som er for det samme System af Legemer bestandigt, saa bliver denne Forskiel, om a ansees som foranderlig, $= \frac{z}{a}$, thi $\int \frac{DC^2 z}{P}$ er ei en Function af a . Om derfor en Ting henges op i læn-
gere og kortere Distancer, da bliver Svingets Centers Distancer fra Tyngdens Center, forkeert Viis proportionerte Henge-Punktets Di-
stancer fra samme Tyngdens Center.

§. 118.

Man seer meget let, at Nytten af disse Satninger er meget stor i Theorien af Svingets Center. Ei alene, fordi, saa tidt som Nytten af de
forrige Sætning-
ger bliver viist i
Exempler. Figurerne, hvis Sving skal undersøges, ere paa en skiev eller ube-
qvem Maade ophængte, som Taf. VIII. Fig. 13. at man da altid
kan udregne dem i Henseende til Aksen eller den Linie, som deler alle
deres smaa Elementer udi lige Dele, efter hvad vi allerede have sagt
§. 116. Men i sær, fordi man, for at finde Svingets Center, behøver
alene, at udregne et af de letteste Tilfælde, for at vide, hvad det bliver i
alle andre, siden i hvorledes end at man lader Figuren over det samme
Plan bevæge sig omkring sit Tyngdes Center, Svingets Center dog altid
bliver det samme, paa den Maade, som vi have sagt §. 115 — 117.

§. 119.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, ville vi opløse det
med nogle Exempler.

Kf 2

1) Weed

1) Veed man, efter hvad vi have sagt §. 106, (Taf. VIII. Fig. 7.) at et Triangel DBE, saa tidt som det er ophængt til at svinge udi det Punkt B, haver Svingets Center L i den Distance $BL = \frac{3}{4}BC$, borte fra B: Da finder man let, hvad Distancen bliver for samme Center, saa tidt som Figuren er ophængt, til at svinge udi et andet Punkt A. Thi kaldes BC, a . AB, c . Da bliver §. 117. 2.

$c + \frac{2}{3}a : \frac{2}{3}a = \frac{a}{12}$ til Svingets Centers Afstand fra Lyngdens Center, saa tidt som Henge-Punktet er udi A. Saaledes bliver denne Forskiel $= \frac{aa}{18.(c + \frac{2}{3}a)}$, derfor det simple Penduls hele Længde $= c + \frac{2}{3}a + \frac{aa}{18.(c + \frac{2}{3}a)} = \frac{3a^2 + 6c2 + 8ac}{6c + 4a}$, og naar $c + a$, sættes $= a = \frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}$, aldeles saaledes som forhen §. 106.

2) Ligeledes, naar man veed, som før, at Pendulets Længde er $= \frac{3}{4}BC$ i det Tilfælde, da Trianglen er ophængt til at svinge udi Spitsen B, findes let, hvad det simple Penduls Længde bliver, naar Grund-Linien af Trianglet vender op ad, som i Fig. 4, hvor vi ville antage, at det er ophængt til at svinge udi det Punkt D. Thi da i dette sidste Tilfælde det simple Penduls Længde er det samme, som i det Tilfælde, da Trianglet er ophængt til at svinge i sin Spitse, alene at Henge-Punktets Distance fra Lyngdens Center bliver den samme. §. 115. 116. Saa følger, at dersom Trianglet blev ophængt til at svinge i p , saaledes, at $pD = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}a$, var Svingets Centers Distance fra $p = \frac{3}{4}a$. Deraf findes let, hvad dette Punkts Afstand fra

fra D bliver, saa tidt som Figuren er ophængt udi D. Nemlig §. 117. 2.

$\frac{1}{3}a : \frac{2}{3}a = \frac{1}{12}a$ til Svingets Centers Distance fra Tyngdens Center i det segte Tilfælde, saa denne sidste Afstand eller Distance $= \frac{1}{6}a$. Og derfor bliver det simple Penduls hele Længde $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}DC$, som er Svingets Centers Distance fra Henge-Punktet D i Trianglet ACB.

3) Er dette Tilfælde bekiendt, da findes ligeledes Svingets Center til et hvert andet Henge-Punkt E, naar nemlig Grund-Linien vender op ad i Trianglet, som Taf. VIII. Fig. 4. thi kaldes DC, a . ED, c . da bliver §. 117. 2.

$c + \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a$ til Forskiellen imellem Svingets og Tyngdens Centers Afstand fra Henge-Punktet, hvilken derfor bliver $= \frac{a^2}{18c + 6a}$. Og saaledes bliver, saa tidt som Trianglet er ophængt til at svinge udi E med Grund-Linien op ad; Det simple Penduls hele Længde $= \frac{a^2 + 6cc + 4ac}{6c + 2a}$.

4) I Cirklen ligeledes (Taf. VIII. Fig. 11. naar nemlig, det er først bekiendt, at det simple isokrone Penduls Længde $= \frac{5}{8}BF$ for det Tilfælde, da Cirklen er ophængt til at svinge i et Punkt B af Peripherien. Saa findes dette Penduls Længde strax og uden Meie for det Punkt I, §. 117. 2. ved at sige (naar nemlig $BF = a$ og $BI = c$.

$c + \frac{1}{2}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{8}a$: Forskiellen imellem Tyngdens og Svingets Centers Distancer fra Henge-Punktet, som derfor bliver $= \frac{a^2}{16c + 8a}$. Saaledes bliver det segte simple og isokrone Penduls

Længde $= \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{16c + 8a} = \frac{8ac + 5a^2}{16c + 8a}$, naar nemlig Cirklen er ophængt til at slynge udi det Punkt I.

§. 120.

Henge-Punktet og Svingets Center kunne forbyttes, uden at det simple isokrone Penduls Længde derved forandres.

Foruden de forhen giorte Anmerkninger, bør endnu en anden iagttagelse tages, at nemlig Henge-Punktet og Svingets Center altid kunde forbyttes med hverandre, uden at det simple isokrone Penduls Længde derved i det mindste forandres. Thi (Taf. VIII. Fig. 7.) om L antages som Svingets Center, der svarer til det Henge-Punkt A, og L forbyttes med A, saa Figuren hænges op i L, til at svinge. Da bliver, i Følge §. 117. 2. om det Punkt M er Lyngdens Center, $\frac{1}{AM} : LM = \frac{1}{LM}$ til Forskiellen imellem Lyngdens og Svingets Centers Afstand fra Henge-Punktet i det Tilfælde, da Figuren er ophængt i Svingets Center L, og saaledes bliver denne sidste Distance $= AM$, hvortil, naar legges Henge-Punktets Afstand fra Lyngdens Center, $= LM$, saa bliver det simple isokrone Penduls Længde i det Tilfælde, da Figuren er ophængt udi $L = AM + LM = AL$, og selgelig det simple isokrone Penduls Længde i begge Tilfælde det samme,

§. 121.

Maade at udregne det simple isokrone Penduls Længde i de Figurer, der svinge paa Siden.

Naar Figurerne drives paa Siden, ere, som man seer af Betegnelserne, alle disse Regler ligeledes at bruge. Vi have allerede viist Maaden, hvorpaa Udregningerne i dette Tilfælde bør skee i den rette Linies Bevægelse. §. 97. o. F. Vi ville her fare fort i nogle faa Exempler, for at vise det samme i Henseende til Figurerne Sving.

Da

Da man behøver en Anmerkning meer, end den forhen giorte i de Exempler, hvor den rette Linie svingede paa Siden.

Er (Taf. IX. Fig. 4.) DAE en Figur tagen efter Behag, er det klart af §. 156 F., at om man treffer de 2 Ordinater i Figuren dn og fk , som vi kalde her y ; deres uendelig liden Distance fra hverandre gb , dx og Ag , x . Da for at betiene sig af den forrige Regel, er det nødvendigt, at betragte det lille Parallelogram $dnkf$, som deelt i uendelig mange andre smaa fast forsvindende Parallelogrammer, hvis smaa Indhold fast ei ere adskillige fra deres Tyngdes Centrer; at multiplicere dem med Quadraterne af deres Distancer fra Henge-Punktet A, og siden at dividere, som før, med Summen af Inertierne, eller, hvilket kan være det samme, af Tyngderne multiplicerede med deres felles Tyngdes Centers Distance fra Punktet A. Denne Betragtningens-Maae er her nødvendig, fordi de smaa Dele i Elementet $dnkf$ have ei meer, som før, i den horizontale Bevægelse samme Fart, men have hver for sig deres adskillige Bevægelse.

Kaldes da ethvert af disse smaa Parallelogrammer, som B eller L. 3. Summerne af alle 3 i alle Quadraterne af Distancerne fra A, maa da under et tages. Men, om y sættes foranderlig i Henseende til den samme Abscisse Ag, er altid $BA = \sqrt{x^2 + y^2}$ i Almindelighed, og $gb = dx$ er Høiden af det lille Parallelogram L eller B, hvis Bredde er dy , siden y i denne Henseende er bleven sat foranderlig: Derfor bliver Summen af alle disse smaa Parallelogrammer, der udgiøre Parallelogrammet $dfkn$, multiplicerte med Quadraterne af deres Distancer fra A $= \int dx dy \cdot (x^2 + y^2)$. Men i denne Tilfælde blive bestandig, imedens at y og dy forandres, x og dx uforanderlige, derfor faaes

$$\int dx dy. (x^2 + y^2) = x^2 dx y + \frac{1}{3} y^3 dx,$$

som er det Integral, eller den Forandring, der behøves, for at finde hvad hele Parallelogrammet bliver, naar alle dets Dele ere multiplicerte i Quadraterne af deres til dem svarende Distancer fra A.

Dette gjort; har man alene nedig, at tage baade x og y for anderlige, som sædvanlig, hele Figuren igiennem, for at finde dennes Indhold eller Summen af alle Parallelogrammer, som *ndfk*, multiplicerte med de til dem svarende Distancer fra Henge-Punktet A deres Quadrater, og selgelig, da i Henseende til den hele Inerties Multiplication med dens Tyngdes Centers Distance fra A ingen Forandring i denne Henseende kan forekomme, da bliver, saa tidt som Figurerne drives paa Siden,

$$\frac{\int x^2 dx}{\int x} = \frac{\int x^2 y dx + \frac{1}{3} y^3 dx}{\int x y dx}.$$

§. 122.

Svinaerts Center bestemmes i Parallelogrammer, som drives paa Siden.

Da den første Deel af dette Integral eller $\frac{\int x^2 y dx}{\int x y dx}$ er just det samme, som vi før §. 107. havde i den Tilfælde, da Figuren blev dreven hen efter Grund-Linien, thi y tagen for den halve eller hele Ordinat gjør her ingen Forskiel, da den findes af samme Heide i begge Integraler; saafæes, at man har alene nedig at legge dertil det andet Stykke $\int \frac{1}{3} y^3 dx$ hvilket vi ville oplyse med nogle saa af de nyttigste Exempler.

Som om Figuren er (Taf. VIII. Fig. 6.) et retvinklet Parallelogram, ophengt udi C, $cA = a$, $Ae = x$, $ef = dx$, $Ag = c$,
BD

$$\begin{aligned}
 BD &= b, \text{ da er efter det allerede forhen fundne §. 103. } \frac{\int x^2 y dx}{\int x y dx} \\
 &= \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}. \text{ Videre findes, fordi her } y = \frac{1}{2}b, \frac{\int \frac{1}{2}y^3 dx}{\int x y dx} \\
 &= \frac{\int \frac{1}{24}b^3 dx}{\frac{b}{2} \int dx (x+a)}, \text{ som, naar } x = c \text{ beløber for det hele Paralle-} \\
 &\text{logram til } \frac{\frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}c + a}, \text{ hvoraf sees; at da Grund-Linien her ei gaaer}
 \end{aligned}$$

ud af Regningen, er Bredden af Parallelogrammet ikke ligegyldig i dette Tilfælde, saaledes, som vi saae, at den var i det andet, naar den blev drevet paa Siden.

$$\text{Er } a = 0, \text{ da bliver det simple Penduls Længde} = \frac{\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}c},$$

naar nemlig Henge-Punkten er midt i Grund-Linien, i A.

§. 123.

Den Tilfælde, da et retvinklet Parallelogram (T. VIII. §. 6.) ligeledes i Parallelogrammer, DBEF henges op i en af sine Vinkler, som D, til at svinge, er lidt som svinge, op- vanskeligere, men siden vi have seet §. 115. og folg. at Svingets Cen- hængte i en af de- ter og det simple Penduls Længde er det samme, saa længe Distancen res Kanter. fra Tyngdens Center og Planet, hvori Svinget skeer, blive de samme, saa i Steden for at giøre Udregningen i Henseende til den halve Diagonal pD , kan den giøres i Henseende til Aksen AG , alene at, da p er Tyngdens Center, $pD = pK$, og at i K er Henge-Punktet.

Dette forudsat. Om da $BD = b$, $AG = c$, $AK = a = Dp$
 $-\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2} - \frac{1}{2}c$, saa bliver Svingets Centers Distance.

§. 122.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{a + \frac{1}{2}c}, \text{ og naar i Steden for } a \text{ sættes dens} \\
 &\text{Værdie, } \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2} - \frac{1}{2}c; \text{ saa bliver } \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{a + \frac{1}{2}c} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{c^2 + b^2} = \frac{2}{3}\text{ED. eller } \frac{2}{3} \text{ af den hele} \\
 &\text{Diagonal.}
 \end{aligned}$$

§. 124.

Ligeledes i
Trianglerne.

Ligeledes om et isoskel eller ligesidet Triangel er ophængt i sin
Spitse og slynger paa Siden (Taf. VIII. Fig. 9.). Er da $BC = a$,
 $HG = b$, $Bc = x$, saa bliver $fh = \frac{bx}{a} = 2y$, og efter det for-

hen fundne §. 105 er $\frac{\int x^2 y dx}{\int xy dx} = \frac{3}{4}a$, men $\frac{\int \frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy dx} = \frac{\int \frac{\frac{1}{24}b^3 x^3}{a^3} dx}{\frac{\int bx^2}{2a} dx}$

$$= \frac{\frac{1}{16}b^2 x}{a}, \text{ og for det hele Triangel } \frac{b^2}{16a}, \text{ saa den hele Længde af}$$

det søgte simple Pendul er $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

§. 125.

Er et Triangel (Taf. VIII. Fig. 4.) ophængt i Midpunktet D
af sin Grund-Linie, da er §. 119. 2. den første Deel af Integralen

$$= \frac{1}{2}a. \text{ Den anden, eller } \frac{\int \frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy dx}, \text{ om } DC = a, AB = b, CL = x,$$

$$\text{ef} = \frac{bx}{a} \text{ er } \frac{\int \frac{1}{3}b^3 x^3 dx}{8a^3}, \text{ dividert med } \int (a-x) \frac{bx}{c} dx = \frac{\frac{1}{12}b^3 x^4}{8a^3} : \left(\frac{abx^2}{2a} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{1}{3}bx}{a} \right)$$

som

som, naar $x = a$, bliver for det hele Triangel $= \frac{b^2}{8a}$. Hvoraf man

seer, at det simple Penduls Længde er i dette Tilfælde $\frac{1}{2}a + \frac{1}{8}\frac{b^2}{a}$.

§. 126.

Er derfor (Taf. VIII. Fig. 14.) et retvinklet isoskel Triangel CBD ophengt i Midt-Punkten A af sin Grund-Linie, da bliver i §. 125

$CA = \frac{1}{2}b$, $AB = a$, og det hele simple Penduls Længde $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{8}\frac{b^2}{a} = a$, saa i dette Tilfælde er den hele Høide AB det simple Penduls Længde; thi $\frac{1}{4}b^2 = a^2$, fordi CBD er 90° .

Men henges et saadant isoskel retvinklet Triangel op i sin Spitse B, da er det simple Penduls Længde $= \frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a} = a$, §. 124. fordi $b = 2a$. Hvoraf man seer, at det kommer ud paa et, hvad heller at et isoskel retvinklet Triangel henges op til at svinge i Spitsen af sin rette Vinkel B, eller i Midt-Punktet A, af sin Grund-Linie CD.

§. 127.

For Resten kan man kortelig agte, at alt, hvad der er blevet sagt fra §. 115—117, passer sig ikke mindre til Figurerne, af de rette Staurer at bestemme Svingets Center i de skieve. saa tidt som de drives paa Siden, end vi forhen §. 119 have viist i Exempler, at det tilkommer dem i det Tilfælde, da de drives hen efter deres Flade. Nemlig, man haver her, ligesom forhen, den Fordeel, alene at sege, hvad Svingets Center bliver i det letteste Tilfælde, for siden at bestemme i alle andre, hvad det er.

Videre sees, at saa tidt som Svingets Center er fundet for de rette Figurer, som for Ex. for det isoskele Triangel GBH (Taf. VIII. Fig. 9.) er det og fundet for alle andre skieve af samme Art, for Ex. for Trianglet BED, alene at Høiden BC er i begge Triangler den samme, saavel som Grund-Linien ED. Thi da Svingets Center, saa tidt som de samme rette Linier drives paa Siden, er altid det samme, hvad heller Linien ligger horizontal eller skiev imod Horizonten. §. 100. Trekkes da i Trianglet BED, igiennem Midten C af Linien ED den horizontale Linie GH saaledes, at $CG = CE$ og at $DC = CH$; siden da ED svinger i samme Tid, som GH, og ligeledes ecd parallel ED i samme Tid, som gch , parallel med GCH, og dette gielder overalt i begge Figurerne, saa maa Svingets Center i begge være det samme. Man kan ligeledes og paa selv samme Maade slutte til de andre Figurer, saa at, i Steden for at søge Svingets Center i de skieve, dette Punkt kan søges i de rette, det er i de, hvis Dele ere paa begge Sider af Arlen i alle Henseende de samme.

§. 128.

Udregning for
Parabolerne.

Er den slyngende Figur en Parabol, da er efter det forhen fundne §. 108. den første Deel af Integralen $\frac{2}{3}x$. Den anden Deel

$$\text{derimod } \int \frac{\frac{1}{2}y^3 dx}{fxy dx} = \int \frac{px \sqrt{px} dx}{3} : \int x \sqrt{px} dx = \frac{\frac{2}{5} p \sqrt{(px)^{\frac{5}{2}}}}{\frac{2}{5} \sqrt{(px)^{\frac{5}{2}}}} = \frac{p}{3}, \text{ saa}$$

det søgte simple Penduls hele Længde er $= \frac{p}{3} + \frac{4}{7}x$.

§. 129.

§. 129.

Er (Taf. VIII. Fig. 11.) GBH et Cirkel=Enit, som ser ligeledes i Cirk.
§. 113, i B Henge=Punktet; da, naar det svinger i det vertikale Stykker.
Plan eller paa Siden, bliver $\frac{1}{3}y^3 dx$, eller simpel hen $\int y^3 dx$

$= \int (ax - xx) \sqrt{ax - xx} dx = \int \frac{(a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4) dx}{\sqrt{ax - x^2}}$, hvilket integrert, som ser §. 113, giver

$$\frac{1}{3} \int y^3 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^8 - ax^{\frac{7}{2}}}{4} = \frac{x^6 + ax^{\frac{5}{2}}}{8} \cdot 3a \right. \\ \left. - \frac{x^4 + ax^{\frac{3}{2}}}{32} a^3 + \frac{3a^3}{64} \frac{ax - xx^{\frac{1}{2}}}{2} + \int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}} \right)$$

men $\int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{3}{64} a^3 \cdot BG$, om $BD = x$. Hvilket altsaa
er Nævneren i Distancen af Svingets Center fra Henge=Punktet B i
Segmentet GBH.

Man ser let, at for den hele Cirkel, eller naar $x = a$, bliver $\sqrt{ax - xx}$ overalt $= 0$, saa at alene $\frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}}$
er i dette Tilfælde det fulde Integral. Kaldes Peripherien P, er
dette Integral $\frac{1}{3} \left(\frac{3}{64} a^3 \cdot \frac{1}{2} P \right)$, og naar man dividerer med Halvdelen
af den hele Cirklets Tyngde i Halv=Diametern, eller i Henge=Punktets
Distance fra Tyngdens eller Cirkelns Center, det er med $\int xy dx$, faaes

$$\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xy dx} = \frac{\frac{1}{64} \cdot 2 a^3 P}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} a^2 P \right)} = \frac{1}{8} a,$$

Men i Folge §. 113 var i Svinget hen efter Grundlinien det simple
isokrone eller i samme Tid svingende Penduls Længde $= \frac{5}{8} a$, da
derfor $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) a = \frac{3}{4} a$, saa er det simple Penduls Længde i det vertikale
Sving saa stor som de $\frac{3}{4} a$ Dele af Diametern. §. 130.

§. 130.

Er Figuren (Taf. VIII. Fig. 15.) en Sector af en Cirkel eller et Cirkel-Snit fra Centret, som CAB, ophængt i sit Center C, da er Udregningen ikke vanskelig, alene at man i Forveien agter, hvad der er bleven bevist §. 107. a. Forel., at om $AD = \frac{1}{2}ADB = \frac{1}{2}A$, $AE = \frac{1}{2}AB = C$, og Halv-Diameteren $CD = R$, da bliver i Sector ACB Tyngdens Centers Distance fra Centret $C = \frac{\frac{1}{2}C \cdot R}{\frac{1}{2}A}$

$$= \frac{2C \cdot R}{3A}.$$

Dette forudsat, er der ingen Vanskelighed i at bestemme Svingets Center i Cirkel-Snittet CAB, og det uden at bestemme sig om den sidste Regel §. 121. Thi man seer let, at om CD er Midt-Linien i Sector, og man med en ubestemt halv Diameter i den, som med CF, slaar de Cirkel-Buer *ab*, *cd*, som vi ville sætte, at være hinanden uendelig nær, da er Farten eller Bevægelsen i alle Delene af Elementet *abdc* den samme, og dette Elements Tyngdes Center ndi *f*. Kaldes da *Cf*, *x*, saa bliver $CD : AD = Cf : fa$, $R : \frac{1}{2}A = x : \frac{\frac{1}{2}Ax}{R}$, og $\frac{Ax}{R} dx$ er Elementet *abdc*, følgelig $\int x dx = \int \frac{Ax^3 dx}{R} = \frac{\frac{1}{4}Ax^4}{R}$, og for den hele Sector, da $x = CD = R = \frac{1}{4}AR^3$.

$$\text{Altsaa bliver } \int \frac{x dx}{x^3} = \frac{\frac{1}{4}AR^3}{\frac{\frac{2}{3}CR \cdot \frac{1}{2}AR}{A}} = \frac{\frac{3}{4}AR}{C}, \text{ som er i Cirkel-}$$

Snittet fra Centret CAB det simple Penduls Længde og Distance fra Hænge-Punktet C.

§. 131.

§. 131.

I Henseende til de sammensatte Penduler, som forekomme i Den almindelige Regel for Svingers Centers Bestemmelse i Legemerne, dem, som man forestiller sig, at blive til ved en Figurs Omvæltning om en fast Arel. Da i alle deslige Legemers Slynkning man efter det bevises. forhen sagte vel maa see paa, hvad Inertier der bevæges ensdan, saa kan det i de ved Figurers Omvæltning til bleve Legemer gøres paa den Maade, som vi strax her skulle anfere, hvilken virkelig ikke bestaaer i andet, end at bringe deslige Legemer til den almindelige Regel §. 94, efter den §. 121 viiste Maade, nemlig ved en dobbelt Differentiationslighed, og de deraf paa en behørig Maade tagne Integraler.

Man veed, at i alle de Legemer, hvilke man kan forestille sig, som at være bleve til ved en Figurs Omvæltning om sin Arel, er Snittet parallel Grund-Linien overalt en Cirkel.

Er ABC (Taf. IX. Fig. 1.) et saadant Legeme, EFGH er dets Snit parallel med Grund-Fladen BgCK, da om et af de smaa Punkter i EFGH som p slynger, er det klart, at om Diametern EG trekkes, og det materielle Punkt p kaldes z , bliver $\int z \cdot Ap^2$ Summen af alle Inertiernes i Cirklen EFGH multiplicerte med Quadraterne af deres Distancer fra Henge-Punktet A, og altsaa hvad vi her have kaldet $\int z \cdot xx$.

Men $Ap^2 = AD^2 + Dp^2$. Kaldes AD, x . DC, eller Dp v . Den halve Ordinate ab, y . ac, dv . Da er $\int z \cdot Ap^2 = \int z \cdot (x^2 + v^2) = \int z \cdot x^2 + \int z \cdot v^2$.

Man maa herved agte, at i Henseende til samlig Inertiernes Sving i den samme Cirkel EFGH er x bestandig; selgelig, dersom et Element af Inertien i denne Halv-Cirkel antages som p , at bestaae af den

perpens

perpendikulære halve Ordinate ab i ac , eller af ydv , da skeer, i Henseende til x , Svinget, som om Bevægelsen i alle Punkterne var den samme, ligesom forhen i et efter Grund-Linien, saa man derfor alene behøver i $x^2 \int \dot{y} dv = x^2 \int y dv$, at tage Summen af alle Inertiernes, som man let seer, er Quart Cirklen PGHE.

Er da Forholden af Diametern til Peripherien $1 : p$, bliver Peripherien til Diametern $2v = 2vp$, og $\frac{v^2 p}{4} = \text{EHD}$, saa $x^2 \int \dot{y} dv = \frac{p}{4} x^2 v^2$, og for den hele Cirkel $px^2 v^2$, hvilket, naar for v sættes $DE = r$, bliver for den hele Cirkels EDGF Integral $px^2 r^2$.

Saaledes have vi betragtet Inertiernes Moment efter Quadraten af Distancen, for saavidt som de langs hen efter ab , som ser i Bevægelsen efter Grundlinien, det er, i Henseende til x have det samme Sving. I Henseende til $\int \dot{y} v^2$, eller $\int y dv \cdot v^2$, kunne de derfor nu ansees som smaa Længder, der ligge langs hen efter v , da deres Sving i alle Punkter, som a eller c bliver foranderlig, fordi v idelig forandres. Men $y = \sqrt{r^2 - v^2}$, saa $\int y dv \cdot v^2 = \int v^2 dv \cdot \sqrt{r^2 - v^2} = \int \frac{(v^2 r^2 dv - v^4 dv)}{\sqrt{r^2 - v^2}}$, hvoraf Integralen er $\frac{1}{4}(r^2 v^6 - v^8)^{\frac{1}{2}} - \frac{r^4}{8}(r^2 v^2 - v^4)^{\frac{1}{2}} + \frac{\int \frac{1}{8} r^4 dv}{\sqrt{r^2 - v^2}}$, men $\frac{r dv}{\sqrt{r^2 - v^2}}$ er Buen fra Centret regnet, som svarer til Abscissen fra Centret v , i en Cirkel, hvis Halv-Diameter $= r$.

Følgelig, naar $v = r$ bliver den den hele Quadrant, og i vores Tilfælde er, naar $v = r$, $\frac{r dy}{\sqrt{r^2 - v^2}} = \text{HE}$. Følgelig bliver $\frac{1}{8} r^3 \cdot \text{HE} =$

$\frac{1}{4} r^2$.

$\frac{1}{4}r^2 \text{HE} \cdot \frac{r}{2} = \text{Quadrant-Rummet EHD} \cdot \frac{1}{4}r^2$, og man betragter, som før i $\int x^2$, det hele Cirkelrum, saaes for det fuldstændige Integral $\text{EHD} \cdot r^2$.

Thi, naar $r = v$, bliver $\frac{1}{4}(r^2 v^6 - v^8)^{\frac{1}{2}} - \frac{r^4}{8}(r^2 v^2 - v^4)^{\frac{1}{2}} = 0$, saa det hele Integral af $\int v^2 = \text{EHD} \cdot r^2$.

Er som før 1 : p Forholden af Diametern til Peripherien, da er Cirkelns Indhold $= r^2 p$, naar Halv-Diametern $= r$. Sælgelig bliver $\text{EHD} \cdot r^2 = \frac{1}{4}pr^4 = \int v^2$.

Altsaa bliver $\int \sqrt{x^2 + v^2} = px^2 r^2 + \frac{1}{4}pr^4$, som er Momentet af alle Inertierne i Quadraterne af Distancerne fra Henge-Punktet udi Cirkel-Fladen EFGH.

Derfor denne Cirkel-Flade multipliceres med dx , saaes en uendelig lidet høj Cylinder, og af lutter deslige Cylindriske Elementer bestaaer det hele givne Legeme ABC, men r , som før var bestandig i de forrige Integrationer, bliver nu i denne sidste Henseende foranderlig; vil man da kalde den y , for at holde Lighed med de forrige Integraller, saa saaes for Elementet af ABC, betragtet med alle sine Momenter som Quadraten af Distancen, dette nye Differential $px^2 y^2 dx + \frac{1}{4}py^4 dx$ og $\int (px^2 y^2 dx + \frac{1}{4}py^4 dx) = \int x x$.

Siden, som før er seet §. 121, i Henseende til $\int x$, ingen Forandring foreskalder i det horizontale og vertikale Sving, saa bliver $\int x dx$, hvad den skulde være i den første Bestemmelse, som $\int x^2$ i $\int x^2$, og da der $z = pr^2$, eller nu py^2 , derfor og det cylindriske Element $py^2 dx$, saa bliver $\int x = \int pxy^2 dx$, og saaledes er for Legemerne, der beskrives ved Omvæltning, $\frac{\int x x z}{\int x z} = \frac{\int px^2 y^2 dx + \frac{1}{4}py^4 dx}{\int pxy^2 dx}$.

§. 132.

Swingers Cen-
ter bestemmes i
Kuglerne.

Er det svingende Legeme en Kugle, ophængt i et Punkt af sin Peripherie (Taf. IX. Fig. 2.), da om $GH = x$, $IH = y$, $GF = a$, bliver $y = \sqrt{ax - xx}$, $yy = ax - xx$, $y^4 = a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4$, og følgelig

$$\int \frac{4y^2 x^2 + y^4}{4} dx = \frac{ax^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}a^2 x^3 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{5}x^5}{4}$$

som sammenlagt, og siden for x sat a , for at faae den søgte Længde for den hele Kugle, beløber $\frac{7}{120}a^5$.

Derimod er $\int xy^2 dx = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$ og for den hele Kugle, naar $x = a = \frac{1}{12}a^4$, saa man faaer for den søgte Længde $\frac{7}{120}a^5$: $\frac{1}{12}a^4 = \frac{7}{10}a$.

§. 133.

Veed man Længden af dette Pendul, som svarer til et Henge-Punkt, tagen i Kuglens Peripherie udi G, da finder man siden let, hvad Længden bliver for et hvert andet Punkt A, hveri Kuglen kan blive ophængt, thi er cb Pendulets Længde neden for Kuglens Tyngdes Center i den første Tilfælde, da samme er hængt op udi G; saa bliver Længden ca eller Distancen fra Tyngdens Center, naar den hænges i A, deraf let at finde §. 117, at cb og ca forholde sig i forkeert Forhold af Længderne Gc og Ac , følgelig om $Gc = r$, $Ac = l + r$, da er cb (eller $\frac{7}{5}r - r = \frac{2}{5}r$): $(ca)x = \frac{1}{r} : \frac{1}{l+r}$, saa $x = ca = \frac{\frac{2}{5}rr}{l+r}$ og det hele simple Penduls Længde, som svarer til Henge-Punktet udi A $= l + r + \frac{2rr}{5(l+r)}$.

Man

Man seer deraf, at dersom r er meget liden imod l , kan $\frac{2\pi r}{l}$ ansees som intet imod $l+r$, selgelig er dette den i Forelæsningerne omtalte Tilfælde, naar nemlig Pendulet er langt og den halve Diameter af den paaahengte Kugle meget liden, at man kan holde Pendulets Længde for at være Distancen imellem Henge-Punktet og Tynghdens Center.

§. 134.

Er det slyngende Legeme en Keile, som slynger om sin Spitse, 3 Keilerne.
og Høiden (Taf. IX. Fig. 3.) $AB = a$, Diametern i Grund-Plas
den $CD = b$, $Af = x$, da er $ef = y = \frac{bx}{a}$ og

$$\int \frac{4y^2 x^2 + y^4}{4xy^2 dx} = \int \frac{(b^2 x^4 dx + b^4 x^4 dx)}{a^2 \cdot 4a^2} = \frac{\frac{1}{5}b^2 x^5 + \frac{b^4}{20a^2} x^5}{\int \frac{b^2 x^3}{a^2} dx} = \frac{(b^2 x^4) : 4a^2}{\frac{b^2 x^4}{a^2}}$$

hvilket for den hele Keile, naar $x = a$, beløber $\frac{4a^2 + b^2}{5a}$.

Saafermt Henge-Punktet antages at være udi F, kan det simple Penduls Længde findes paa samme Maade, som er bleven brugt udi nest forrige Exempel.

Antages Keilen at slynge, ophængt udi Midt-Punktet af sin Basis. Da om $Bf = x$ er $ef = y = \frac{ba - bx}{a}$ og

$$\int \frac{4y^2 x^2 + y^4}{4xy^2 dx} = \left(\frac{\frac{1}{3}b^2 a^2 x^3 - \frac{1}{2}b^2 a x^4 + \frac{1}{5}b^2 x^5}{a^2} + \frac{b^4 a^4 x}{1} - \frac{4b^4 a^3 x^2}{2} + \frac{6b^4 a^2 x^3}{3} - \frac{4b^4 a x^4}{4} + \frac{b^4 x^5}{5} \right) : 4a^4$$

276 Femte Tilfæg. Om de sammensatte Penduler.

$(\frac{1}{2}b^2a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}b^2x^4):a^2$. Hvilket, naar x sættes $=a$, og alle Størrelserne sammenlægges, giver for det simple Penduls Længde, som slynger i lige Tid med den hele Keile $\frac{2}{3}a + \frac{3b^2}{5a}$.

§. 135.

§ Cylindrene.

Slynger en Cylinder om Centret af sin Grund-Flade, og dens Høide kaldes a , den halve Diameter i Grund-Fladen b , og Begyndelsen af x tages i Henge-Punktet, da er $y=b$ og

$$\frac{\int 4x^2ydx + y^4dx}{4\int xy^2dx} = \frac{\frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{1}{4}b^4x}{\frac{1}{2}b^2x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{b^2}{2x},$$

er $x=a$, da faaes for den hele Cylinder det søgte simple Penduls Længde $=\frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

§. 136.

§ paraboliske Konoider.

Ligeledes, om en parabolisk Konoide eller Keile slynger, da er $y=\sqrt{px}$, og man faaar, ligesom før,

$$\frac{\int 4x^2ydx + y^4dx}{4\int xy^2dx} = \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a.$$

Man kan paa samme Maade giere Udregningerne udi andre Tilfælde, saa vi ei derved ville længer opholde os.

Niende

Niende Forelæsning.

Om Central-Kræfterne i den cirkulære Bewægelse.

§. 162.

Vi lovede i vores sidste Forelæsning at vise, hvorledes Den letteste Tingenes Fart eller Hastighed, kunde tilintetgjøres Maade, at fore- Tyngden. For at sætte denne Sag i sit rette Lys, er det stille sig Central- nødvendigt, at vi forud tale om Central-Kræfterne, og det Kræfterne paa, saa meget meer, som det er paa dem, at de allervigtigste For- bliver viist. klaringer over Naturen beroer. De ere ei alene i Mechanik, men i Physik og den hele høiere Kundskab om det store Verdens System de vigtige Hjelpe-Midler, hvorved vi see ind i det allermest skjulte i Naturens Virkninger, saa man kan med Sandhed sige, at Kundskaben om Central-Kræfterne er en med af de allervigtigste i det Menneskelige.

For derfor at gjøre en Begyndelse med at forestille os de saa kaldte Central-Kræfter paa den forstaaeligste og letteste Maade, ville vi (Taf. IX. Fig. 6.) forestille os et Plan eller et Bret, som det Blad, f. Ex., hvorpaa Cirklen GAF er trokken. Vi ville i dette Plan betragte et Punkt C, og i det en Traad CA fæstet fast, og i Enden af Traaden i A en

liden Kugle. Er da Brettet horizontal, saa er det klart, at Tyngden af Kuglen hviler paa Brettet, Kuglen derfor maa blive ubevægelig liggende, følgelig ligger og Traaden CA i denne Tilfælde ganske slap og løs, uden at være spændt af Kuglen.

§. 163.

Naar alt nu er i den nylig omtalte Stand, antager man da, at paa hvad Maade det end og skeer, Kuglen bringes til at løbe om i en cirkulær Bevægelse paa Brettet, f. Ex. om Brettet ligger med en bevægelig Tap i et hult cylindrisk Hul, som i Taf. IX. Fig. 5, og drives om enten umiddelbar med Haanden, eller og middelbar ved Hielp af en Snor. Da seer man let, at Kuglen i A, siden Bevægelsen strax begynder at blive retliniet efter den Drive-Linie AD, maa søge at bevæge sig fort hen efter Tangenten AD, men da den holdes tilbage af Traaden AC, som er fæstet fast i det Punkt C, saa er det ligesaa klart, at Traaden staaer Bevægelsen imod, at den hindrer Kuglen i at løbe fort efter AB; at den, om Hastigheden i Kuglen idelig varer ved, tvinger denne til at bevæge sig omkring i Cirkel-Peripherien AFG, og at derfor Traaden selv under denne Bevægelse tillige med Punktet C maa spændes og trykkes ligesaa stærk, som de selv holde den i Bevægelse værende Kugle A tilbage, saa man ved at kiende Størrelsen af Centrifugal-Kraften, kiender tillige den Kraft, hvormed Traaden og Centret spændes.

§. 164.

Deraf forstaaer man let, at alt som Hastigheden i Kuglen bliver stærkere, bliver dens Fart, folgelig dens Kraft, til at trykke Centret C, og at spænde Traaden CA, eller Ce, alt stærkere og stærkere; saa at tilsidst Traaden kan blive saa stærk spændt, at den maa bryde, om den end selv er af en anseelig Fasthed og Styrke.

§. 165.

Dersom man i Steden for at ansee Traaden, efter det forhen sagte, fæstet udi C, betragter den nu som løs, og forstiller sig i den Sted i dette Center en Tridsse C med en Traad, som er løs og gaaer omkring Tridsen, førende i sin ene Ende Kuglen A, i den anden en Tyngde T, da er det klart, at Tyngden T gjør nu den Modstand, som Centret C før gjorde, og at den trekker bestandig Kuglen ind imod Centret, imidlertid at dens Fart bestandig fører den fra Centret.

Ligesledes og
hvorledes Bevæ-
gelsen paa Si-
den kan have
Tyngden.

Og man seer fremdeles let uden Noie, at da Farten af Kuglen, som driver fra Centret, idelig bliver større og større, alt som Hastigheden voyer i dens Bevægelse, saa maa Driften fra Centret nødvendig og kunne blive net op saa stærk, saa den er ligesaa stor som Kraften, der driver til Centret udi T, det er, saa stor som Tyngden. Folgelig seer man, at Hastigheden i Bevægelsen ei alene kan have en Deel af Tyngden, men endog have den ganske og aldeles.

§. 166.

§. 166.

Og den krum-
linede Bevægelse
se kan blive ved-
varende.

Antager man endelig i Steden for Tyngden T en Kraft i Naturen, hvilken ligesaa stærk som den og overalt drev den Inertie, der bevæges, ind imod Centret af Cirklen; imidlertid at Hastigheden af Bevægelsen, ligesom før, idelig førte Inertien længer bort fra dette Center; da maatte alt endnu blive af samme Beskaffenhed som før. Saa man deraf ydermere seer, hvorledes et Legeme idelig og bestandig kan blive ved at bevæge sig i en og den samme Linie, omkring et vist Punkt eller Center. Saafermt nemlig, at det bevæges med en Hastighed, der i en given Tid driver det ligesaa langt fra Centret, som en anden Kraft imidlertid driver det ind imod Centret.

§. 167.

Det foregaaende
de oplyses og be-
kræftes ved Er-
faring.

Man kan ved meget lette og simple Erfaringer oplyse det allerede sagte, at nemlig af deslige Kræfter en kan have den anden, eller, for at tale mindre almindelig, at Hastigheden af Bevægelsen kan formindske Tyngden. Saaledes er det en gemeen Erfaring, at, naar et Glas er fyldt med Vand, og det bevæges med en vis Hastighed, da falder ikke en Draabe af Vandet ud af Glasset, uagtet at Mundingen vendes ned efter og intet hindrer Vand-Draaberne i deres Fald uden Bevægelsen alene. Driver man derpaa Glasset langsommere om, saa Hastigheden bliver mindre, og endelig meget liden, da falder Vandet ud af Glasset langsommere eller hastigere, eftersom Hastigheden af Bevægelsen er større eller mindre til.

Det

Det er af denne samme Årsag, fordi nemlig at Hastigheden af Bevægelsen hæver Tyngden, at en Steen, som drives omkring i en Slynge, stiger alt høiere og høiere, det er, bliver alt lettere og lettere, eftersom at Hastigheden, hvormed Slingen drives, bliver større og større.

§. 168.

Skiont vi i disse Forelæsninger langt fra ikke foretage os de Forsøg, hvorved Theorien af Central-Kræfterne omstændelig vises. Saa kan jeg dog ikke undlade, at anføre en af de allersimpleste, hvorved det i §. 162 — 165 allerede sagte umiddelbar bekræftes.

ACB nemlig T. IX. F. 5. er en rund Skive i Form af et Bord, som hviler paa en Fod saaledes, at den overmaade villig kan bevæge sig omkring det Punkt *f*, naar ACB drives med Haanden rundt om paa et Sted i dens Peripherie, som for Ex. i B. En Blye-Kugle *c* hester fast ved en Traad *dc* i det Punkt *d*, saaledes at *c* frit kan bevæge sig omkring det Punkt *d* paa alle Sider. I Begyndelsen, i sær om ACB drives hastig omkring, følger Kuglen saa langt fra ikke Bevægelsen af Skiven, at den meget meer synes at gaae tilbage; hvilket er en nødvendig Folge af Inertien, hvis Direktion altid gaaer tvertimod den bevægende Krafts Direktion, §. 10. Men siden bliver i *c* Hastigheden alt større og større, indtil den bliver omsider den samme, som Skivens. Da under Bevægelsen Traaden *cd* bliver alt stærkere og stærkere spændt, indtil endelig at bryde, om Bevægelsen bliver meget hastig.

§. 169.

Saafermt man i Steden for at legge Kuglen over Skiven ABC paa den nylig omtalte Maade, skruer en Gaffel gk med to smaa Grene udi k saaledes fast i Brettet, saa Traaden dge (forlænget om nedig gøres) og lagt ind imellem de smaa Grene af Gaffeln udi g , bær Kuglen e , imidlertid at den selv er fast udi d . Da saa længe Skiven hviler, ligger e tilligemed Traaden eg i Vertikalen. Saa snart derimod, som Skiven drives om, stiger den op over Vertikalen fra e , f. Ex. til b , alt høiere og høiere, eftersom Hastigheden i Skiven og Gaffeln bliver større og større, indtil den i c omsider bliver horizontal og parallel med Skiven, naar Tyngden og den centrifugale Kraft, som forarsages af Hastigheden eller Bevægelsen paa Siden, have hverandre fuldkommen. Bliver Hastigheden af Skiven derpaa mindre, synker strax Kuglen noget ned igien imod Vertikalen, og det saa meget meer, som Hastigheden i Skiven bliver mindre til.

§. 170.

Hvad Central-Kraft er i Naturen.

Efter denne Forberedelse ville vi ordentlig foretage os den Lærdom om Central-Krafterne. Da man nu strax seer, hvorfor de have dette Navn. Derfor nemlig, fordi de bestandig drive den bevægede Ting paa den ene Side fra, paa den anden Side til et fast Punkt; nemlig til og fra C. L. IX. F. 6. Dersom man derfor, i Steden for Tyngden T , forestiller sig en virkende Kraft i Naturen, der bestandig driver imod Centret og ind til det, saa at om den alene virkede, Legemet i A i
Følge

Følge af den bestandig maatte falde imod dette Center, saa forestiller man sig det, hvad man i Naturen kalder vis Centripeta, eller Centripetal-Kraften. Thi man kan bevise uimodsigelig, at der ere saadanne Kræfter i Naturen, som altid og idelig drive Tingene i Verden imod visse Punkter; det er ved dem at de store Bevægelser i Verden skee, og af dem er Tyngden, den Tyngde en med, som vi i det forrige have talt om og forklart. Den driver altid imod et vist Punkt, imod Jordens Center, og dette er, hvad vi kalde i den almindelige Tale med det Navn, at Tingene falde.

§. 171.

Ligesom Centripetal-Kraften, efter det nylig sagte, driver alle Tingene imod et vist og fast Punkt, saa er Centrifugal-Kraften det Navn, som man giver den anden, den, som kommer af den Hastighed eller Fart i Tingen, hvormed den bevæger sig fort efter Tangenten AD, men man maa meget vel agte, at Centrifugal-Kraften er ei Hastigheden selv i A, men at den alene af denne Hastighed bliver til, thi dersom A_c er en liden Cirkel-Bue, saa liden, at den fast kan ansees for en ret Linie, da kan man ved den forestille sig den hele Kraft, som driver hen efter Tangenten, inddeler man denne i de to andre Side-Kræfter, Ag og AB, da er $Ag = Bx$ den Deel af Kraften, som kan kaldes Central, eller som driver fra Centret, da AB derimod forestiller Hastigheden selv.

Hvad Centrifugal-Kraften er.

§. 172.

Central-Kræfterne ere Pressioner.

Følgelig forestiller *Be* Central-Kraften, og det kommer paa et ud, hvad heller man kalder den i den cirkulære Bevægelse Centripetal- eller Centrifugal-Kraften, thi disse Kræfter ere i denne Bevægelse i sig eller i absolut Størrelse altid lige store, naar Kræfternes Center er tillige Cirkelns Center, hvilket af det følgende bedre skal forstaaes. De gjøre hverandre og derfor i Dieblirket af Virkningen altid, og følgelig alle Dieblik til intet. De ere ifkuns Pressioner eller trykkende Kræfter, siont Centrifugal-Kraften bliver til af en Bevægelse, der haver en virkelig og bestemt Hastighed.

§. 173.

Central-Kræfterne ere som Quadraterne af de i en uendelig liden Tid igien- nemlebne Cirkel-Buer, dividerede med Halvdiametrene.

For nu tydeligere at see, hvad Kræfter Hastighederne kunne tilveiebringe, naar en Ting paa den forhen sagte og forslarte Maade ruller om i rund, og vi ville her sætte, i cirkulær Bevægelse, maa vi forud agte, at da de Central-Kræfter, som blive til af adskillig Hastighed, kunne forestilles (Taf. IX. Fig. 7.) ved de Linier *ba* og *cd*, §. 171, saa ere de og under sig $= \frac{Aa^2}{AB}$, eller som de smaa Buers Quadrater lige frem, hvilke i samme Tid i Cirklerne ved adskillige Hastigheder beskrives, og som Diametrene af disse Cirkler forkeert tage.

Thi da *Aa* eller *Ac* kan ansees som en ret Linie, fordi den antages at være en uendelig liden Bue af Cirklen; saa er *AaB* et retvinklet Triangel, og følgelig $AB : Aa = Aa : Af$,
derfor

derfor er $Af = ba = \frac{Aa^2}{AB}$, og ligeledes om Centrifugal-Kraften var forestillet ved dc , blev $Ae = dc = \frac{Ac^2}{AB}$.

§. 174.

Følgelig om toende Ting rullede om i lige store Cirkler med adskillige og altid ensdanne Hastigheder, som Ab og Ad , eller, om man vil, med Hastigheder, som Aa og Ac , da blive de af dem tilveiebragte Centrifugal-Kræfter, som Quadraterne af de i samme Tid igiennemløbne Buer, som Aa^2 : Ac^2 . §. 173.

§. 175.

Men da disse Buer Aa og Ac ere efter det forhen sagte i Forhold af Hastighederne, saa følger deraf.

Alt saa tidt som to Ting rulle om i lige store Cirkler, med ulige men altid ensdanne Hastigheder, da blive ved disse sidste eller ved denne Bevægelse Centrifugal-Kræfter til, hvilke ere som Quadraterne af Hastighederne, hvormed disse Ting bevæges.

§. 176.

Bevæges de derimod om udi ulige store Cirkler med ulige store, skönt altid ensdanne Hastigheder, da blive ved denne Bevægelse tilveie bragte Centrifugal-Kræfter under sig som Quadraterne af Hastighederne lige frem, og Diameterne af Cirklerne forkeert tagne.

lig siden Tid
igienmemløbne
Cirkel = Buer
forkeert tagne.

Thi disse Kræfter ere §. 173 altid som $\frac{Aa^2}{Ad}$, og Aa er bestandig i Forhold med Hastigheden, hørmød Tingen ruller om.

§. 177.

Ere i det sidste
Tilfælde Hastig-
hederne Diamo-
trerne propor-
tionerte, da ere
Central-Kræf-
terne som Dia-
metrerne.

Dersom to Ting rulle om i lige store Cirkler med Hastigheder i ensdan Bevægelse, som ere Cirklernes Peripherier, i hvilke de rulle om, proportionerte, det er, om de rulle om i samme Tid, da ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte Central-Kræfter som Diametrerne.

Thi Centrifugal-Kraften er $= \frac{Aa^2}{AB}$, §. 125. men i denne Tilfælde er Aa proportionert AB , fordi Peripherierne løbes ud i samme Tid, følgelig bliver Centrifugal-Kraften og $= \frac{AB^2}{AB} = AB$, eller som Diametern.

§. 178.

Ere Cirklerne
ulige, men Ha-
stighederne de
samme, da ere
Central-Kræf-
terne som Dia-
metrerne for-
keert.

Ligeledes. Dersom to Ting rulle om i adskillige og ulige store Cirkel-Peripherier med lige store og altid ensdan-
ne Hastigheder, da ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte
Centrifugal-Kræfter, som Diametrerne forkeert tagne.

Thi da Centrifugal-Kraften altid er som $\frac{Aa^2}{AB}$, men Aa er bestandig, AB foranderlig; da siden en Forhold ei foran-
dres, naar den divideres med et og det samme, eller, med
det bestandige, saa bliver Centrifugal-Kraften som $\frac{1}{AB}$, eller
som Diametern forkeert.

§. 179.

§. 179.

Dersom en Ting løber om i Peripherien af en Cirkel, i den Tid da, i hvilken den med ensdan Hastighed i Cirklen igiennemløber en given Bue, bør den, drevet af Centrifugal-Kraften alene, igiennemløbe en Linie, som blev den tredie proportionelle til Diametern og til den i Cirklen imidlertid igiennemløbne Bue.

Thi er Aa en i en uendelig liden Tid igiennemløben Bue, og den i t Tider derfor med ensdan Bevægelse igiennemløbne Bue $t.Aa$. saa er den dertil svarende Centrifugal-Kraft ab , og da denne antages at virke altid ensdan, følgerlig at forårsage en ensdan forhastet Bevægelse, igiennemløber Tingen i t Tider, drevet af den alene, et Rum proportionert t^2 .

§. 47. Men Ab eller Centrifugal-Kraften er som $\frac{Aa^2}{AB}$, følgerlig er og det Rum, hvilket den i en uendelig liden Tid igiennemløber, ligeledes $\frac{Aa^2}{AB}$, siden det er dens fuldstændige Virkning. §. 23. Altsaa ere de i Cirklen og af Centrifugal-Kraften i samme Tid igiennemløbne Rum $= t.Aa : t^2 \cdot \frac{Aa^2}{AB} = AB : t.Aa$, eller som Diametern til den i samme Tid i Cirklen igiennemløbne Bue.

§. 180.

Deraf følger, at dersom en Ting ruller om udi ensdan 3 Cirklerne er Bevægelse i en Cirkel med den Hastighed, som bliver til af Centrifugal-Kraften saa stor Tyngden ved Faldet igiennem fjerde Deelen af samme Cirkels som Tyngden, om Hastigheden Diameter, da bliver Centrifugal-Kraften saa stor som Tyngden. af Bevægelsen

Thi

er den, der vin-
des ved Faldet
igennem Fier-
de-Delen af Cir-
klens Diameter.

Thi kaldes Diametern D , da bliver ved at falde igien-
nem $\frac{1}{4}D$ en saa stor Hastighed til, at med den kan i samme
Tid i Cirkel-Peripherien igiennemløbes en Bue, hvis Længde er
 $\frac{1}{2}D$. §. 49. Men Rummet, som imidlertid af Centrifugal-Kraf-
ten alene skulde igiennemløbes, er $\frac{1}{4}D$. §. 179. Folgelig,
da Virkningen af denne og af Tyngden ere lige store, ere de
selv og lige store.

§. 181.

Deraf sees, at en Kugle kunde skydes ud med saa stor
Hastighed, saa den aldrig meer faldt ned til Jorden, men at
den efter at være bleven engang skudt ud, bestandig siden skulde
bevæge sig omkring Jorden paa samme Maade, som Maanen.
Thi dertil udfordredes alene, at Kuglen blev skudt eller kastet
ud med den Hastighed, som ved Faldet kunde vindes igien-
nem den fjerde Deel af Jordens Diameter, forstaae; naar
under Faldet Kuglen blev bestandig dreven af den naturlige
Tyngde; naar desuden ingen Modstand af Luft, ei heller
Ujevnheder i og over Jordens Overflade, som Bierge og des-
lige, hindrede dens Bevægelse.

Thi man seer strax, at saasnart som Tyngden er hævet
af Hastigheden, kan Kuglen ikke mere falde, og Tyngden hæ-
ves aldeles, §. 179, naar Hastigheden er den, som vindes
ved Faldet igennem Fjerde-Delen af den Cirkels Diameter,
udi hvilken Kuglen bevæges.

§. 182.

Vi bevise i det følgende uden al Sammenhæng med ^{Hvad Hastig-} hvad her siges, at Tyngden bliver alt mindre og mindre i ^{hed i Maanens} større Distancer fra Jordens Center. Vi bevise nemlig, at ^{Himmel et Le-} den tager af efter Quadraten fra dette Center forkeert, ^{geme maa fastes} hvoraf ^{ud med, for at} vi og, som af en Hypothese, i det forrige have betient os ind- ^{blive en bestan-} til videre Beviis. Dette forudsat, forstaaer man let, at der ^{dig Planet.} behøves en meget mindre Hastighed i større Distancer fra Jorden, for at have Tyngden, end i mindre. Thi om i den Distance, som Maanen er fra Jorden, og vi ville sætte saa stor som 60 Jordens Halv-Diametre, en Kugle blev skudt ud, net op med den Hastighed, som i cirkulær Bevægelse behøvedes for at have Tyngden. Da siden Tyngden i Maanen ei er uden $\frac{1}{3000}$ Deel af Tyngden i Jordens øverste; og man beviser (*) at Kræfter, som vel ere altid bestandige i deres Virkning, men dog under sig foranderlige, tilveiebringe ved Faldet igiennem samme Rum Hastigheder, hvilke ere som Quadrat-Rodderne af disse Central-Kræfter. Kaldes da Jordens Halv-Diameter r , Tyngden i Jordens øverste I , den Hastighed, som vindes ved at falde igiennem $\frac{1}{2}r$, med en Tyngde $= I, H$. Da bliver den, som samme Tyngde i Maanens Distance fra Jorden kan forårsage over et Rum $= \frac{1}{2}r$ ikke uden $\frac{H}{300}$.

Men

(*) §. 10. I. i Tillæggene.

Men ved at falde igiennem Halv-Delen af Maanens Cirkels Halv-Diameter vinder et Legeme, som idelig drives af Jordens Tyngde i denne Distance, en Hastighed, der net op kan have denne Tyngde, §. 180. Denne Hastighed findes let deraf, at saa tidt som en Central-Kraft er i sin Virkning altid bestandig, blive de igiennemløbne Rum som Quadraterne af Hastighederne, følgelig $\sqrt{\frac{1}{2}r} : \frac{H}{60} = \sqrt{\frac{60}{2}r} :$ den Hastighed, hvilken i en saa stor Cirkel, som Maanens, behøves for at have Tyngden. Hvilken Hastighed derfor bliver $= \sqrt{\frac{H}{60}}$.

Skulde denne Hastighed blive til ved den hos os værende Tyngde, da blev Høiden, ved at falde igiennem hvilken den kunde vindes $= \frac{r}{2.60}$, thi $H^2 : \frac{1}{2}r = \frac{H^2}{60} : \frac{r}{2.60}$. Følgelig behøves ikke dertil uden den Gode Deel af den Høide, som behøves her hos os, for at Tyngden i Maanens Himmel kunde blive høvet.

§. 183.

Virkelig er den Hastighed, som i denne Distance behøves, for at et hvert udkastet Legeme kunde blive en Planet, ikke saa overmaade stor. Thi da Jordens Halv-Diameter er omtrent 19615782 Par. Fod, saa bliver dens 120de Deel $= 163465'$ og Hastigheden som vindes ved Faldet igiennem samme $\sqrt{60.163465} = 3134'$ i et Sekund noget næsten.

Saa deraf sees, at saasnart som Maanen selv var kastet ud med denne Hastighed, og den af intet blev svækket, maatte

maatte Maanen blive ved bestandig at bevæge sig i Cirkel-Bevægelse omkring Jorden, uden enten at kunde nærme sig den eller gaae længere fra den. Hvilket vi i det følgende endnu fuldstændigere og almindeligere skulde forklare.

§. 184.

Man seer heraf, hvad der udfordres til, at Legemerne ³ hvad Tilfælde de af Central-Kræfter dreve Legemer beskrive Cirkler. kunde bevæge sig i Cirkler, til hvis Centrer Centripetal-Kraften driver. Der udfordres, at den Kraft, som driver til Centret, eller Tyngden, maa overalt den hele Bevægelse igiennem være saa stor som Centrifugal-Kraften, eller den Kraft, der driver fra Centret. Og da dette ikke skeer §. 180, uden saa tidt som Legemet i Begyndelsen af Bevægelsen fastes udperpendikular paa Halv-Diametern med den Hastighed, som ved den til denne Distance svarende bestandige Central-Kraftes Drift kan vindes ved Faldet igiennem den halve Halv-Diameter; saa er dette Tilfælde af Hastighed og det eneste, i hvilket i den Hypothese af bestandige Kræfter Cirkler kunne beskrives.

§. 185.

Bevægelsen i Cirklen er derfor altid ensdan, Hastigheden aldrig større eller mindre, fordi begge Central-Kræfterne ere altid i sig lige store og virke efter imodsatte Direktioner en imod den anden.

§. 186.

Dg i hvad Til-
fælde ikke.

Saa tidt derimod, som et Legeme kastes ud perpendikulær paa Distancen fra Centret, med en enten større eller mindre Hastighed, end den sidst omtalte, da beskriver Legemet vel strax en Cirkel-Bue, men hvis Center er ikke det Punkt C, til hvilket at Kræfterne drive, sølgelig bliver denne Bue en Bue af en krum Linie, hvorpaa Central-Kraften virker med skiev Virkning, saa Hastigheden derfor snart kan blive større, snart mindre; beroer Central-Kraften desuden paa Distancen, bliver saavel denne som Centrifugal-Kraften i et hvert Punkt af Bevægelsen adskillige. Den første, fordi Distancen fra Centret; den anden, fordi Hastigheden af Bevægelsen idelig forandres.

§. 187.

Dg da alle Kræfter, saa tidt som de ikke beroe paa andet end paa Distancen fra Kræfternes Center, i den cirkulære Bevægelse om samme Center altid hele Bevægelsen igiennem ere bestandige. Saa følger, at i hvorledes end Kræfterne gives i Henseende til Distancen fra Kræfternes Center, beskrives dog altid Cirkler, saa tidt som Hastigheden er den, der vindes, formedelst disse Kræfters Drift, ved Faldet igiennem den halve Distance fra Centret, og de med samme Hastighed ere udkastede perpendikulær paa Halv-Diametern (*).

§. 188.

(*) Da efter §. 10. 2. saa tidt som et Legeme skal vinde den samme Hastighed ved at drives af adskillige bestandige, men under

§. 188.

Man seer fremdeles, at saafremt som et Legeme haver engang begyndt at bevæge sig i en Cirkel, hvis Center er begge Centripetal-Kræfternes Center, da maa det, om disse sidste ere

Do 3

alene

sig foranderlige Kræfter igiennem adskillige Høider, disse sidste maa forholde sig under sig som Kræfterne forkeert, saa følger, at da Hastigheden i enhver Cirkel er den, som vindes ved Faldet igiennem dens halve Halv-Diameter. Kaldes denne da R , Central-Kraften g , den naturlige Tyngde 1 , og den Høide ved at falde igiennem hvilken Hastigheden ved den naturlige Tyngde kunde vindes h . Da bliver $\frac{1}{g} : \frac{1}{2}R = 1 : h$.

eller $g : 1 = h : \frac{R}{2}$. Det er, saa tidt som Bevægelsen skeer i en Cirkel, forholder Central-Kraften sig til den naturlige Tyngde, som Høiden, igiennem hvilken Hastigheden af Bevægelsen ved den naturlige Tyngde kunde vindes, til Cirkelns Halv-Diameter. Hvoraf, som man let seer, Central-Kraften strax kan findes i virkelig Sterrelse, naar Hastigheden er given.

Man kan deraf fast lettere giøre Udbegningerne §. 182. 183. thi

da $h = \frac{gR}{2}$ og $R = 60r$, men ved r forstaaes Jordens

Halv-Diameter, saa bliver $h = \frac{60.r}{2.3600} = \frac{r}{120}$, hvoraf

strax sees, at man skal sege den Hastighed, som kan vindes

ved Faldet igiennem $\frac{r}{120}$, eller igiennem en Høide af 163465'.

alene en Function af Distancen, uophorlig blive ved at bevæge sig udi den samme Cirkel, fordi Hastigheden efter Tangenten aldrig kan forandres, følgelig kan Centrifugal-Kraften heller ikke tage til eller af, og derfor Distancen fra Centret i Legemet heller ikke forandres, saa at Centripetal-Kraften ligeledes altid bliver den samme, saa stor som Centrifugal-Kraften og med den i imodsat Direktion.

§. 189.

Næstagen til
den uirkulære
Bevægelse for-
klares.

Enhver krum Linies mindste Elementer kan man ansee som smaa Cirkel-Buer, men saa tidt som Linierne ei selv ere Cirkler, er Kræfternes Center adskillig fra de smaa Cirkel-Buers Center. Saaledes (Taf. IX. Fig. 8.) om AF er en saadan elementær Cirkel-Bue, hvis Halv-Diameter er AD, og hvis Center er D, da maa Centrifugal-Kraftens absolute Størrelse dommes af dens Virkning i imodsat Direktion af AD, Centripetal-Kraftens derimod af dens Virkning i Direktionen AC, om Kræfternes Center er C. 3 andre krumme Linier virke de derfor ikke i imodsatte Direktioner imod hverandre saaledes som i Cirklen. Følgelig kunde de i dem heller ikke tilintet gjøre hverandre, som i den, om de end vare lige store i absolut Størrelse. Thi om BA forestiller den hele Centripetal-Kraft, kan den altid oplooses i to andre Ac og Ad, hvoraf den første alene er Centrifugal-Kraften imodsat. Den anden virker derimod efter Tangenten AE, og formerer Hastigheden eller og formindsker den, eftersom CAE enten bliver under Bevægelsen en spits eller en stump Vinkel.

Vinkel. §. 65. Men Ac er altid saa stor som Centrifugal-Kraften, fordi det lille Element Ad er at ansee som en Cirkel-Bue.

§. 190.

Denne Ulighed imellem de centrale Kræfter er derfor Oprindelsen til den ueirkulære Bevægelse i de andre krumme Linier. Desuagtet pleier man dog gemeenlig at sige, at Centrifugal og Centripetal-Kraften i de krumme Linier ere altid lige store. Dette er og rigtigt, for saavidt det enten forstaaes som i §. 184, eller for saavidt man ei henfører dem til adskillige Centrer D og C , men betragter hver for sig i Henseende til det samme Kræfternes Center C . Thi da er det ikke mindre rigtigt, at om AF er en liden Bue af den krumme Linie, som beskrives, og Centrifugal-Kraften haver over den bevæget Legemet ud fra den krumme Linie om det Stykke EF , da maa Centripetal-Kraften om samme Linie EF i samme Tid have trokket det ned igien til den krumme Linie, siden Legemet ellers ikke kunde findes i det Punkt F i den krumme Linie AF , saa at Central-Kræfterne betragtede paa denne Maade altid ere at ansee som lige store, som Virkning og Tgienvirkning.

Efter at have forklart disse Poster, ville vi slutte denne Forelæsning med tvende andre Anmærkninger over den cirkulære Bevægelse.

§. 191.

§. 191.

Ere Hastighe-
derne i Cirkel-
Bevægelse som
ge store Cirkel-Peripherier, men med ensdan Bevægelse, ere
Quadrat-Rod-
derne af Diale-
trerne forkeert, ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte Centrifugal-Kræfter
da ere Central-
Kræfterne som
Quadraterne af
Diameterne
forkeert.

Dersom de Hastigheder, hvormed to Ting rulle om i uli-
ge store Cirkel-Peripherier, men med ensdan Bevægelse, ere
som Quadraterne af Diameterne forkeert tagne, da
ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte Centrifugal-Kræfter
som Quadraterne af Diameterne forkeert.

Thi efterdi Centrifugal-Kraften altid er $= \frac{Aa^2}{AB}$, er da
 $Aa = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, saa bliver $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^2}$, følgelig, som Quadra-
ten af Diametern forkeert.

§. 192.

Ere Hastighe-
derne som Dia-
metrerne for-
keert, da ere Cen-
tral-Kræfterne
som Cubi af
Diameterne.

Og endelig, dersom to Ting rulle om i ulige Periphe-
rier, med Hastigheder, hvilke ere som Diameterne forkeert,
da blive de ved denne Bevægelse tilveiebragte Centrifugal-
Kræfter, som Cubi af Diameterne forkeert.

Thi da atter igien som før, Centrifugal-Kraften altid er
 $\frac{Aa^2}{AB}$, er da $Aa = \frac{1}{AB}$, saa blive disse Kræfter $= \frac{1}{AB^3}$, følge-
lig, som Cubi af Distancerne forkeert.

§. 193.

Central-Kraf-
terne ere alt for
Resten lige,
Materiens
Mængde pro-
portionerte.

Vi have i alt det foregaaende betragtet de Legemer,
hvilke bevægedes i cirkulær Bevægelse, som at være af samme
Størrelse i Henseende til Materien eller deres Inertie. Er
denne derimod i adskillige Legemer ulige, da maa, alt for Re-
sten lige, Centrifugal-Kræfterne være Materiens Mængde pro-
portionert, fordi en dobbelt Masse, i hvis alle Dele Kraften
er den samme, virker med dobbelte Kræfter, og saa videre i
Proportion.

Siette

Siette Tillæg.

Fortsættelse om Central-Kræfterne. Om Pendulernes koniske Bevægelse, eller Bevægelse i Hvirvel.

§. 137.

Gødsfient, at alt, hvad der angaaer Central-Kræfterne, kan bevises paa en ulige almindeligere Maade, end den her anføres, nemlig paa en, som passer sig til alle krumme Linier, hvilken vi og i det efterfølgende ikke skulle undlade at vise, hvori bestaaer, saa er dog alt det, som i denne Henseende angaaer Cirklen, saa let forstaaeligt paa den oven anførte Maade, saa man i saa nyttig en Lærdom, som denne, fast gier ilde, om man forlader denne simple Maade at gaae frem paa; thi da Bevægelsen her antages bestandig at være ensdan, er alt hvad den angaaer, saa let, saa de dørhen hørende Spørgsmaal fast ei ere foresatte og givne, før de tillige ere opløste. Vi ville derfor fremdeles blive ved at fortsætte disse Betragtninger, ved at foresætte adskillige Spørgsmaal, og til den Ende igien erindre, at da Bevægelsen sættes at være altid ensdan, og den af den tilveiebragte Centrifugal-Kraft er $\frac{Aa^2}{AB}$, saa bliver i en og den samme Cirkel under den hele Bevægelse aldrig enten Aa eller AB foranderlig, men altid $\frac{Aa^2}{AB}$ en bestandig uforanderlig Størrelse, saa i den ensdanne Bevægelse i en Cirkel er Centrifugal-Kraften hele Bevægelsen igiennem altid den samme. §. 185. Forelæs.

Pp

§. 138.

§. 138.

I cirkulær Be-
vægelse af de giv-
ne Kræfter at
finde Hastighe-
den.

Vil man af Kræfterne slutte til Hastighederne, da haver man alene nødig at giøre for de førstes indvortes Forhold til hverandre en Hypothese, som man selv vil; at sammenligne den med Værdien af Centrifugal-Kraften, som efter det forhen sagte er $\frac{Aa^2}{AB}$, og deri agte, at Aa forestiller Hastigheden. AB Diametern af den Cirkel, i hvilken Tingen løber om og bevæges. (Taf. IX. Fig. 7.)

Første Tilfælde. Saaledes, om i 2 ulige store Cirkler Centrifugal-Kræfterne skulle være lige store, da bliver $\frac{Aa^2}{AB} = a$, om a betynder en uforanderlig Størrelse, selgelig er $Aa^2 = a \cdot AB$ og Aa proportionert $\sqrt{AB}$. Det er, Hastigheden bliver som Quadratroden af den Cirkels Diameter, i hvilken Bevægelsen skeer.

Anden Tilfælde. Ere Central-Kræfterne i ulige store Cirkler som Quadraterne af Diametrene forkeert, da bliver $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^2}$, selgelig $Aa^2 = \frac{1}{AB}$ og $Aa = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, selgelig bliver i denne Tilfælde Hastigheden som Quadratroden af Diametern forkeert.

Tredie Tilfælde. Ere i en ensdan Bevægelse i ulige store Cirkler Central-Kræfterne som Diametrene forkeert, da bliver $\frac{Aa^2}{AB} = 1$, og Hastighederne som en bestandig Størrelse, eller lige store.

Man seer deraf, hvad man haver at giøre i alle andre ligedanne Tilfælde, saa jeg holder det for unødigt, derved længere at opholde Læseren.

§. 139.

§. 139.

Man opløser ligeledes overmaade let alle de Spørgsmaal, som Ligeledes af de kunne gøres i Henseende til Tiden, thi da denne sidste er i al ensdan at finde Tiden. Bevægelse, som Rummet divideret med Hastigheden, saa haver man alene nødig af de givne Kræfter, efter §. 38, at søge Hastigheden, og dermed at dividere det igiennemløbne Rum, som i Cirkel-Bevægelsen altid er proportionert Peripherien, hvilket vi ville opløse ved følgende Exempler.

Første Tilfælde. Dersom i ulige Peripherier Centrifugal-Kraften er den samme, da ere §. 138 Hastighederne som Quadratkødderne af Cirklernes Diametre. Følgelig, om Peripherien kaldes P , og Tiden T , bliver det igiennemløbne Rum, divideret med Hastigheden, $\frac{P}{V_{AB}} = T$, men $P = AB$, følgelig $T = \sqrt{AB}$, eller Tidene, som Quadratkødderne af Diametrene.

Anden Tilfælde. Ere Central-Kræfterne som Quadratkødderne af Diametrene forkeert; da bliver, om Hastigheden kaldes V , $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{V^2}{AB} = \frac{1}{V_{AB}}$ og $V = \sqrt[4]{AB}$, følgelig $T = \frac{P}{V_{AB}} = \frac{AB}{\sqrt[4]{AB}} = \sqrt[4]{AB^3}$.

Tredie Tilfælde. Ere Central-Kræfterne i ulige store Cirkler som Quadraterne af Diametrene forkeert. Da er Hastigheden som Quadratkødderne af Diametern forkeert. §. 138. Følgelig $P \cdot \sqrt{AB} = T = \sqrt{AB^3}$, følgelig er $T^2 = AB^3$, eller Quadraterne af Tidene under sig som Cubi af Diametrene.

Fjerde Tilfælde. Ere Central-Kræfterne, som Diametrene forkeert, da er Hastigheden bestandig, §. 138. og $T = P$, eller $P = AB$,
 P p 2

$= AB$, det er; Tiderne, i hvilke Peripherierne igiennemløbes, ere under sig som Peripherierne, eller, hvilket er det samme, som Diametrene.

Femte Tilfælde. Dersom Central-Kræfterne ere forkeert som Cubi af Diametrene, da er $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^3} = \frac{1}{AB^2}$, og Aa eller Hastigheden $= \frac{1}{AB}$, eller forkeert som Diametern.

Følgelig er Tiden $T = P \cdot AB = AB^2$, eller Tiderne, hvori Tingene bevæge sig om i Cirkel-Peripherierne, ere som Quadraterne af Peripherierne.

Siette Tilfælde. Er Central-Kraften saa stor som Tyngden, da er Tiden igiennem Peripherien eller $T = \frac{P}{\sqrt{\frac{1}{2}AB}}$, §. 180. 10. F. Men Tiden igiennem den halve Diameters halve Deel er $= \sqrt{\frac{1}{2}AB}$, thi den er Hastigheden i Enden af Faldet proportionert. Følgelig forholder sig Tiden igiennem Peripherien til Tiden af Faldet igiennem Halvdelen af den halve Diameter, i denne Tilfælde $= P : \frac{1}{2}AB$ eller som Peripherien til den halve Diameter.

§. 140.

Central-Kræfterne ere i Cirkel-Bevægelse altid som Diametrene lige frem, og Omløbs-Tiderne om Hastigheden kaldes V , forkeert tagne.

Man seer deraf overmaade let, hvorledes man her af de givne Hastigheder kan finde Tiderne, saa det er plat unødigt derom at handle vidtlostigere. Men man seer ikke mindre, at da Tiderne altid ere, som $\frac{AB}{V} = T = \frac{AB}{Aa}$, saa bliver $Aa = \frac{AB}{T}$, hvilket, om sættes i Steden for Aa i vores forrige Værdie af Central-Kraften

Kraften

Kraften $\frac{Aa^2}{AB}$, da seer man, at denne Kraft bliver saa stor som $\frac{AB}{T^2}$, og
 følgerlig, at Central-Kræfterne altid ere som de Cirklers Diametre lige
 frem, i hvilke Bevægelsen skeer, og som Quadraterne af Tiderne,
 i hvilke Peripherierne igiennemløbes, forkeert tagne.

§. 141.

Ved Hielp af denne nye Værdie, som saaledes er funden for Af Omlobs-Ti-
 derne at finde Central-Kræfterne, kan man altid af de givne Tiders Beskaffenhed
 bestemme disse Kræfter, og omvendt igjen af Kræfterne Tiden; men
 da vi allerede have viist en anden Maade for dette, ville vi alene op-
 holde os ved det første.

Første Tilfælde. Ere Tiderne som Diametrene, da blive
 Central-Kræfterne som $\frac{AB}{T^2}$, §. 140. som $\frac{AB}{AB^2} = \frac{1}{AB}$, eller som Dia-
 metrene forkeert.

Anden Tilfælde. Ere Tiderne som Quadraterne af Diamo-
 trene, da bliver Central-Kræfterne $= \frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB^4} = \frac{1}{AB^3}$, eller
 forkeert, som Cubi af Diametrene.

Tredie Tilfælde. Ere Tiderne som Quadrat-Rødderne af Dia-
 metrene, da er Central-Kraften $\frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB} = 1$, det er, Central-
 Kraften er i denne Tilfælde altid bestandig.

§. 142.

Man kan paa denne Maade altid opløse lige saa mange deslige
 Spørgsmaal, som man selv vil; os er det nok at have viist Maaden, <sup>hvad der for-
 staaes ved Den-</sup>

Dulernes koniske
eller hvirvelende
Bewægelse.

for at gaae videre til at tale om Centrifugal-Kræfternes Beskaffenhed i de hvirvelende Penduler, i de nemlig, som hengende i et fast Punkt drives om med en konisk Bewægelse, siden vi ikke ville videre handle om Bewægelsen over de legemlige Superficier.

Er da (Taf. IX. Fig. 9.) AC en Traad med et Lod i Enden fastet fast udi A, og Traaden AC fuldkommen spændt af Loddet eller Tyngden; da er det klart, at naar den hengte, tvungen alene af Loddet, søgte den det nederste Sted udi B, eller hengte efter Urlen af Keilen AB, siden de tunge Ting altid synke, saa dybt som de kunde. Saafermt derimod at AC drives med en Hastighed, veed man, at Traaden med samt Loddet stiger og bevæger sig omkring Superficien af en Keile CEDA, hvis Cirkel CED Loddet beskriver. Jo stærkere Hastigheden bliver, desto høiere stiger Loddet: Det er denne koniske Bewægelse i Pendulen, som vi ville betragte.

§. 143.

I denne Henseende maa vel agtes, at Tyngden under Bewægelsen bestandig trekker Loddet efter Direktion af Vertikalen eller efter Ch. Centrifugal-Kraften derimod, som altid driver i Diameters Direktion, trekker efter fC. Altsaa, naar i Parallelogrammet fChg, Central-Kraften forestilles ved fC og Tyngden ved Ch, da forestiller Diagonalen Cg den Kraft, hvormed Traaden spændes med forenet Magt af begge disse Kræfter.

§. 144.

Man kan agte, at da Central-Kraften, efter hvad nu saa ofte er bleven sagt er som $\frac{Aa^2}{AB}$, saa den altid i den samme Cirkel er som Aa^2 ,
det

det er, som Quadraten af Hastigheden. Følgelig, om den Heide, igiennem hvilken, ved at falde, denne Hastighed kan vindes, kaldes V , er Central-Kraften i lige store Cirkler altid $= V$, og dersom den halve Diameter i Cirklen kaldes d , da er den Heide, ved at falde igiennem hvilken en Centrifugal-Kraft, saa stor som Tyngden, kan vindes $= \frac{1}{2}d$, §. 180. Forel. Dette er det Maal, hvoraf alle øvrige Centrifugal-Kræfter i deres virkelige Størrelse kan bestemmes.

§. 145.

Dette forudsat, er intet lettere, end at bestemme, hvad Hastigheden maa være, paa det at et Pendul AC kan bestandig blive ved at rulle om i konisk Bevægelse i den Cirkel CED, uden enten at gaae længere ud fra, eller at falde nærmere ind til Aksen AB. Man har alene nedig at bestemme Central-Kraften Cf paa toende adskillige Maader, den ene af Bevægelsens geometriske, den anden af Bevægelsens fysiske Beskaffenhed.

Hvad den første angaaer, da om $Cb = g$, $Cf = c$, $AB = a$, $BC = b$, da er $AB : BC = gf : fC$. Altsaa bliver $a : b = g : \frac{bg}{a} = c$, hvilket er den geometriske Bestemmelse af Central-Kraften.

Den Fysiske bestemmes deraf, at $\frac{1}{2}b : g = x : \frac{2gx}{b}$, (see Anmerkningen til §. 187. Forel.). Ved x forstaaes den segte Heide, ved at falde igiennem hvilken den Hastighed vindes, som net op behøves for at den koniske Pendulets Bevægelse altid kan skee i Cirklen CED.

Følgelig er $\frac{2gx}{b} = \frac{bg}{a}$ og $x = \frac{b^2}{2a}$, som er den Heide, ved at falde igiennem hvilken, den sidst omtalte Hastighed net op vindes; hvilken derfor bliver $= \sqrt{\frac{b^2}{a}g}$. §. 17.

§. 146.

§. 146.

Saa snart som Hastigheden er funden, er intet lettere end at fastsætte og at bestemme Tiden. Thi da Bevægelsen antages ensdan, efter det forhen sagte om Cirkel-Bevægelsen, saa er, om Tiden kaldes T , $T = \frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$, eller om man alene søger Forholden $T = \frac{P\sqrt{a}}{b}$.

§. 147.

Man kan deraf slutte.

Jo større Hastigheden er, desto høiere stiger det hvirvlende Pendul. 1) At da Hastigheden $= \frac{b}{\sqrt{2a}}$, jo større da Hastigheden bliver, jo længere gaaer Tingen ud fra Aksen, og en jo større Vægt faaer den Keile, i hvis Cirkels Grund-Linie den løber om.

2) Skal a være alt mindre og mindre, og b den samme Størrelse, det er, om Tingen skal stige høiere i Bevægelsen, da maa Hastigheden blive større.

Men det naaer ikke Spitzten af Keilen, med mindre at Hastigheden bliver uendelig. 3) Skal Tingen stige til den øverste Spitse af Keilen, og der beskrive en Cirkel, da fordi Hastigheden $\frac{b}{\sqrt{a}}$ bliver i denne Tilfælde $= \frac{1}{0}$, maa Hastigheden, før dette kan skee, blive uendelig stor.

§. 148.

Disse Pendulers Beskaffenheder i Henseende til Tiden forklares. Tiden angaaende. Da, siden $T = \frac{P\sqrt{a}}{b}$, maa to ulige lange Penduler, som i konisk Bevægelse beskriver Cirkler parallele med Horisonten, om Keilerne, i hvis ulige Cirkler de rulle om, have samme Høide, saa Omlebs-Tider $= \frac{P}{b} = \frac{b}{b} = 1$, det er, Tiderne blive

de

$= 2:1$, selgelig bliver $T = 2t$, det er, saa længe som de koniske Pendulers Hvirvel-Bevægelser ere meget smaa, eller disse Omlebe stee i meget smaa Cirkler (thi i andre er ei $AC = AB$ eller Længderne af det koniske og af det simple efter Siden svingende Pendul den samme) saa maa Tiden af det koniske Penduls Bevægelser vare dobbelt saa længe, som Tiden af det simple Penduls Bevægelser, og selgelig to af disse sidste gaae paa et af de første.

Og deraf sees atter igien, at saa længe de koniske Penduler Hvirvle om i smaa Cirkler, maa Tiderne, hvori de Hvirvle om, altid være de samme, hvad heller at disse Cirkler ere lidet større eller mindre, saa længe de ifkuns ere meget smaa.

§. 153.

Under hvad Vinkel et Pendul springer udi samme Tid, som Falder stær ved Tyngden igiennem samme Penduls Længde. Vil man deraf fremdeles slutte sig til Forholden af det koniske Penduls Omlebe-Tid til Tiden, hvori en Ting falder igiennem samme Penduls simple Heide, eller igiennem Længden af Traaden AC.

Da siden Tiden af et konisk Omlebe er $\frac{PV\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$, og Tiden igiennem AC Pendulets Heide eller Længde, som vi ville kalde l , er ligeledes $= \frac{\sqrt{2l}}{g}$,

saa forholde disse Tider sig $= \frac{PV\sqrt{a}}{b\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$. Saa tidt som Tiden af et konisk Omlebe skal være saa stor som Tiden af Faldet igiennem Pendulets Længde, bliver $\frac{P^2}{2b^2} = \frac{l}{a}$, selgelig $a:l = 2b^2:P^2$, og derfor igien Sinus af den Vinkel ACD, hvorunder Pendul-Traaden stöder an paa Horizontal-Linien, til Sinum totum, eller

eller den hele Sinus, som Quadraten indskreven i Cirklen ECD til Quadraten af denne Cirkels Peripherie.

§. 153.

Man kan paa selsamme Maade opføre hvad Spørgsmaal man vil, for at sammenligne Pendulernes koniske Bevægelse med Faldet, og den ved Faldet igiennem andre givne Høider vundne Hastighed, for Ex. igiennem Pendulets halve Længde, o. s. v. men da dette ei er stor Nytte, er det nok, at have viist Maaden, uden at vi derved gøre opholde os. Vi ville i den Sted agte. At dersom en Ting bevæger sig engang omkring i en Cirkels Peripherie i den Tid, da et Pendul, hvis Længde er samme Cirkels halve Diameter, i konisk Bevægelse en gang beskriver en meget liden Cirkel, eller, hvilket er det samme, imidlertid at et simpelt Pendul af samme Længde gjorde to hele Sving. Da bevæges den seromtalte Ting i sin Cirkel med en Centrifugal-Kraft, der er lige saa stor som den naturlige Tyngde.

Thi naar den naturlige Tyngde kaldes g , da, om Central-Kraften skal være af lige Sterrelse med Tyngden, bliver §. 180. F. Hastigheden, hvormed Tingen bevæger sig i Cirklen, den som vindes ved at falde igiennem samme Cirkels Diameters fjerde Deel $= \sqrt{\frac{1}{2}dg}$, om Diameteren kaldes d . Men Hastigheden af den koniske Bevægelse er efter det foregaaende §. 145, fordi Bevægelsen er ensdan $= \frac{b\sqrt{g}}{\sqrt{a}}$. Da nu her $b = \frac{1}{2}d = a$, fordi den koniske Bevægelse sættes at skee i meget smaa Cirkler, saa findes Hastigheden $\sqrt{\frac{1}{2}dg}$, da derfor Hastighederne i begge disse Tilfælde blive de samme, saa maa de ved dem

tilveje bragte Central-Kræfter i Cirkel-Bevægelse og nødvendig blive de samme. Saa derfor i denne Tilfælde Central-Kraften bliver saa stor som Tyngden.

§. 154.

Den Kraft, hvormed det hvirvelende Pendul under samme Høide trykker Hænge-Punktet bestemmes.

Widere sees (Taf. VII. Fig. 9.) at den Kraft, hvormed i den koniske Bevægelse Traaden spændes, er som Cg , imidlertid at Central-Kraften er som fC , og derimod Tyngden, hvilken altid er bestandig, i hvad Cirkel end Pendulet i sin koniske Bevægelse beskri-

ver, som Ch . Følgelig er $Cg:Ch = AC:AB$. og $Cg = \frac{Ch \cdot AC}{AB}$.

Følgelig, om AB eller Høiderne af de i konisk Bevægelse beskrevne Keiler ere de samme, da siden Ch eller Tyngden og altid er den samme, da bliver $Cg = AC$. Det er.

Saa tidt som to lige tunge Penduler af ulige Længde i deres koniske Bevægelse beskrive lige høie Keiler, da ere de Kræfter, hvormed Traaderne spændes, som Traadernes Længder.

§. 155.

Swinger et simpelt Pendul igiennem en Høide af Høide-Cirkel, da spændes Traaden i Midten af Svinget, med tre gange Led-stille.

Ligeledes, dersom et simpelt Pendul giver sit største Sving, det dersom det svinger igiennem en halv Cirkel, da spænder det i Midten af Svinget Traaden tre gange saa stærk, som den ellers skulde spændes af Tyngden, naar den i samme Punkt hvilede eller hængte Svinget, med tre gange Led-stille.

Thi det er klart, at i denne sidste Tilfælde blev den alene spændt af Tyngden, i den første derimod spændes den i samme Direktion baade af Tyngden og af Centrifugal-Kraften: Da derfor i den samme Cirkel

Centri-

Centrifugal-Kræfterne ere som Quadraterne af Hastighederne, og disse sidste Quadrater ere som de Rum, ved at falde igiennem hvilke Hastighederne i Enden af Faldet blive til, men den ved Faldet igiennem den halve Diameters halve Deel vundne Hastighed giver en Centrifugal-Kraft saa stor som Tyngden, saa giver den Hastighed, der vindes ved at falde igiennem den halve Diameter selv, en Central-Kraft, saa stor som to gange Tyngden. Følgelig spændes Traaden i Midten af Svinget, med en Hastighed saa stor som tre gange Tyngden.

§. 156.

Vi have seet §. 153, at dersom et Pendul i konisk Bevægelse i den hule Deel beskriver smaa Cirkler, da hvad heller disse sidste ere større eller mindre, beskrives de alle i samme Tid. Søger man frendeles, i Omløbs-Tiderne lige store, hvad konisk Superficie en Ting skulde frit bevæge sig, for at alle dens Omløb maatte skee i samme Tid, hvad heller at i denne Bevægelse en af Keilens større eller en af dens mindste Cirklers Peripherier bleve igiennemløbne, alene at de laae parallele med Horizonten, da kan agtes.

At om T.IX.F. 10. DFA er den krumme Linie, ved hvis Omveltning om Asten GA Keilen beskrives, da om FE og BC ere to denne Linies Ordinater, som ligge hverandre uendelig nær, $CB=y$, $FR=dy$, da er y den halve Diameter af Cirklerne i Almindelighed, i hvilke Tingen skal bevæge sig om saaledes, at i hvad for en af dem den er, skal, naar Centrifugal-Kraften og Tyngden antages at staae i Ligevægt med hverandre, alle Omløbene skee i samme Tid.

Kaldes da s den Høide, som svarer til Hastigheden udi B, da bliver, om den naturlige Tyngde kaldes g , $\frac{1}{2}y:g=s:\frac{2s}{y}g$, hvilket er

Centrifugal-Kraften i den Cirkel, hvis halve Diameter er $BC = y$. Men fordi Centrifugal-Kraften og Tyngden overalt skulle være udi Ligevægt med hverandre, da er det klart, at om BH forestiller Centrifugal-Kraften udi B og BI Tyngden, da maa i B den Kraft, som er saa stor som de begge, være perpendicular paa den krumme Linie DBA , siden Tingen, der bevæges, ellers enten maatte glide op efter imod D , eller ned ad imod A . Hvoraf ingen af Delene kan ssee, om den forenede Magt af alle begge Kræfter virker perpendicular paa DBA .

Følgelig bliver, dette forudsat, $KH : HB = dy : dx$. Thi FR er parallel HB , følgelig ere Værels-Vinklerne lige store, og det, som mangler den i 90° , eller Vinklerne FBR og HBK ligledes lige store. Altsaa bliver $g : \frac{2s}{y}g = dy : dx$ og $s = \frac{ydx}{2dy}$, men da vi her ligesom langs hen ad i dette Stykke antage Bevægelsen i samme Cirkel ensdan, saa er Tiden, som det igiennemløbne Rum dividert ved Hastigheden, og da dette Rum er Cirkel-Peripherien, er den om $g = 1$, $= \frac{P \cdot \sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = \frac{ny \cdot \sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}}$, thi Peripherien kan altid ansees som mangesfold imod den halve Diameter i den bestandige Forhold af $n : 1$.

Da nu Tiden i alle Peripheriernes Omløb skal være noget bestandigt, eller den samme, saa bliver $\frac{ny \cdot \sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = a$, følgelig $\frac{nnydy}{ydx} = aa$ og $yy = \frac{2aa}{nn}x$, da nu $\frac{aa}{nn}$ er en bestandig Størrelse, saa er den søgte krumme Linie, ved hvis Omveltning den forlangte Keile skal beskrives, en Parabol, hvis Parameter er $\frac{2aa}{nn}$.

§. 157.

Tiden derfor af Omløbet i en af Cirklerne i den hule parabolske Konoide beleber $\frac{PV\sqrt{dy}}{\sqrt{y}dx}$, om $g = 1$. Men Tiden af Svinget i et simpelt Pendul er da og, om Længden kaldes l , $= \frac{PV\sqrt{l}}{d}$, d : P er Diameterens halve Parameter svinger frem og tilbage. $\frac{2\pi n}{a^2}$

$$= p \text{ er Tiden af Omløbet i Konoiden } = \frac{PV\sqrt{dy}}{\sqrt{y}dx} = \frac{PV\sqrt{p}}{y\sqrt{2}}, \text{ følger}$$

lig forholde disse Tider sig, om i Steden for d sættes $2y$,

$$= \frac{\sqrt{l}}{2y} : \frac{\sqrt{p}}{y\sqrt{2}}, \text{ sættes } l = \frac{1}{2}p, \text{ forholde de sig } = 1 : 2.$$

Følgelig skeer et heelt Omleeb i den parabolske Konoide i den samme Tid, hvori et simpelt Pendul, hvis Længde er Parabolens halve Parameter, gier to Sving, nemlig frem og tilbage.

Dersom man i den forrige Lighed $\frac{ny\sqrt{dy}}{\sqrt{y}dx} = a$ satte Tiden i anden Forhold, kunde man ligeledes opløse flere andre deslige Spørgsmaal, men da det her allerede sagte er i denne Henseende det merkværdigste, ville vi ei opholde os ved det mindre Betydelige.

Siende

Tiende Forelæsning.

Om

Nytten af Central-Kræfterne i at kien-
de ved deres Hielp de store Bevægelser og de
store virkende Kræfter i Naturen.

§. 194.

Vi have i det foregaaende betragtet Central-Kræfterne i den simpleste og letteste Tilfælde, i den, da ved dem en Linie bliver beskrevet i ensdan Bevægelse under Omlobet, i hvilket de bestandig ere eens, uden at de i et Punkt af Linien ere saa, i et andet anderledes. I andre krumme Linier er Theorien for Central-Kræfterne langt anderledes, da de i et hvert Punkt af den krumme Linie forandres, skønt de hele Linien igiennem iagttage en og den samme bestandige Lov, udtrykt ved foranderlige Størrelser. Det er derom, at vi ville i det nærværende gjøre os en klarere Tanke, saavel som at vi og ville vise den ubeskrivelige Nytte, hvilken den Lærdom om Central-Kræfterne haver i at kiende Naturen, dens Love, dens Kræfter og dens Huusholdning i de store og uforanderlige Bevægelser.

§. 195.

Jorden kan ei
falde ud af sit

For dertil forud at berede os, maa jeg gjøre en kort
Afbigging fra vore geometriske Betragtninger til almindelige
physiske

physiske og moralske. En af de Ting, hele Verden haver an-^{Sted ved sin egen Tyngde.} seet med den største Forundring, er, hvorledes det kunde skee, at Jorden kunde blive bestaaende paa sit Sted, uden at falde. Jeg vil ikke tale om, hvor urimelig dette Spørgsmaal er, da som man seer af det foregaaende, Tyngden alene er i Delene af Jorden, og ikke i den hele Jord selv, samtlig Jordens enkelte Dele, hvad heller de ere store eller smaa, tyngge imod dens Centrum, den hele Jord derimod haver ikke Tyngde (nemlig imod sit Centrum), den haver alene Inertie, saa alt hvad man i den Henseende af pyr Uvidenhed haver opdigtet for at hindre Jorden i at falde, enten ved at antage, at den svømmede i Vand, eller som de gamle Folk og de i vore Tider Uoplyste enten have tænkt, eller endnu tænke, at Jorden blev baaren paa Støtter, eller af Vander, eller som en uoplyst Gudsfrøgt haver vildet paastaae, at Jorden blev holdt paa sit Sted af den Almægtiges Haand selv ved et umiddelbar Mirakel, er for den, som forstaaer de første Grundsæddomme af Physik og Mechanik, ikke uden ligesaamange Beviis paa Uvidenhed. Den hele Jord haver ikke uden Inertie, og Inertiens Hoved-Sag er aldrig at forandre sig, men alene at blive paa sit Sted, om intet udvortes driver den ud af samme.

§. 196.

Derimod synes det langt vanskeligere at begribe, hvor-<sup>Hvorfor Planeterne altid bliv-
ve i de samme
Dancer, og hvor-</sup>ledes de store himmelske Legemer, de, som vi kalde Planeter, de, hvilke i alt ere som vores Jord, kunne blive ved indtil i

Kr

uendelige

for de i dem ide-
lig bevæge sig.

uendelige Tider, uforandret at beskrive de samme Baner udi Himmelen, uden i det mindste at vrie af fra den Linie og det Omlob, de en gang have gaaet i og fuldbendt. Hvor meget denne Sag haver været en Anstods = Steen for den gamle Verden, hvor meget den endnu er det for samtlig de uoplyste hedenske Folk, seer man af deres falske Guds-Dyrkelses, som alle grunde sig paa det falske System, hvilket de have gjort sig, for at besvare denne Banskkelighed. Da de ikke kunde begribe, hvorledes Bevægelsen i de himmelske Legemer kunde blive til, have de med Sverdet, saa at sige, overskaaret denne Gordiske Knude, ved at forestille sig Solen og samtlig de sig bevægende himmelske Legemer som virkelige Personer, saa virkelige som Mennesket, der bevægede sig selv med frie Bevægelse, og som i denne Bevægelse havde bundet sig selv til visse Love, Mennesket til Nytte. Derfor burde de tilbedes, derfor æres, derfor bygte man Altene og belagde Altene med hellig Nøgelse. Men vi maa erindre, at vi her have at handle om Mechanik, og hvad vi derfor i denne Afvigning desangaaende saa løslig have sagt, er alene for at vise, af hvad uendelig Vigtighed for Mennesket, endog uden for Mechanik og Physik selv disse Sandheder ere. De, som troe, at Nytten af Geometrien indskrænkes i den selv, robe en Uvidenhed, som de burde være skamfulde ved.

§. 197.

For derfor at see, hvorledes et saadant Legeme, en Planet for Exempel, bestandig bliver ved at bevæges i Himmelen,

lene, i den samme Linie eller Bane uforandret, haver man alene nodig at agte, hvad vi i det forrige til stor Deel have allerede sagt (T. X. F. I.), at nemlig dertil intet andet udfordres, end at et Legeme, som A, først bevægedes med en vis bestemt Hastighed, som AD, efter en Direktion, som AD, og at det imidlertid af en anden bestandig virkende Kraft (en saadan, som Tyngden for Gr.) bestandig blev drevet imod et fast Punkt C. Thi da er det klart, at Bevægelsen hen efter Tangenten AD maatte føre den Ting A alt længere og længere fra Centret C, for Gr. om det Stykke BE, hvorved af AD blev tilveiebragt over AB en Centrifugal-Kraft, som BE. Antager man nu, at Centripetal-Kraften der tillige uden Ophold driver imod C, var i Ligevægt med den alle Dieblis tilveiebragte Centrifugal-Kraft, og selvfølgelig ligeledes saa stor som BE, saa er det klart, at Tingen A efter et Dieblis Bevægelse maatte befinde sig i det Punkt E af den krumme Linie. Af samme Aarsag maatte et saadant Legeme Dieblikket efter, om Centripetal-Kraften ei virkede, gaae fort efter Tangenten EF af denne Linie, formedels sin Hastighed, og derved flye bort fra Centret C, men da det tillige idelig drives ned imod samme Center af Centripetal-Kraften over en ligesaa stor Linie FG, som den, der tilkiendegiver Centrifugal-Kraften, maa det, drevet af begge Kræfter, komme til G, og saaledes beskrive omkring Kræfternes Center en krum Linie. Da desuden i alle Omlob Hastighedens og Central-Kræfternes Henseender til hverandre maa blive de samme, om intet udfortes fra kommer imellem til Hindring, saa begriber man

let, at alle Omløb indtil i de uendeligste Tider maatte blive ved at skee paa en og den samme Maade, som det første.

§. 198.

Naar et Legeme bevæges i en frum Linie om Kræfternes Center, da ere Snittene af den frumme Linie fra dette Center tagne, Tiderne af Bevægelsen proportionerte.

Men hvad her særdeles kan spørges om, er; om der og virkelig, foruden Tyngden, findes deslige centrale Kræfter i Naturen, som nemlig altid drive imod et og det samme Punkt, og hvoraf man veed, at deslige Kræfter gives? For at bevise dette, maa forud agtes.

Alt saafremt (Taf. IX. Fig. II.) et Legeme bevæges i en frum Linie EAN, hvilken med sin Hulhed vender imod det Punkt C, og det af en Central-Kraft drives under Bevægelsen bestandig imod Punktet C; da blive Tiderne af Bevægelsen som Central-Snittene af denne frumme Linie, eller Tiderne igiennem Buerne AB og ABE blive som ABC til ABEC.

For at bevise dette, ville vi betragte de to Buer AB og BE som uendelig smaa, eller som rette Linier; Siden da Hastigheden, hvormed Tingen bevæges igiennem AB, Diebliffet derpaa vilde drive Tingen efter BD, og i lige Tider saaledes, at $AB = BD$, saa er det klart, at Trianglerne DCB og BCA blive lige store, fordi de have fælles Høide CG, og lige store Grund-Linier. Men da imidlertid Centripetal-Kraften, efter vores antagne, skal drive Tingen bestandig ind imod C, altsaa i den Direction BC, saa om at denne Kraft forestilles ved BF, Tingen maa igiennemløbe Diagonalen eller Toer-Linien BE: Men i det syldestgiorte Parallelogram EDBF er ED parallel BC, derfor staae Trianglerne CEB og CDB imellem de samme Paralle-

Paralleler DE, BC, og over den samme Grund-Linie BC, følgelig ere de lige store, følgelig og Trianglet $CEB = CBA$.

Da nu Tiderne igiennem EB og BA vare lige store efter vores antagne, saa forholde de sig som disse Triangler, og da dette Beviis gielder, om alle Elementerne i den krumme Linie, saa sees: At saa tidt som en Central-Kraft driver en Ting, der bevæges i en frum Linie imod et Punkt C, imod hvilket Linien er hul, og det i alle denne Linies Punkter; da maa Tiderne af Bevægelsen forholde sig som Snittene, hvilke blive til af de rette Linier, der gaae fra dette Punkt og af de igiennemløbne Buer; eller som CAB : CABB.

§. 199.

Lige saa let bevises den omvendte Sætning, at der som Tiderne af Bevægelsen i en frum Linie forholde sig under sig som Snittene, der tages med Linier, trokne fra et vist Punkt C inden for den hule Linie og af dens Buer, det er, om Tiderne igiennem Buerne EB og EBA forholde sig som ECB og ECAB, da drives Tingen den hele krumme Linie igiennem, af en Central-Kraft imod dette Punkt C.

Thi man seer, som før, at Bevægelsen skulde i lige Tider skee fra AB til BD, saaledes at $AB = BD$. Men da, efter vores antagne, en Kraft trekker det Bevægede fra BD til BE saaledes, at $DCB = BCA = ECB$, saa maa $ECB = CDB$, følgelig, da Grund-Linien BC er den samme, maa ED blive parallel BC. Men da EFBD er Parallelogrammet af Kræfterne, som drive Tingen efter BE, saa maa den ene af Kræf-

terne BF nødvendig drive imod C, og folgelig i Henseende til dette Punkt være central.

Og da dette Beviis ligeledes gielder om alle andre Elementer i den krumme Linie, saa sees, at Tingen altid drives af en Central-Kraft imod et vist Punkt C, saa tidt som Tiderne ere Snittene ECB og ECAB proportionerte.

§. 200.

Samtlig Planeterne drives af Central-Krafter.

Da nu de astronomiske Jagttagelser og de paa dem grundede Udbregninger fuldkommen bevise, at (Taf. IX. Fig. 12.) samtlig Planeterne bevæge sig i Elliptiske Baner, som CDB saaledes, at Snittene fra Brænde-Punktet *f*, CfB og AfB ere Tiderne fra B af proportionerte, saa følger nødvendig §. 199, at disse Legemer drives bestandig af en Kraft i Naturen imod dette Punkt, og folgelig at Central-Kræfterne forarsage de store Bevægelser i Verden.

§. 201.

Hvad vi i denne Theorie forstaae ved Kræfternes Center, Være-Linien og Banen.

Vi ville her ikke indlade os i at undersøge disse Kræfters physiske Beskaffenhed, da dette hører til et andet Sted, nemlig til de physiske Forelæsninger. Vi ville her alene agte visse Benævninger, som behøves at bekiendtgjøres, for at vi i den tilkommende Forelæsning kunne desto bedre forklare, efter hvad Love disse Central-Kræfter virke i Naturen, siden dette sidste er det store, som vi ved disse vore Bemøielser sigte til. Til den Ende ville vi agte.

1) At det Punkt C, imod hvilket under Bevægelsen i den krumme Linie CBN Central-Kræfterne uophørlig drive det bevægede, kaldes Kræfternes Center.

2)

2) Linien CB fra Kræfternes Center til den bevægede Ting kaldes Bære-Linien (Radius vector), fordi man kan ansee den, som om den Ting, der er i Bevægelse, laae paa denne Linie, og blev baaren af den.

3) At den krumme Linie selv NBE, som ved Bevægelsen beskrives, kaldes Løbe-Banen (Orbita) eller simpel hen Banen.

§. 202.

Fremdeles ville vi her atter igien tydelig erindre, at i hvorledes end den krumme Linie HAG er beskaffen, man dog altid kan forestille sig (Taf. IX. Fig. 13.) en Cirkel BAE, som over en meget liden Bue i A saaledes falder ind med den krumme Linies Bue, at begge kunne ansees for et og det samme. Cirklen BAE, veed man, kaldes Køre-Cirklen (Circulus osculans) og dens Halv-Diameter AD den rørende Halv-Diameter.

§. 203.

Endelig ville vi agte til Beslutning af denne Forelæsning, at i hvorledes end en Ting bevæges i en krum Linie, dre- I al Central-Bevægelse er i et hvert Punkt af den krumme Linie Hastigheden som Perpendiklen paa Tangenten forkeert ven af sin Hastighed og af en efter en bestandig Lov hele Linien igiennem virkende Centripetal-Kraft, da er Taf. IX. Fig. 11. Hastigheden i det Punkt B dog altid som Perpendiklen C, kastet ned fra Kræfternes Center C paa den krumme Linies Køre-Linie eller Tangent Ez, naar samme tages forkeert.

Thi Hastigheden i Trianglet ECB er som Grund-Linien BE, om Tiden er bestandig §. 14. F.: men i lige Køre Triangler (thi de, her handles om, maa altid være lige store i lige store Tider, §. 198,) ere Grund-Linierne som Høiderne forkeert, folgelig og forkeert Viis, som Perpendiklerne paa Tangenterne.

Ellevte

Ellevte Forelæsning.

Central = Kræfterne i Naturen deres
Hoved-Lov bevises at være, som Quadraten
af Distancen forkeert.

§. 204.

Vi have i Henseende til Central-Kræfterne nu intet andet tilbage, efterat vi have beviist, at de virkelig ere til i Naturen, end fremdeles at undersøge, efter hvad Love de handle i de Linier, hvori Naturen betiener sig af dem; disse ere fornemmelig Ellipser, men da Bevist under et ligesaa let kan gøres med en og den samme Umage for alle Keile-Snittene i Almindelighed, som Parabolen og Hyperbolen, saa ville vi med et almindeligt Beviis afhandle Sagen for dem alle under et paa følgende Maade.

§. 205.

Alt gaaer da ud paa at bevise, hvad Loven for Central-Kræfterne er i Naturen, dette forudsat, at de ere af den Bestaaenhed, at de med en given Hastighed bevægede Legemer gaar omkring i en af Keile-Snittene alene, og ikke i nogen anden krum Linie, thi gif de bevægede Ting om i andre Linier,

I alle krumme Linier er Central = Kraften, som Værelsen, men, lige frem, men som Kæde-Cirkelns Diameter og Per-

Linier, maatte de bevægende Central-Kræfter og være af en anden Beskaffenhed. Saa det i Almindelighed altid er mueligt, af den givne krumme Linie, hvori Bevægelsen med Drift imod et vist Punkt ved Central-Kræfterne skeer, at finde Lovene for disse Kræfter, de nemlig, hvorefter de virke.

Vi ville her i disse Forelæsninger alene see paa det første, som mest nyttige i denne Materie; allermest da denne Sag er intet mindre end vanskelig. Er nemlig (Taf. IX. Fig. 13.) HAG en af Keile-Snittene efter det forhen sagte; BE den Cirkel, som i A rører den krumme Linie, AD den rørende Halv-Diameter, da er §. 176 Central-Kraften, hvilken driver imod samme Cirkels Center, som Quadraten af Hastigheden i A, dividert med AD, men Hastigheden er i den krumme Linie $= \frac{I}{CF}$, §. 203. Følgelig er Hastigheden, som driver imod Køre-Cirkels Center D. Ligeledes $\frac{I}{CF}$.

Bidere er Central-Kraften i Cirklen til Central-Kraften i den krumme Linie HAG, som $ed:df$. Thi Kræfterne ere, som deres Virkninger i samme Tid, men i Trianglerne edf og FCf er Vinklen f tilfælles, og fordi De ansees som at være AD uendelig nær, ere ved e og ved F rette Vinkler. Følgelig Trianglerne edf og FCf ligedanne Triangler, følgelig $fd:de = fC:CF$, hvoraf man seer, at i alle krumme Linier forholder sig Central-Kraften i Cirklen til Central-Kraften, hvilken der- til svarer i den krumme Linie, som Perpendiklen paa Køre-Linien til Børe-Linien.

Altsaa da $de = \frac{1}{2AD.CF^2}$, §. 203, saa bliver fd eller Central-Kraften, som dertil svarer i enhver krum Linie $= \frac{dC}{2AD.FC^3}$, hvor man agter, at dC og fC ei ere af adskillig Størrelse, fordi fd antages at være uendelig liden.

Følgelig er Central-Kraften i alle krumme Linier i Almindelighed i sammensat Forhold af Bøje-Linien lige frem tagen, af Køre-Cirkels Diameter forkeert, og Perpendiklen paa Køre-Linien dens Kubus ligeledes forkeert tagen.

§. 206.

I Keile-Snittene er Central-Kraften, som be-
standig driver
imod Bøje-
Punktet, saa
stor som Qua-
draten af Di-
stancen fra dette
Punkt forkeert
tagen.

Det nylig sagte gielder i alle krumme Linier i Almindelighed. For nu videre at anvende dette til Keile-Snittene, haver man alene nødig at iagttage, hvad man beviser i Algebre, at nemlig i dem er altid den rørende HalvDiameter, (Taf. IX. Fig. 14.) om BE er en af Keile-Snittene, EA dens Køre-Linie, EF Perpendiklen paa Køre-Linien i Køre-Punktet, saa er, siger jeg, efter det i Algebre beviste, den rørende HalvDiameter $\frac{4EF^3}{p^2}$, (ved p forstaaes Parametern) og følgelig bliver Central-Kraften i enhver konisk Section, eller i et hvert af Keile-Snittene $= \frac{p^2.dC}{8EF^3.FC^3}$.

Antager man videre, som bevist i Algebre, at Perpendiklen DC paa Køre-Linien fra Bøje-Punktet D af, eller hvilket er det samme, fra Kræfternes Center $= \frac{DE.\frac{1}{2}p}{EF}$, da faaes,

naar

naar dette sættes i Steden for FC i §. 206, og den deraf følgende Sætning i denne §. $\frac{p \cdot dC}{8EF^3 \cdot FC^3}$, Central-Kraftens

$$\text{Størrelse} = \frac{p^2 dC \cdot EF^3}{DE^3 \cdot \frac{1}{8} p^3 \cdot 8EF^3} = \frac{dC}{DE^3 \cdot p}, \text{ og da } dC \text{ nu er } DE = \frac{1}{DE^2 \cdot p},$$

Altsaa da p eller Parametern er en uforanderlig Størrelse, saa sees; at i et hvert af Keile-Snittene er Central-Kraften, som driver imod Kræfternes Center, eller imod Keile-Snittets Brende-Punkt, altid som Quadraten af Bære-Linien, eller som Quadraten af Distancen fra samme Center forkeert.

§. 207.

Deraf forstaaes, at da i Følge de astronomiske Iagttagelser, Bevægelserne af de store himmelske Legemer altid skee i en af Keile-Snittene, i sær i Ellipsen saaledes, at Liderne ere som Snittene fra Brende-Punktet, saa ere og overalt i Naturen de store bevægende Marsager som forkeert-Viis Quadraten af Distancen fra et vist Punkt, fra Brende-Punktet nemlig. §. 199. Dette er derfor den store Nøgle til Naturen; det er deraf, at vi kunne bestemme saavel Tiden som Stedet i alle de himmelske Legemers Bevægelser. Vi skulle paa andre Steder i vore Forelæsninger finde Leilighed til at tale meer om de Slutninger, som man af det her Beviiste kan gjøre. I det Nærværende ville vi alene see paa, hvad der her er vores Hoved-Sag, paa det nemlig, som der egentlig henhører til Mechanik.

Central Kræfternes Virkning efter Quadraten af Distancen forkeert, er en af de store Hoved-Love i Naturen.

§. 208.

Vi ville derfor alene herfra gaae tilbage, for at tale om Tyngdens sande Natur. Vi have paa adskillige Steder

Den naturlige Tyngde er en Kraft, som tager

af efter Quadraten i det foregaaende antaget som en p^{yr} Hypothese, at den tog
 ren af Distancen af i de større Distancer fra Jordens Center efter Quadraten
 fra Jordens Center forkeert. Men nu sees viensynlig, at hvad vi
 tagen. i denne Henseende have sagt, ikke er en p^{yr} Hypothese, men
 en nødvendig Folge af de store Naturens Love, som bestemme
 Central-Kræfterne i Almindelighed, følgerig og Tyngden, til
 at virke efter den forkeerte Forhold af Distancerne fra Kræf-
 ternes Center forkeert.

§. 209.

I alle Plane: Saa vidt vi kunde følge Naturen ved Jagttagelser, finde
 terne er en vi derfor i alle Legemer en virkelig Tyngde. Solen er det
 Tyngde imod Solens Center, store Legeme, som sidder i det sælles Brende-Punkt, hvilket
 som den her hos os imod Jordens alle Planeterne beskrive. Imod Solens Center tyngde de
 Center. alle, efter den Lov som Quadraten af Distancen forkeert, saa
 den samme Tyngde imod Solens Center findes i dem alle.
 Det er. De søge samtlig at falde ind imod Solen, ligesom
 de Ting, der hos os kastes i Hoiden op over Jorden, falde
 igien ned imod dens Center, og, om intet hindrede, virkelig
 fortsatte Bevægelsen lige ned til dette Middelpunkt.

§. 210.

Den Central: Men denne almindelige Tyngde er den virkelig i absolut
 Kraft, som dei Størrelse den samme, som Tyngden her hos os, eller er den
 ver Maanen, be- at være den alene proportionert? Man bevise, at den er den selv-
 vides, at være den samme, som samme, og det er upaatvibeligt, at den Central-Kraft, som
 Tyngden her hos os, men for- mindstet efter driver Maanen om i sin Bane, er den selvsamme Tyngde,
 som

som den, der er hos os. Saa at Maanen falder ned imod Quadraten af Jordens Center, paa selsamme Maade, som de andre tunge Distancen for-
 Ting, vi see omkring os her paa Jorden.

Thi man veed af Astronomien, at den Linie, som Maanen beskriver omkring Jorden, nærmer sig til en Cirkel, og kan, i Henseende til den hele Omløbs-Tid, ansees for at være denne Linie. Maanen selv er Jorden snart nærmere, snart længere fra den, men Middel-Distancen, hvilken vi her vilde giøre Regningen efter, er omtrent 60 af Jordens Halv-Diametre. Vi see her ei paa de nøieste Bestemmelser af Tallene, da det ikke kommer an paa en ganske nøie Udbregning. Desuden veed man af de astronomiske Jagttagelser, at Maanens periodiske eller Omløbs-Tid beløber omtrent 27 Dage 7 Timer, som gjør i Sekunder 2358000.

Dette forudsat. Siden da Maanen bevæger sig i en Cirkel, er det af det foregaaende overmaade let at bestemme den Middel-Hastighed, hvormed den i et Sekund bør gaae fort i sin Bane. Thi denne Hastighed er efter §. 183 den, som vindes ved Faldet igiennem $\frac{1}{120}$ Deel af Jordens Diameter, og saaledes 3134' i et Sekund. Men Maanens Cirkels Halv-Diameter beløber 1176948000 Fodder, naar Jordens Halv-Diameter antages 19615800'. Saaledes bliver Maanens Cirkels hele Peripherie 7391233440, hvilken, naar divideres med 3134, faaes for Maanens Omløbs-Tid 2358400'', som ikke er uden 400'' adskillig fra Maanens sande Omløbs-Tid, hvorpaa her ikke kan sees, da Forskiellen i Tiden ei bliver uden meget ringe, og Middel-Di-

stancen er virkelig ikke ganske noie 60 af Jordens Halv-Diamettrer.

§. 211.

Paa Hastig-
hedens Størrel-
se kommer det
alene an, i hvad
for en af Keile-
Snittene at De-
vægelsen af det
udkastede Løge-
me skal seer.

Deraf flyder, at den Kraft, som bevæger Maanen i sin Bane, er den selsamme Tyngde, som den, der virker hos os her paa Jorden, undtagen at den er blevet i sin absolute Størrelse forminsknet i Henseende til Distancen, saa denne Størrelse ikke er i Maanens Himmel meer end $\frac{1}{3800}$ Deel af Tyngden hos os. Man kan fortsætte disse Betragtninger og bevise, at denne samme Tyngde driver de øvrige Planeter imod Solen, og Maanerne imod Hoved-Planeterne, men det er paa dette Sted for vidtløstigt, og horer ikke egentlig til disse Forelæsninger.

I den Sted vil jeg kortelig erindre, at man (*) kan bevise, i hvad Tilfælde det med en vis Hastighed udkastede Legeme beskriver enhver af Keile-Snittene.

Nemlig, 1) efter det forhen sagte beskrives en Cirkel, dersom Hastigheden Tingen kastes ud med, er net op den, som vindes ved at falde igiennem den halve Distance fra Kræfternes Center, eller igiennem $\frac{1}{2}AC$, (Taf. IX. Fig. 7.) naar Tingen kastes perpendicular ud i A, og drives igiennem $\frac{1}{2}AC$ af Central-Kraften udi A.

2) Er derimod den Høide, som svarer til den Hastighed, hoormed Tingen kastes ud, dobbelt saa stor som den,

der

(*) See Tillæggene §. 166. 167.

der udfordres til Bevægelsen i Cirklen, eller til, net op'at have Tyngden, da beskriver det udkastede Legeme omkring Kræfternes Center en Parabol, saafremt nemlig at Central-Kraften er som Quadraten af Distancen forkeert.

3) Er Hastighedens Høide endnu større end den, som behøves til Bevægelsen i Parabolen, da beskrives altid af det med denne Hastighed udkastede Legeme en Hyperbol.

4.) Men er Høiden, som svarer til Hastigheden, mindre end den, der behøves til Bevægelsen udi Parabolen, da beskrives altid en Ellipse, undtagen i det ene Tilfælde, da Cirklen beskrives. Saa meget kan desuden iagttages, at saa længe som Hastigheden vel er mindre end Parabolens, men større end Cirkelens, er den ene Brende-Punkt Kræfternes Center, og derimod er det den anden og imodsatte Brende-Punkt, saa tidt som Hastigheden er mindre end den, der udfordres til Cirkel-Bevægelsen.

5) Saa man fremdeles seer, at saa tidt som Kræfternes Center er et Punkt uden Størrelse, der ikke er omringet af en heel Masse, da med hvad Hastighed at end og et Legeme kastes ud, falder det aldrig ned til Kræfternes Center, men bevæges bestandig rundt omkring det i en af Keile-Snittene, og aldrig i nogen anden Linie.

§. 212.

Endnu kan jeg ikke undlade at sige, før jeg slutter denne Central-Kraftes Lærdom, at man af sig selv allerede bør have fundet merke, Central-Kraften er adskilt, efter som den i de frumme Linier at det er ikke ligegyldigt, imod hvad Punkt i den frumme Linie

drive bestandig
hen imod adfæ-
lige Punkter.

Linie at Central-Kræfterne drive. Ivertimod blev dette Punkt et andet, da bleve de selv og under sig adskillige, og den Lov, hvorefter de, for at giøre Bevægelsen i samme krumme Linie, imod et andet Punkt maatte virke, en langt anden. Vi ville oplyse dette med Exempler i de allersimpleste Tilfælde, i Cirkel Linien nemlig.

Er (Taf. IX. Fig. 15.) ADB en Cirkel, da siden §. 205 Central-Kraften altid er som Bære-Linien lige frem tagen, som den rørende Cirkels Halv-Diameter forkeert tagen, og som Kubus af Perpendiklen paa Røre-Linien EAF forkeert tagen, saa sees, at om Central-Kraften driver imod Centret, bliver den $= \frac{AC}{AC \cdot AC}$ eller $= \frac{1}{AC^3}$, det er, som Kubus af Bære-Linien forkeert tagen.

Saafermt derimod, at i samme Cirkel Central-Kraften driver imod et Punkt udi dens Peripherie D, da bliver, om DE er Perpendiklen paa Røre-Linien EAF, og DA Bære-Linien, AC den rørende Cirkels Halv-Diameter, som her er et med Halv-Diameteren i Cirkeln; Central-Kraften $= \frac{DA}{AC \cdot DE^3}$, men Trianglerne AED og ADB ere ligedanne Triangler, fordi ED og AB ere begge, efter vores antagne, perpendicularære paa EAF, og folgelig parallelle, altsaa er $AB : DA = DA : ED$ og $ED = \frac{DA^2}{AB}$, folgelig bliver den Central-Kraft, som bestandig driver imod et Punkt D i Peripherien $= \frac{DA \cdot AB^3}{AC \cdot DA^6}$, og da ydermere Halv-Diameteren, saavel som

velform Diametern, have en bestandig Forhold ei alene under sig, men og i deres adskillige Høider, de forhoies til; saa bliver den Central-Kraft, der driver imod et Punkt i Peripherien $= \frac{1}{DA^3}$ eller som den femte Høide af Bærelinien forkeert tagen.

§. 213.

Ligeledes sees (Taf. IX. Fig. 16.) at om Central-Kraften skulde drive imod et givet Punkt inden i Cirklen, f. E. imod B, da om GAD er igien Cirkelns Høre-Linie, BA Bærelinien BD Perpendiklen paa Høre-Linien, saa bliver Central-Kraften, som bestandig driver imod det Punkt B $= \frac{AB}{FC \cdot BD^3}$, §. 205.

Men Trianglerne FAE og ABD ere ligedanne Triangler, fordi Vinklen DAE = AFE, og ved D og A ere rette Vinkler, saa derfor FE:AE = AB:DB, hvorfor og DB = $\frac{AB \cdot AE}{FE}$; sættes denne Værdie af DB i Steden for den selv i Sætningen $\frac{AB}{FC \cdot BD^3}$, da faaes $\frac{AB \cdot FE^3}{FC \cdot AB^3 \cdot AE^3}$, hvilket giver, da FE³ og FC ere bestandige Storrelser, en Forhold for Central-Kraften $= \frac{1}{AB^3 \cdot AE^3}$, hvoraf sees.

At den Central-Kraft, som driver imod et Punkt inden i Cirklen, er i sammensat Forhold af Quadraten af Bærelinien forkeert tagen og Kubus af Strengen eller den Chorda AE, der gaaer igiennem Kræfternes Center, B ligeledes forkeert tagen.

Man kan deraf strax udlede Sætningen §. 212, som en særdeles Sandhed, der i et enkelt Tilfælde henhører under denne anden almindeligere. Thi er Punktet B i E, eller i Peripherien,

Et

da

da bliver $AB = AE$, og følgelig Central-Kraften $= \frac{1}{AE^3}$, eller som den femte Høide af Værelinien forkeert tagen.

Man udleder ligeledes den forhen givne Værdie af Central-Kræfterne for den enkelte Tilfælde, da de drive imod Centret; thi i denne Tilfælde bliver saavel AB som AE proportionert Cirkelens Halv Diameter, hvilket, naar først er iagttaget, følger, at vores forhen i denne §. givne almindelige Værdie af Central-Kraften $= \frac{AB \cdot FE^3}{FC \cdot AB^3 \cdot AE^3}$ bliver proportionert $\frac{1}{FC^3}$, eller som Kubus af Diametern forkeert.

Det er ikke mindre klart, at man kunde af denne sidste almindelige Værdie for Central-Kraften udlede alt det, som forhen er bleven sagt om Central-Kræfterne i Cirklen, og de af dem giorte Følger. Men da vi her sætte større Priis paa de letteste og simpleste Maader at udlede Sandheden paa, end paa de meer abstrakte, og følgelig vanskeligere, saa ville vi ei opholde os længere ved denne Sag, for at gaae fort til andre Hoved-Løves Betragtning i Naturen.

Derimod kunde vi ikke undlade til Beslutning kortelig at erindre. At da man i Almindelighed forstaaer ved det Ord Tyngde en Kraft i Naturen, som driver altid sin Inertie paa alle Steder og i alle adskillige Stilninger imod et vist Center, saa forstaaes nu fuldkommen, hvad vi have sagt i den anden Forelæsning §. 34, at Tyngden er en Kraft, som virker ligesaavel i Planeterne og hele Verden igiennem, som her hos os, og i §. 46, at det er egentl. af Maaden, hvorpaa Tyngden virker i Planeterne, at vi vide, hvorledes den virker hos os. Thi af det, hvad vi have forhen sagt §. 200. og siden langs hen i denne Forelæsning, er der ingen Tvivl paa, at jo baade i hele Naturen regierer en Tyngde, og desuden en ligesaadan, som den her hos os.

Etvende

Syvende Tillæg.

Om Central-Kræfterne.

I.

Almindelig Theorie for Central-Kræfterne.

§. 158.

Gr (Taf. X. Fig. 2.) ACD en krum Linie i Almindelighed. B Central-Kræfternes Center, GDI en Tangent eller Køre-Linie til den krumme Linie, hvilken falder ind med et dens Element CD. BC og BD denne Linies Ordinater henregnede til Kræfternes Center B, DF og CE Cirkel-Buer, der ansees som Abscisser, hvilke svare til Ordinaterne efter den i Geometrien sædvanlige Maade, naar Ordinaterne løbe sammen udi et Punkt B. Da om man fremdeles kalder DB y , DF x , CL dy , DL dx , og Elementet af den krumme Linie CD, ds , da kan videre agtes.

At om den hele Kraft i D forestilles ved BD, kan den altid opløses udi to andre Side-Kræfter, en Tangential DI, hvilken altid driver efter Køre-Linien GCDI af den krumme Linie, og en anden, der er lodret eller normal paa Linien KD, saa den hele Kraft efter BD saaledes opløses i to andre, hvoraf den ene ei er den anden til Hinder, §. 67. I. men som begge med forenede Kræfter alene forandre Directionen, for saavidt DK virker, og Hastigheden for saa vidt DI virker. Alt bestaaer i at bestemme disse to adskillige Kræfter, og deres Virkninger paa den Ting, som bevæges.

Et a

Kaldes

Kaldes den hele Kraft, som virker efter DB, K, da maa først agtes, at siden Buen DL er uendelig liden, kan den ansees for en ret Linie perpendicular paa Ordinaten CB, hvorved da CLD og DBI blive ligedanne Triangler, fordi ved L og I ere rette Vinkler, CB og DB ere hverandre efter vores antagne uendelig nær, Vinklen CBD er derfor $= 0$, og CB, BD parallelle eller ligeløbende Linier, saa derfor Vinklen LCD $=$ BDI og DC : CL $=$ DB : DI eller $ds : dy = K : K \frac{dy}{ds} = BI$, saa $K \frac{dy}{ds}$ er alletider Værdien af Kraften efter den krumme Linies Rørelse-Linie, i alle de Bevægelser, hvilke man paa nogen Maade kan henseere til centrale, hvilket kan skee i en Mængde flere Tilfælde, end i de, som vi her egentlig have for at afhandle.

Hvad Normal-Kraften BI angaaer, da bestemmes dens Værdie ligeledes. Thi DC : DL $=$ DB : BK, eller $ds : dx = K : \frac{K dx}{ds} = BI$, hvilket er den almindelige Værdie for Normal-Kraften i alle Bevægelser, der kunne ansees som centrale.

For nu videre at komme til de fornødne Ligheder, hvilke forklare disse Krafters Henseender til Hastigheden, Tiden og Løbe-Banen, behøves intet andet, end at sætte deres enkelte Værdier paa en beherig Maade i de almindelig forhen givne Ligheder, i hvilke Krafterne ere anførte paa det allermest ubestemte. Da derfor §. 4. 7. $\frac{np}{m} dt = dv$, og $\frac{dy}{v} = dt$, saa sees, at om man, i Steden for $\frac{p}{m}$, sætter $K \frac{dy}{ds}$, faaes af disse almindelige den i dette enkelte Tilfælde tienslige Lighed for Kraften

Kraften efter Tangenten, og sætter man ligeledes, i Steden for $\frac{p}{m}$, $\frac{Kdx}{ds}$, faaar man Ligheden for Normal-Kraften, og saaledes

1) For Tangential-Kraften $-\frac{nKdy}{ds}dt = dv$. dy sættes negtende, fordi y tager af, som man seer af Figuren, alt som x tager til. Men fordi $dt = \frac{dy}{v} = \frac{ds}{v}$, bliver $-nkdy = vdv$, hvorved agtes, at v betyder Hastigheden udi D , og at K betyder ei Pressionen, men den hastiggjørende Kraft.

2) For Normal-Kraften faaes ligeledes først $\frac{Kdx}{ds}dt = \frac{dv}{n}$, men da denne Kraft er perpendicular paa den krumme Linie, og selgelig altid driver efter Direktionen af Køre-Cirkels Haly-Diameter, som vi ville kalde r , saa er det klart, at den normale Kraft er 1) i Følge det foregaaende $= \frac{Kdx}{ds}$, 2) naar den anses som en Kraft, der driver imod den rørende Cirkels Center $= \frac{v^2}{r}$, §. 176. F. saa at derfor $\frac{Kdx}{ds} = \frac{v^2}{r}$, og selgelig bliver $rKdx$ proportionert $v^2 ds$, og $rKdx = mv^2 ds$, hvor m betyder en bestandig Sterrelse.

Forklares nu n saaledes, som før i Tillægget til den anden Føreløsning, saa man sætter, ligesom der, i Steden for Hastigheden den Heide igiennem hvilken ved Faldet Hastigheden erhverves, da faaes disse Forhold.

1) For den Kraft, som driver efter Køre-Linien eller Tangenten, $-dV = Kdy$.

Et 3

2) For

2) For den, som er perpendicular paa den krumme Linie eller normal faaes, $Kr dx = 2 V ds$, hvor V betyder igjen den nylig omtalte Høide, som svarer til Hastigheden.

Widere; om Perpendiklen paa Kere-Linien DI , nemlig BI , kaldes p , da fordi $DB : BI = CD : DL$ eller $y : p = ds : dx$, bliver $y dx = p ds$, og om under Differentiationen ds iblant de for- anderlige Størrelser ansees som uforanderlig, bliver

$$dp = \frac{dy dx + y ddx}{ds}.$$

Men man veed af Algebre, at Kere-Cirkelns Halv-Diameter er, om ds ansees som uforanderlig, $\frac{y dy ds}{dy dx + y ddx}$, sættes dette behørig om i

den nylig givne differentielle Størrelse $\frac{dy dx + y ddx}{ds} = dp$, da faaes

$r = \frac{y dy}{dp}$, selgelig faaes for Normal-Kraften denne nye Værdie, eller

rettere Lighed $\frac{K y dy dx}{dp} = 2 V ds$, og da efter det forhen sagte $\frac{ds}{dx} = \frac{y}{p}$,

faa er for Normal-Kraften $\frac{K dy}{2 V} = \frac{dp}{p}$.

2.

Af de fundne almindelige Kræfter at finde fremdeles den krumme Linie, hvori Bevægelsen skeer, eller Løbe Ba- nen, og Hoved-Reglerne for denne Bevægelse i Almindelighed.

§. 159.

Sævelsom Hæ-
stigheden.

For at finde Banen af Bevægelsen eller den krumme Linie, i hvilken at Bevægelsen ved Hastigheden og Central-Kræfterne skeer, be-
høves

høves nu intet andet, end først at finde Hastigheden i Almindelighed, hvortil-igien alene udfordres at søge en dobbelt Værdie for K af de to givne Ligheder i §. 158. Den ene $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$, hvoraf trefles $K = \frac{2Vdp}{pdy}$, den anden $-dV = Kdy$, hvoraf faaes $K = -\frac{dV}{dy}$, og derfor $\frac{2Vdp}{pdy} = -\frac{dV}{dy}$, og da dy gaaer ud, $\frac{2Vdp}{p} = -dV$, i hvilken Lighed ingen anden Sterrelse forekommer, end de alene, som henhøre til den krumme Linie, og til at tilkiendegive den Linie V, ved at sælde igiennem hvilken Hastigheden vindes.

Denne Lighed $\frac{2Vdp}{p} = -dV$, viser, hvad Hastigheden er i et hvert Punkt af den krumme Linie, hvilken let findes, siden man faaer, ved at dividere ved V, $\frac{2dp}{p} = -\frac{dV}{V}$, hvilket altid kan i Almindelighed integreres, og bliver til $2Lp - b = L\frac{1}{V} + B$, B og b betyde bestandige logarithmiske Sterrelser, som fyldestgiøre det ubestemte Integral, og findes ved at sætte i Steden for b, BA, om Tingen ansees som fastet perpendicular ud paa Arken AB i A, hvis ikke; da en Sterrelse $= nAB$, i hvilken n er uforanderlig og bestemmes altid let af den givne Inklinations-Vinkel i A, FAB: saaledes faaes, da b og B ere logarithmiske Sterrelser, som vi derfor ville kalde 2Lb og LB denne Lighed.

$2Lp - 2Lb = L\frac{1}{V} + LB$, hvoraf igjen treffes denne anden $2Lp - 2Lb - LB = L\frac{1}{V}$, som besleber $L\frac{p^2}{Bb^2} = L\frac{1}{V}$ og naar Sterrelserne selv tages $\frac{p^2}{Bb^2} = \frac{1}{V}$ eller $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, i hvilken

Ligh. d

Lighed b betyder, som før er sagt, Perpendiklen fra Kræfternes Center paa Kere-Linien i A, og B-Høiden τA , hvilken vi ville sætte svarende til den Hastighed, hvormed den Ting, som bevæges, antages at være kastet ud udi samme Punkt A.

§. 160.

Da saaledes i Almindelighed $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, saa er bestandig $V = \frac{1}{p^2}$, og da V er som Quadraten af Hastigheden, saa er i alle Punkter af den krumme Linie Hastigheden altid som Perpendiklen paa Kere-Linien forkeert tagen, fuldkommen som vi have før bevist det i Forelæsningerne §. 203.

§. 161.

Videre kan agtes i denne Henseende, at om ved at falde igiennem τA den Ting, som bevæges, drevet af den Kraft K imod Kræfternes Center B, den Hastighed kunde vindes, som Tingen har i A, da maa den ved at blive ved at falde igiennem AE, fremdeles i E faae i den rette Linie τE den samme Hastighed, som i C, i F den samme som i D, eller altid den samme Hastighed i de samme Distancer fra Kræfternes Center. Thi da for Tangential-Kraften er $-dV = K dy$, §. 158. saa bliver $V = \int -K dy$, og da ligeledes for Faldet i den rette Linie bliver $dV = -K dy$, og atter igien $V = \int -K dy$, saa er det klart, at i begge Henseende ingen Forskiel er, hvorfor man altid kan til et hvert Punkt D i den krumme Linie ansee τF som den Høide, der svarer til Hastigheden i F, alene at τA en gang for alle er bleven bestemt i Ligheden $V = \frac{Bb^2}{p^2}$.

§. 162.

§. 162.

Hvad Tiden for Bevægelsen i Almindelighed angaaer, da be- ^{Og Tiden lige-}
stemmes den ligeledes overmaade let. Thi Tiden i den ensdanne Bevæ- ^{ledes.}

gelse igiennem CD er $= \frac{CD}{\sqrt{V}} = \frac{ds \cdot p}{b\sqrt{B}}$, og altsaa proportionert

$p \cdot ds$, fordi $b\sqrt{B}$ er en bestandig Størrelse. Hvoraf man seer, at Tiden igiennem et hvert Element er proportionert Snittet CBD fuldstømmen, som vi før have beviist det i Forelesningerne §. 199, sælgelig og hele Linien AD igiennem, som ADBA, siden den hele Tid bliver *sp. ds.*

§. 163.

Da Normal-Kraften er den, som forandrer Direktionen, og Med Løbe-Kraften ^{nen.} den, som bestemmer overalt den krumme Linie, saa maa man,

for at finde den krumme Linie selv i Ligheden til Normal-Kraften $\frac{Kdy}{2V}$
 $= \frac{dp}{p}$, i Steden for V sætte dens Værdie $\frac{Bb^2}{p^2}$, hvorved man kom-

mer til denne anden Lighed $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, en Lighed, som atter igjen haver det fortreffelige, at de ubekiendte Størrelser, saa tidt som K er en Function af y, ere skilte fra hverandre: Og da i denne Lighed, foruden de bestandige Størrelser, ingen andre forekomme, end de forhen omtalte Ordinater til den krumme Linie og Perpendiklerne paa de til dem svarende Rørelse-Linier, saa sees, at denne Lighed er til den krumme Linie selv umiddelbar, skient paa en usædvanlig Maade, da Perpendiklerne paa Tangenterne ere i Steden for Abscisser saa at sige; imidlertid er Ligheden dog altid simpel, for saa vidt, som den er given ved rette Linier.

Uu

§. 164.

§. 164.

Vi see deraf videre, at hvad vi her have sluttet, træffer fuldstømmen ind med det forhen sagte i Forelæsningerne. Da nemlig $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, og $r = \frac{ydy}{dp}$, saa bliver $K = \frac{2Bb^2 y}{p^3 r}$, og følgelig K proportionert $\frac{y}{p^3 r}$, saa Central-Kraften altid bliver i sammensat Forhold af Bøye-Linien ligestrem tagen, af Kere-Cirkelns Halv-Diameter forkeert, og Perpendiklen paa Tangenten dens Kubus ligeledes forkeert tagne.

§. 165.

Ligheden til Løbe Vænen søges imellem retlinde Ligheden er imellem Bøye-Linien, tagen som Ordinate fra Kræfternes Center og Perpendiklen paa Kere-Linien, og dette Slags Ligheder i Henseende til de, som sædvanlig bruges i Algebre, ere lidet bequemme til at slutte de paa den sædvanlige Maade fundne Egenskaber af de algebraiske Linier, saa er det første, som man her see paa, at bringe denne Lighed til en anden imellem de retlinede Ordinate og Abscisser, der staae perpendicular paa hverandre, hvilket er i Almindelighed altid gjerligt, saa tidt ikke K er andet end en Function af y , og til den Ende bør man allerførst see paa at faae en Lighed, i hvilken Perpendiklen paa Kere-Linien ei mere forefindes.

For at ioversætte dette, maa agtes, (Taf. X. Fig. 3.) at om ADF er den krumme Linie, C Kræfternes Center, $CD = y$, $CH = p$, $DM = dy$, $CI = x$, $IK = DL = dx$, $ID = z$, $EL = dz$, Hastigheden i A den, som svarer til Heiden BA og denne

denne Høide = B, Perpendiklen paa Tangenten i A, hvor Bevægelsen antages at begynde, som før = b, da bliver $z^2 = y^2 - x^2$.

$$\begin{aligned} dz &= \frac{ydy - xdx}{\sqrt{y^2 - x^2}} \text{ og } DE^2 = dx^2 + dz^2 \\ &= \frac{y^2 dy^2 - 2yxdydx + x^2 dx^2 + y^2 dx^2 - x^2 dx^2}{y^2 - x^2} \\ &= \frac{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}{y^2 - x^2}, \text{ og } ME^2 = DE^2 - DM^2 \\ &= \frac{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}{y^2 - x^2} - dy^2 = \frac{(xdy - ydx)^2}{y^2 - x^2}, \end{aligned}$$

hvoraf man ſælgelig ſaaer

$$DE = \frac{\sqrt{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \text{ og videre}$$

$$ME = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \text{ men da } ds : ME = y : p, \text{ ſaa ſaaes}$$

$$p = \frac{yxdy - y^2 dx}{\sqrt{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}}. \text{ Sæges nu ligeledes } p \text{ af den}$$

$$\text{Lighed } \frac{-Kdy}{Bb^2} = \frac{-2dp}{p^3}, \text{ §. 158 og 160, ſom integrert giver } \int \frac{-Kdy}{Bb^2}$$

$$= \frac{1}{p^2} + C, \text{ ſaa ſaaes } \int \frac{-Kdy}{Bb^2} - C = p, \text{ og ſælgelig } \int \frac{-Kdy}{Bb^2} - C$$

$$= \frac{yxdy - y^2 dx}{\sqrt{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}} \text{ en Lighed, hvori } p \text{ ikke meer findes,}$$

da K antages ei at være andet, end en Function af y, og C er beſtandig.

For at giere denne Lighed i Hænſeende til de beſtandige Sterrelſer ſaa ſimpel, ſom muelig, kan man antage, at $\int -Kdy$ er i A = 0, ſiden det Punkt A kan tages efter Behag; alſaa bliver ſimpel hen Integralen ſyldeſtiort af den Sterrelſe $\frac{1}{p^2}$, hvortil i A efter §. 159

$$\begin{aligned} \text{seer} - \frac{1}{b^2}, \text{ saa derfor } \frac{1}{Bb^2} \int -Kdy &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}, \text{ og } p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \int Kdy}} \\ &= \frac{yxdy - y^2 dx}{\sqrt{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}} \end{aligned}$$

§. 166.

Efter at p saaledes er bragt ud af Ligheden, er denne sidste givet udi y og x alene. Integreres den da igien, og x og y udoiffes, er det altid let, af x og y , som givne, at finde z , fordi $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

For derfor at bringe den forhen givne Lighed, som var

$$\frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \int Kdy}} = \frac{yxdy - y^2 dx}{\sqrt{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}}, \text{ dertil, maa man sege at giøre det sidste Stykke integrabel. Da strax sees, at man saar}$$

$$\frac{yxdy - y^2 dx}{\sqrt{y^2 dy^2 - 2yxdydx + y^2 dx^2}} = \frac{(xdy - ydx)}{y \sqrt{dy^2 - 2xdydx + dx^2}}, \text{ hvoraf man}$$

fremdeles kan vente, at denne Størrelse lader sig giøre simplere ved at sætte $x = ry$, hvorved man og saar, naar alt er bleven behørig

$$\text{omfat, denne Lighed } \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{b\sqrt{B}dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2 \int Kdy}},$$

i hvilken Lighed de ubekiendte ere fuldkommen skilte fra hverandre, og man af r og y givne altid kan finde x og z , fordi $x = ry$ og $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

For $\int \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$ er et Integral til Cirklen, bliver r derfor (om den

$$\text{til samme svarende Vinkel er } f) = \frac{e^{f\sqrt{1-r^2}} - e^{-f\sqrt{1-r^2}}}{2\sqrt{1-r^2}}, \text{ naar } e \text{ for}$$

flares,

flares ved Ordinaten til Log. 1. i den hyperbolske Logarithmik. Eller

om Vinklen ACD kaldes f , er $t = \frac{e^{f\sqrt{-1}} + e^{-f\sqrt{-1}}}{2}$.

§. 167.

Deraf sees, at om Ligheden $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B}dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2fKdy}}$

skal blive algebraisk, maa de af begge Lighedens Dele stundende Logar. Integraller være af den Beskaffenhed, at de transcendentale Størrelser kunde paa begge Sider have hverandre op udi Ligheden.

Følgelig maa i denne Tilfælde $\frac{b\sqrt{B}dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2fKdy}}$ være et

Integral af selsamme Art, som $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, følgelig maa, for den Tilfælde af algebraiske Ligheder, den forrige Lighed almindelig falde i denne

anden $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{ndl}{\sqrt{a^2-l^2}}$.

§. 168.

Da nu det imaginære logarithmiske Integral af $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{-1}} L_{\sqrt{-1}} \sqrt{-1} + \sqrt{1-t^2}$, og ligeledes af $\frac{ndl}{\sqrt{a^2-l^2}}$, er

samme Integral $= \frac{n}{\sqrt{-1}} L_{\sqrt{-1}} \sqrt{-1} + \sqrt{aa-ll}$, saa seer man, at

$\sqrt{-1} + \sqrt{1-t^2} = (\sqrt{-1} + \sqrt{aa-ll})^n$ en Lighed, hvor de transcendentale Størrelser have sig selv op, og som derfor følgelig haver alle de forlangte Egenskaber.

§. 169.

§. 169.

Sætter man indtil videre $(\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-l^2})^n = q$, da bliver
 $\sqrt{V-I} + \sqrt{I-l^2} = q$ og $t = \frac{q^2 - I}{2q\sqrt{V-I}} = \frac{q}{2\sqrt{V-I}} - \frac{I}{2q\sqrt{V-I}}$,
 følgelig faaes

$$t = \frac{(\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-l^2})^n}{2\sqrt{V-I}} - \left(\frac{I}{2\sqrt{V-I}(\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-l^2})^n} \right)^n$$

eller, fordi $\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-l^2}$, multiplicert med $\sqrt{V-I}$
 $-\sqrt{aa-l^2} = -aa$, faaes, om Størrelserne overalt ret om-

$$sættes, t = \frac{(\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-l^2})^n}{2\sqrt{V-I}} - \frac{(\sqrt{V-I} - \sqrt{aa-l^2})^n}{2aa^n\sqrt{V-I}},$$

hvorved maa agtes, at Integralen endnu ikke er fuldestgiort med
 den bestandige Størrelse, som man maa undersøge hvad bliver i de
 enkelte Tilfælde; i Almindelighed derimod ser man, at den bliver

$$-\frac{n}{\sqrt{V-I}} L\beta\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-\beta^2}, \text{ saa man faaar:}$$

$$t = \frac{(\sqrt{V-I} + \sqrt{aa-l^2})^n \cdot (\sqrt{a^2 - \beta^2} - \beta\sqrt{V-I})^n}{2aa^n\sqrt{V-I}} \\ - \frac{(\sqrt{aa-l^2} - \sqrt{V-I}) \cdot \sqrt{a^2 - \beta^2} + \beta\sqrt{V-I})^n}{2aa^n\sqrt{V-I}}$$

§. 170.

Slutninger af det forrige i den Tilfælde, da Central-
 Kraften er som Quadraten og som Kubus
 af Distancen forkeert.

Dersom her, som tilforn (Taf. X. Fig. 3.), de samme Be-
 nævninger beholdes, og man antager, at den Ting, som bevæges,
 fastes

Kastes i A perpendicular ud paa AC, da bliver AC Perpendiklen paa Tangenten i A, og Bære-Linien tillige $= b$. Videre kalde vi den Linie AB, igiennem hvilken Hastigheden udi A vindes B. Da nu videre alle de foranderlige sættes at have samme Bemærkelse som før, er det allerførst nødvendigt, for at finde Vænen af Bevægelsen, at be-

$$\text{stemme } \int K dy \text{ i Ligheden } \S. 165. \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B} dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2 \int K dy}}.$$

Da derfor den naturlige Tyngde kan ligesaavel, som den Central-Kraft, vi her handle om, ansees for at være som Quadraten af Distancen forkeert, siden af dette sidste følger, som man let kan forvise sig om ved at giøre Udrengningen, at den hastiggierende Kraft af Tyngden i denne sidste Tilfælde bliver for smaa Distancer bestandig, hvilket var den Tilfælde, vi før antog som Tyngden hos os egentlig, saa følger; at Tyngdens hastiggierende Kraft hos os kan ansees for det Maal og den Unitet, hvortil alle andre deslige hastiggierende Kræfter kunne henføres. Kaldes da Jordens Halv-Diameter r , bliver $\frac{1}{r^2} : g = \frac{1}{y^2} : \frac{gr^2}{y^2}$, hvilket er Central-Kraften, der svarer til den Distance fra Kræfternes Center y , om $g = 1 = \frac{r^2}{y^2}$, saa $K dy = \frac{r^2 dy}{y^2}$ og $\int K dy = -\frac{r^2}{y}$; hvilket Integral fuldestigieres ved at legge til, hvad $\int K dy$ bliver i det bekjendte Punkt A, da det er $\frac{r^2}{b}$, saa $\int K dy = \frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}$.

$$\text{Følgelig bliver } \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B} dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2 \left(\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y} \right)}},$$

hvoraf sees, at da Nævneren i dette sidste Stykke ei gaaer høiere end til anden Høide, kan dette Integral $\int \frac{b\sqrt{B} dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2 \left(\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y} \right)}}$

ei alene integreres ved de imaginære logarithmiske Størrelser, men end-
 og føres til en ligesaadan almindelig Skikkelse, som den er $\frac{dt}{\sqrt{1-p^2}}$,
 hvilket strax ioversættes ved at giøre $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2b^2 Bp}{2b^2 B}$, hvorved man
 faaer $\frac{dt}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{dp}{\sqrt{\left(\frac{2bB-r^2}{2b^2 B}\right)^2 - p^2}}$, efter hvilken Forandring
 udi Differential-Ligheden $p = l$ udi §. 169.

Sammenligner man denne Tilfælde med den almindeligere §. 169, da
 bliver denne sidste overmaade simpel af Aarsag at $n = 1$. Thi om man

virkelig multiplicerer $\frac{(N-1 + \sqrt{aa-ll}) \cdot (\sqrt{a^2-\beta^2} - \beta\sqrt{-1})}{2a^2\sqrt{-1}}$,

og ligeledes $\frac{-(\sqrt{aa-ll} - l\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{a^2-\beta^2} + \beta\sqrt{-1})}{2a^2\sqrt{-1}}$, da

faaer man, efter at Størrelserne tilberlig ere blevene ophævede imod
 hverandre, $t = \frac{-2\beta\sqrt{-1}\sqrt{a^2-l^2} + 2l\sqrt{-1}\sqrt{a^2-\beta^2}}{2a^2\sqrt{-1}}$

$= \frac{l\sqrt{a^2-\beta^2} - \beta\sqrt{a^2-l^2}}{a^2}$, og da $l = p$, bliver saaledes

$t = \frac{p\sqrt{a^2-\beta^2} - \beta\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$, hvori den bestandige Størrelse β ,

efter det nærværende Tilfældes Beskaffenhed næiere bør bestemmes.

I den Henseende maa agtes, at $t = \frac{x}{y}$ er Cosinus til Vink-
 len DCA, og følgelig, naar i A denne Vinkel, $= 0$ er $t = 1$.

Videre da $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2b^2 Bp}{2b^2 B}$, hvilket udi A, hvor $y = b$, foran-

dres

Dres til $l = p = \frac{r^2 - 2bB}{2b^2B}$, saa seer man strax, at da $a = \frac{2bB - r^2}{2b^2B}$,

§. 167 er $\sqrt{a^2 - l^2} = 0$, saa man faaer $t = \frac{p\sqrt{a^2 - \beta^2}}{a^2}$, og da i A, $t = 1$ er $a^4 = a^2p^2 - \beta^2p^2$, hvoraf, naar β søges, faaes $-\beta^2 = \frac{a^2(a^2 - p^2)}{p^2}$, men da efter det allerede sagte ($a^2 - l^2$) eller $a^2 - p^2 = 0$, saa bliver $\beta^2 = 0$, og selvfølgelig $\beta = 0$.

Dette giort, er da $at = p$, eller $(r^2 - 2bB)t = -2b^2Bp$, i hvilken Lighed, naar i Steden for t sættes $\frac{x}{y}$, og i Steden for p dens Værdie af den forrige Lighed $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2b^2Bp}{2b^2B}$, da faaes i x og y Ligheden for den krumme Linie eller den søgte Lebe-Bane, hvilken tilkiendegives ved $y^2 = ((r^2 - 2bB)^2x^2 - 4b^2Bx(r^2 - 2bB) + 4b^4B^2) : r^4$, og da $y^2 = x^2 + z^2$, faaes endelig Ligheden imellem de koordinerte Linier CK og KE, som bliver

$$z^2 = \frac{(4b^2B^2 - 4bBr^2)x^2 - 4b^2B(r^2 - 2bB)x + 4b^4B^2}{r^4},$$

hvilken Lighed, man strax seer, er til en af Keile-Snittene, fordi Højderne af de foranderlige Koordinater ei gaar over Quadraten.

§. 171.

Da derfor Ellipsen er den af Keile-Snittene, af hvilken man Lebe-Banens allerlettest bringer alle de øvrige ud, ville vi sammenligne den fundne fuldstændige Bestemmelse i den Lighed med Ellipsens Lighed, naar i den Abscisserne regnes fra Bren-naturlige Kræfternes Hypo- these. de Punkter f , siden man da faaer en Lighed, omtrent af samme Stik- felse, som den foranførte.

Kr

Er

Er da (Taf. 9. Fig. 12.) ACDB en Ellipse, hvis store Arel $DB = A$, Parametern $= p$, $fa = x$, da er det bekendt af Algebre, at $fH = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - pA}$, saa $fD = \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - pA})$, $Da = \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - pA}) - x$, $aB = \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - pA}) + x$, og fordi i Ellipsen er altid $Da \cdot Ba : ab^2$, som Ellipsens store Arel til Parametern, saa faaes

$$y^2 = \frac{-px^2}{A} - \frac{px}{A}\sqrt{A^2 - pA} + \frac{1}{4}p^2.$$

Dersom med denne Lighed til Brende-Punktet af Ellipsen den forrige i Slutningen af §. 170 sammenlignes, da findes strax

1) Parametern af Løbe-Banen, thi $\frac{1}{4}p^2 = \frac{4b^2B^2}{r^4}$, og derfor er Løbe-Banens Parameter $= \frac{4b^2B}{r^2}$.

2) Dens store Arel, thi man faaer $\frac{-p}{A} = \frac{4b^2B^2 - 4bBr^2}{r^4}$, hvori, naar for p sættes den nylig fundne Værdie $\frac{4b^2B}{r^2}$, saa faaes $A = \frac{-br^2}{bB - r^2} = \frac{br^2}{r^2 - bB}$, som er den elliptiske Løbe-Banes Arel.

3) Da i Ellipsen den lille Arel, eller Ordinaten i Centret, altid er den midlere proportionelle imellem den store Arel og Parametern, saa følger, at den lille Arel ere

$$= \sqrt{\left(\frac{br^2}{r^2 - bB} \cdot \frac{4b^2B}{r^2}\right)} = \frac{2b\sqrt{bB}}{\sqrt{r^2 - bB}}.$$

4) Deraf sees, at saa tidt som r^2 er mindre end bB , bliver $\sqrt{r^2 - bB}$ en umuelig Sterrelse, selgelig den lille Arel imaginær, og den store negativ, hvoraf sluttes

a) At Løbe-Banen bliver i denne Tilfælde en hyperbolisk Linie, og derfor ikke egentlig

2) En

b) En Ellipse, uden saa tidt som r^2 er større end bB .

c) Er $r^2 = bB$, da bliver $r^2 - bB = 0$, og saavel den lille som den store Arel $= \frac{1}{0}$, det er, de blive af en uendelig Størrelse, og derfor er Løbe-Banen i denne Tilfælde en Parabol.

d) I den egentlige Tilfælde igjen, da Løbe-Linien er en Ellipse, bliver denne sidste forandret til en Cirkel, saafremt at begge Arel ere lige store, selvselig om $\frac{2b\sqrt{bB}}{\sqrt{r^2 - bB}} = \frac{br^2}{r^2 - bB}$, hvilket giver $r^4 = 4bBr^2 - 4b^2b^2$, hvilke Størrelser blive paa begge Sider lige store, saafremt at $2bB = r^2$.

5) Dersom i Ligheden, §. 170. $z^2 = \frac{4b^2B^2}{r^4}$ o. s. v. sættes $B = 0$, bliver Ligheden $z^2 = 0$ til en ret Linie Df , over hvilken den bevægte Ring bestandig maa gaae frem og tilbage, fordi Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen udi $D = 0$.

6) Videre findes Eccentriciteten eller Brende-Punktets Afstand fra Centret $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 - pA} = \frac{2b^2B - br^2}{2r^2 - 2bB}$, hvoraf sees

a. At saa længe denne Distance er positiv eller bekræftende, er Kræfternes Center i det forreste Brende-Punkt F , det er, saa tidt som r^2 er mindre end $2bB$.

b. Derimod falder det i Brende-Punktet paa den anden Side Centret, om denne Distance bliver negtende.

7) For at finde Hastigheden i et hvert Punkt af den krumme Linie, maa man betiene sig af Ligheden §. 160, $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, og be-

stemme i den igien Værdien af p af Ligheden §. 165, $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - fKdy}}$,

hvilket beløber, i Følge §. 170, $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{y}}}$, eller

$$p = \frac{b\sqrt{Bby}}{\sqrt{bBy + r^2(b-y)}}, \text{ og f\u00e6lgelig } V = \frac{Bb^2}{p^2} = \frac{bBy + r^2(b-y)}{by},$$

$$\text{Men } y = fb \text{ og } fb + Gb = DB, \text{ f\u00e6lgelig er } \frac{br^2}{r^2 - bB} - y \\ = GB = \frac{(b-y)r^2 + bBy}{r^2 - bB}, \text{ f\u00e6lgelig } V = \frac{Gb \cdot (r^2 - bB)}{by}, \text{ men } y$$

$$= fb, \text{ f\u00e6lgelig bliver } V = \frac{Gb}{fb} \cdot \frac{r^2 - bB}{b}, \text{ og H\u00e6stigheden } = \frac{\sqrt{Gb}}{\sqrt{fb}}.$$

$\sqrt{\frac{r^2 - bB}{b}}$, f\u00e6lgelig, da $\frac{r^2 - bB}{b}$ er en uforanderlig St\u00f8rrelse, saa

bliver H\u00e6stigheden altid proportionert $\frac{\sqrt{Gb}}{\sqrt{fb}}$.

8) Tiden af Bev\u00e6gelsen angaaende, da er den efter det forhen sagte altid proportionert de elliptiske Snit fra Brendepunktet af beregnede, thi i F\u00f8lge det forhen sagte §. 162 er Tiden af Bev\u00e6gelsen $\int \frac{ds \cdot p}{b\sqrt{B}}$, hvilket i Ellipsen, om den Elliptiske Sektor kaldes S, bel\u00f8ber

$$\frac{2S}{b\sqrt{B}}, \text{ og for den hele periodiske Tid } \frac{2R}{b\sqrt{B}}, \text{ om det hele elliptiske}$$

Num kaldes R.

Men man veed af Algebre, at enhver Ellipse er i sit innere Num saa stor som en Cirkel, hvis Diameter er den midtlere proportionelle imellem begge Ellipsens Arel, den store nemlig og den lille. Kaldes da Ellipsens store Arel A, dens Parameter p, bliver den lille Arel $= \sqrt{Ap}$, og Cirklen, hvilken er ligesaa stor som Ellipsen,

$$\text{dens Diameter} = \sqrt{A \cdot \sqrt{Ap}}. \text{ F\u00f8lgelig bliver } \frac{2R}{b\sqrt{B}} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{2A\sqrt{Ap}}{b\sqrt{B}}.$$

Men §. 171, 1. bliver $p = \frac{4b^2B}{r^2}$, og derfor $\frac{2R}{b\sqrt{B}} = \frac{22}{28} \cdot \frac{2A\sqrt{A} \cdot \frac{4b^2B}{r^2}}{b\sqrt{B}}$
 $= \frac{22}{7} \frac{A\sqrt{A}}{r}$, som er Tiden af det hele Omleeb i den elliptiske Bane.

Man kan ligeledes bevise, at Banen er en Ellipse i den Tilfælde, da (T. X. §. 2.) Kæde-Linien udi A er skiev paa Aksen, og at Kræfternes Center da ligeledes er i Brendepunkter: Men i denne Tilfælde seer man selv, at de bestandige Størrelser for det Punkt A blive adskillige fra de i forrige Oplesning brugte, siden Perpendiklen paa Kæde-Linien er ikke nu meer den samme Linie, som Kæde-Linien udi A.

§. 172.

Af det allerede beviiste fortaaes fuldkommen, hvad vi have sagt Det §. 211
 §. 211 i Forelæsningerne; Thi da vi her have beviist, at Cirkler i Forelæsninger-
 ikke beskrives af et Legeme, der kastes ud i en given Afstand fra Kræf- ne saate bliver
 ternes Center, uden i det Tilfælde alene, da $2bB = r^2$, saa skeer beviist.
 Cirkel-Bevægelsen altid med den Hastighed, til hvilken svarer den
 Høide $B = \frac{r^2}{2b}$.

Da nu den naturlige Tyngde eller Tyngden her hos os er sat
 $= 1$, saa bliver $B : \frac{1}{2}b = \frac{r^2}{b^2} : 1$, thi denne Proportion er det
 samme, som den foresatte Lighed $B = \frac{r^2}{2b}$. Men, naar Tyngden hos
 os $= 1$, er den, som svarer til en Distance b fra Kræfternes Cen-
 ter i forkeert Forhold af Quadraten af Distancen $= \frac{r^2}{b^2}$. Følgelig

sees heraf atter igien, hvad vi forhen have sagt i §. 187 Forel. og i den til samme §. neden under giorte Anmerkning, at Bevægelsen da alene gif for sig i Cirkler, naar den til Hastigheden svarende Heide forholdt sig til den halve Afstand fra Kræfternes Center, som den i Udfastnings Punktet drivende Central-Kraft til Tyngden her hos os.

Da nu videre Bevægelsen maa skee i Parabolén saa tidt som $r^2 = bB$, §. 171. 4. c. saa bliver Heiden, som i Udfastnings-Punktet svarer til Hastigheden $= B = \frac{r^2}{b}$. Men denne Heide er i Cirklen $\frac{r^2}{2b}$ efter det nylig sagte, selgelig forholde sig disse to Heider $= 2 : 1$. Saa den paraboliske Bevægelse udfordrer en Hastighed, hvis Heide, som svarer til den, er dobbelt saa stor som den, der ved Faldet af Tyngden hos os giver den Hastighed, hvormed den cirkulære Bevægelse kan skee.

Er $r^2 < bB$ og selgelig B større end $\frac{r^2}{b}$, det er, dersom den til Faldet svarende Heide er større end den, som behøves til den paraboliske Bevægelse, da er Banen altid en Hyperbol. §. 171. 4. a.

Men er $r^2 > bB$, da er Banen altid en Ellipse, §. 171. 4. b. det er, dersom B er $< \frac{r^2}{b}$ eller mindre end den Heide, som svarer til Hastigheden i den paraboliske Bevægelse. Fremdeles, at Kræfternes Center er snart det ene, snart det andet Brende-Punkt, eftersom at Heiden, der svarer til Hastigheden, er enten større eller mindre end den, som behøves til Cirkel-Bevægelsen, sees umiddelbar af §. 171. 6. a. b.

§. 173.

J Henseende til Tiderne, hvori flere Legemer bevæges omkring Omløbs-Tiderne ere som Quadrater: Hødderne af Distancernes Kubis, et og det samme Kræfternes Center, er endnu som noget Betydeligt at agte, at Omløbs-Tiderne af disse Legemer, saa tidt som de bevæges i Ellipser, ere under sig som Quadrater: Hødderne af Ellipsernes store Aker deres Kubis (in ratione axium majorum Sesquiplicata). Thi efter §. 171 er den hele Omløbs-Tid $= \frac{22}{7} A \sqrt{A}$, og derfor proportionert $A \sqrt{A} = \sqrt{A^3}$.

§. 174.

Gaaer man fort paa samme Maade, som den her er bleven viist, da kan man ligeledes finde Løbe-Banen i den Tilfælde, da Central-Kraften er som Distancen, og i nogle saa andre Tilfælde. Gior man sig i den første den Meie, paa samme Maade som før at sege Righeden og at sammenligne samme med Ellipsens Righed til dens Center, da man finde, at saa tidt som Central-Kraften var som Distancen fra Kræfternes Center lige frem tagen, blev Løbe-Banen en Ellipse ligesaa vel som i den forrige Tilfælde, men til hvis Center Kræfterne drev den Ring, som bevægedes, i Steden for at drive den som før til Brende-Punktet.

Men da denne Hypothese i øvrigt ingen Nytte har, fordi den ei er overensstemmende med Naturen, vil jeg med de den angaaende Udregninger ei spille Løseren Tiden, allermest, da jeg ikke kan undlade at tale med et Par Ord om nogle af de Løbe-Baner, som i de teste Tilfælde søges i den Hypothese, da Central-Kraften er som Kubus af Distancen forkeert, siden man deraf seer, hvad Kræfter i Naturen

væge sig ud fra turen let kunde gjøre, at Tingene engang maatte efter en vis Tid falde ind i det Punkt, eller det Center, omkring hvilket Kræfterne drive det i den anden Hypothese, da de ere som Quadraten af Distancen forkeert, uden at de kunde i denne sidste enten komme nærmere til det, eller gaae længere ud fra det.

Til den Ende kan agtes, at om alle Benævninger tages som før, alene at (Taf. X. Fig. 4.) naar Tingen kastes skiev ud paa AC udi A, Distancen AC kaldes d , og ved b forstaaes Perpendiklen paa Kere-Linien i dette Punkt, saa $\frac{b}{d}$ er Sinus af Kere-Liniens Vinkel udi A med AC, da bliver Central-Kraften $\frac{r^3}{y^3}$, fordi den skal være som Kubus af Distancen forkeert, og da Ligheden til den krumme Linie, tagen imellem Perpendiklen paa Kere-Linien og Bære-Linien, er $\int K dy = \int \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, §. 163. saa bliver $\frac{r^3 dy}{y^3} = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, og naar de bestandige Sterrelser bestemmes, som før, af det Integralerne blive udi A, saaes $\frac{Bp^2 - Bb^2}{p^2} = \frac{(y^2 - d^2)r^3}{2d^2 y^2}$, hvilken Lighed uden videre Forandring kan vedligeholdes. Om man sætter $B = \frac{r^2}{2d^2}$, da saaes denne Lighed for den krumme Linie $p = \frac{by}{d}$, eller $y : p = b : d$, hvilket viser, at da $b : d = \frac{CG}{CA}$ eller Sinus CAF og $p : y$, er Sinus CBD, saa er denne krumme Linie overalt af den Egenskab, at den Vinkel Bære-Linien gier med Tangenten, eller med den krumme Linie, er bestandig, selgelig er denne sidste den saa kaldte logarithmiske Spirale, eller af det Slags Spiraler, som indbefattes under den almindelige Lighed (Taf. X. Fig. 4.) $ACB = z \text{ Log. } \frac{y}{a}$, hvor z er, som man veed af Algebre, Tangenten til Vinklen CBD eller CAF.

Da nu §. 160 Hastigheden er $= \sqrt{\frac{Bb^2}{p^2}} = \frac{d\sqrt{B}}{y}$, fordi $p = \frac{by}{d}$ efter det nylig sagte; saa følger, at i denne enkelte Tilfælde bliver altid Hastigheden forkeert proportionert Distancen fra Kræfternes Center, eller det asymptote Punkt C i Spiralen.

Videre, da man veed af Algebre, at Kummene i denne Spiral, eller dens Centrale Snit ere altid proportionerte Quadraterne af BC, saa er den hele Tid af Bevægelsen proportionert Quadraten af CA, selvselig Tiden for Buen $AB = CB^2 - CA^2$, og derfor endelig, uagtet at den Ting, som bevæges, først kan giere uendelig mange Omløb omkring C, før den falder omsider ind i dette Punkt.

Dersom man, som forhen, §. 167, udfører Ligheden i Henseende til de retlinede Ordinater x og y , da faaes i dette Tilfælde

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{b\sqrt{B} dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - \frac{r^3y^4}{2d^2} + \frac{1}{2}r^3y^2}},$$

som i Almindelighed kan siges at henhøre til de logarithmiske Integra-
ler, og som man veed til Cirklen, saa tidt som disse sidste ere umueli-
ge, da i dette Tilfælde igien den søgte krumme Linie eller Bane bliver
en algebraisk Linie, eller ikke. Da disse Tilfælde ei ere af nogen be-
tydelig Nytte, ville vi alene opholde os ved den eneste iblant dem alle,

da $\frac{b\sqrt{B} dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - \frac{r^3y^4}{2d^2} + \frac{1}{2}r^3y^2}}$ er integrabel, i den enkelte Be-

tingning nemlig, da $B = \frac{r^3}{2b^2}$, siden Ligheden derved bliver simpel

Y n

hen

Den anden $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{b} dy}{y^2 \sqrt{\frac{1}{2}r^3} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2}}} = \frac{abdy}{y^2 \sqrt{d^2 - b^2}}$

og følgelig $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-ab}{y\sqrt{d^2-b^2}} + C.$

Men $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ er en Cirkel-Bue, hvis Sinus er t , og hvis Halv-Diameter er $= 1$, følgelig er $-\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ samme Bues Forstiel fra en Quadrant, saa derfor (Taf. X. Fig. 5.) om fra C, som Kræfternes Center, slaas med Halv-Diameteren CD en Cirkel DBD, da bliver, om CG kaldes t , Buen DB $= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, og da, naar i A, $t=0$, $y=d$; bliver $C = -\frac{b}{\sqrt{d^2-b^2}}$. Videre, da $\frac{b}{d}$ er Sinus til Vinklen CAH udi A, og følgelig $\sqrt{d^2-b^2}$ samme Vinkels Cosinus; hvorimod Tangenten af den altid er Sinus divideret ved Cosinus $= \frac{b}{\sqrt{d^2-b^2}}$, saa faaes, om samme Tangent til Vinklen CAH kaldes T, $DB = \frac{Td}{y} - T$, følgelig er Lebe-Banen den saa kaldte hyperbolske Spiral, udi hvilken i Almindelighed DB. FC er altid den samme Sterrelse.

Følgelig bliver og Tiden i denne Spiral, ligesom i den forrige, endelig, nemlig proportionert $d-y$, §. 162. Tingen falder, efter uendelig mange Lev omkring C, omsider ind i Kræfternes Center, og Bevægelsen herer op.

2.

Af den givne krumme Linies eller Løbe-Banens
Beskaffenhed at finde Central-Kræfterne.

§. 158.

Første Tilfælde.

Naar den krumme Linie er ubevægelig, uden at rulle med
en Vinkel-Bevægelse om Kræfternes Center.

Da §. 163. $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, og altsaa Central-Kraften Af den givne
 $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$, Løbe-Bane at saa beroer den hele Sag paa at bestemme $\frac{dp}{p^3 dy}$ af den finde Central-
Kræfterne.

foresatte Linies Egenskaber, for deraf at finde K, da B og b tilkiem-
begive som før den Heide, der svarer til Hastigheden i Begyndelsen
af Bevægelsen, og den der paa Køre-Linien nedkastede Perpendikel.

Exempel 1. Er den givne krumme Linie en af Keile-Snittene
i Almindelighed, imod hvis Brende-Punkt D Central-Kraften driver,
(Taf. IX. Fig. 14.) da veed man af det, som bevises udi den
koniske Geometrie om Keile-Snittene, at naar DE er Bære-Linien,
EF Perpendiklen paa Tangenten, CD Perpendiklen fra Kræfternes
Center paa Køre-Linien, FG Perpendiklen paa Bære-Linien kastet
ned fra F, da er $EG =$ den halve Parameter $= \frac{1}{2}\pi$, og $ED:CD$
 $= EF:EG$ eller $y:p = EF:\frac{1}{2}\pi$, men uden at bekymre sig vi-
dere om Værdien af EF i endelig Størrelse, kommer man strax til
Differential-Ligheden imellem y og p, ved at agte, at Halv-Diame-
tern af Køre-Cirklen er §. 158. 2. $\frac{y dy}{dp}$, og som man veed af Alge-

bre, altid i Keile-Snittene $= \frac{4EF^3}{\pi^2}$, saa man faaer $\frac{4EF^3}{\pi^2} = \frac{y dy}{dp}$,

Th 2

og

og $EF = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 \cdot y dy}{4dp}}$, selgelig bliver $y : p = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 \cdot y dy}{4dp}} : \frac{1}{2}\pi$, og

$$y^3 : p^3 = \frac{\pi^2 \cdot y dy}{4dp} : \frac{1}{8}\pi^3. \text{ Altsaa } \frac{y^2 \pi}{2p^3} = \frac{dy}{dp}. \text{ Sættes dette}$$

i Værdien af $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$, da faaes $K = \frac{4Bb^2}{y^2 \pi}$, og da $\frac{4Bb^2}{\pi}$ er en bestandig Størrelse, bliver altid $K = \frac{1}{y^2}$, eller Central-Kraften, som Quadraten af Distancen forkeert.

Andet Exempel. Er den krumme Linie en Spiral, en af de saa kaldte Logarithmiske s. Ex., da findes Central-Kraften overmaade let, fordi i disse Linier Vinklen af Ordinaten med Tangenten er bestandig, og selgelig Forholden imellem Væ-elinien y og Perpendiklen p altid bestandig $= 1 : a$, derfor $p = ay$, saa $dp = a dy$, og derfor $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy} = \frac{2Bb^2 a dy}{a^3 y^3 dy} = \frac{Bb^2}{a^2 y^3}$, selgelig er K altid i disse Spiraler proportionert $\frac{1}{y^3}$, eller som Kubus af Distancen forkeert.

Man finder ligeledes i alle andre Tilfælde K , alene at man vil giøre sig den Umage, først at bestemme p udi y , saa at ingen anden foranderlig Størrelse bestemmer dens Værdie.

§. 176.

Anden Tilfælde.

Ligeledes, naar
Lobe-Banen er
bevægelig om-
kring Kræfter-
nes Center.

At finde Central-Kraften, naar Lobe-Banen er bevægelig, og dreier sig bestandig om Kræfternes Center.

Maaden at søge Central-Kraften paa, er her omtrent den

saamme, som i forrige Tilfælde, alene at man bestemmer $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$,
saaledes,

saaledes, som Spersmaalets Natur det udkræver; i Henseende til hvilket sidste man maa agte, at da den Ting, som bevæges omkring Kræfternes Center, haver i Følge det antagne en dobbelt Bevægelse, først sin egen i Løbe-Banen, om nemlig denne hvilede; for det andet, Løbe-Banens Bevægelse, saa beskriver den derfor ved denne dobbelte Bevægelse en nye Linie, hvis Element man maa søge, og ved dets Hielp Perpendiklen til denne nye Linie, for deraf at bestemme den ube-

$$\text{kiendte } p \text{ i Ligheden } K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}.$$

Er da (Taf. X. Fig. 6.) AaB den givne Bane, som bevæger sig om C , imidlertid at en Ting i samme bevæges: C Kræfternes Center, ca et Element af Banen, betragtet, som ubevægelig. Da er det klart, at om, imidlertid at Elementet ca igiennemløbes, Banen selv bevæger sig efter ab om C , da beskriver imidlertid den Ting, som bevæges, virkelig den Bue cb . Er da ae Køre-Linien paa AB udi $c = t$, dens Perpendikel fra C $Ce = p$. Ligeledes bcd Køre-Linien udi c , Perpendiklen paa samme fra C , Cd , Hastigheden i AB igiennem ac V_b , i cb derimod V_H , saa bliver $ac : cb = V_b : V_H$; men $ac = \frac{ydy}{ec} = \frac{ydy}{t}$, derfor og $V_b : V_H = \frac{ydy}{t} : \frac{V_H ydy}{V_b t} = cb$. Dersom nu Vinkel-Bevægelsen i Banen AB sættes at forholde sig til Vinkel-Bevægelsen i den nye Linie, hvis Element er $cb = 1 : v$, saa er det klart, at Cirkel-Buerne $cg : cf = 1 : v$, selgelig $\frac{pdy}{t} : cf = 1 : v$, og at $\frac{vpy}{t} = cf$. Deraf kan Perpendiklen Cd videre bestemmes, hvis Værdie bestemmer K , sat i Steden for p ; thi $cb : cf = y : Cd$, eller $\frac{ydy}{t} \cdot \frac{V_H}{V_b} : \frac{vpy}{t}$

$= y : v p \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{H}} = Cd$, en Værdie, som indbefatter samtlig det foresatte Spørgsmaals adskillige Bestemmelser, og i hvis Brug i Hensende til Værdien af K nu intet videre fattes, end at i Cd ingen anden Størrelse findes, end de alene, som henhøre til den nye Linie, hvis Element er cb .

For at komme til dette sidste, maa agtes, at da vi have en dobbelt Værdie af $cb = \sqrt{cf^2 + bf^2} = \frac{y dy}{z} \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{b}}$, en Lighed, hvori atter igien alle Spørgsmaalets Betingninger ere indbefattede, hvilken forandres (om man agter at $bf = dy$, fordi Banens Bevægelse er en Vinkel-Bevægelse omkring C) til $\frac{v^2 p^2 dy^2}{z^2} + dy^2 = \frac{y^2 dy^2 H}{z^2 b}$, eller $h v^2 p^2 + h z^2 = y^2 H$.

Dette forudsat, følger af §. 160, at den virkelige Hastighed igiennem cb eller $\sqrt{H} = \frac{b \sqrt{B}}{Cd}$, følgelig $H = \frac{b^2 B \cdot H}{v^2 p^2 b}$, og $h = \frac{b^2 B}{v^2 p^2}$, hvilken Værdie om sættes i den forhen givne Lighed $h v^2 p^2 + h z^2 = y^2 H$, saa faaes $H = \frac{v^2 p^2 b^2 B + b^2 B z^2}{v^2 p^2 y^2}$, hvilke Værdier af H og h , om sættes i $Cd = \frac{v p \sqrt{b}}{\sqrt{H}}$, da faaes $Cd = \frac{v y p}{\sqrt{z^2 + v^2 p^2}}$, og fordi $z^2 = y^2 - p^2$, er $Cd = \frac{v^2 p^2 - v^2 y^2 + y^2}{\sqrt{z^2 + v^2 p^2}}$. Kaldes nu Differentialer af Cd , dCd , da er $-\frac{2 v p dy}{C d^3}$ Differentialer af $\frac{1}{C d^2}$. Differentieres da $\frac{1}{v^2 p^2 + v^2 y^2 - y^2}$, saaledes, at v tages bestandig (thi i ingen anden Tilfælde bliver Hastigheden simpel hen som $\frac{1}{Cd}$), hvilket den

dog

dog bør være, men en Function af v og p) det er, saa Vinkel-Bevægelsen i Linien AB haver overalt til den i den nye Linie, hvis Element er cb en bestandig Forhold, saa findes, naar $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$, i Steden for $\frac{dp}{p^3}$, $\frac{2dCd}{Cd^3}$ behørig omsættes

$$K = \frac{2b^2 B dp}{v^2 p^3 dy} + \frac{2b^2 B (v^2 - 1)}{v^2 y^3}.$$

§. 177.

Man seer deraf, at Forskiellen imellem de Kræfter, som drive en Ting i den ubevægelige Bane, og i denne igien, naar den bevæges

Diffe. Kræfters Beskaffenhed forklæres videre.

paa ser sagte Maade om Kræfternes Center, beleber til $\frac{2b^2 B (v^2 - 1)}{v^2 y^3}$,

og selgelig, at denne Forskiel i Kræfterne altid er $= \frac{1}{y^3}$, eller for-

leertviis proportionert Kubus af Distancen; thi det er klart, at det

første Stykke $\frac{2b^2 B dp}{v^2 p^3 dy}$ er den Kraft, der driver imod Centret i den ube-

vægelige Bane, fordi i den $K = \frac{2b^2 B dp}{p^3 dy}$, og B forandres alene til

$\frac{B}{v^2}$, fordi Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen maa og være

Bevægelsen af AB omkring Kræfternes Center proportionert, saa

om Hastigheden i AB betragtet som ubevægelig, kaldes c , bliver 1 :

$v = c : \sqrt{B}$, og selgelig $c^2 v^2 = B$ og $c^2 = \frac{B}{v^2}$. Hvoraf sees

1) At om $v = 1$, det er, om Vinkel-Bevægelsen er alene

den, som Tingen selv har, og Banen ingen sig egentlig, da bliver

simpel hen $K = \frac{2b^2 B dp}{p^3 dy}$, og altsaa Central Kraftens Værdi den sam-

me, som i den ubevægelige Bane, som den og bør være.

2) At

2) At om v er større end 1, formerer Central-Kraften i den bevægelige Bane den i den ubevægelige, saa denne derfor gaaer frem ad.

3) Er v mindre end 1, formindsker den sidste Deel af Central-Kraften den første, saa Banen gaaer tilbage.

4) Og selvgelig kan den selsomme Kraft, som driver en Ting i en ubevægelig Bane, drive den i denne samme Bane, naar den paa før sagte Maade bevæges om Kræfternes Center; alene at Central-Kraften formeres eller formindskes om en anden Central-Kraft, hvilken er som Kubus af Distancen forkeert.

Exempel.

Vil man af det forhen anførte finde, hvad Kraft der i Keile-Snittene, og om man vil, i Ellipsen i Særdeleshed, skal legges til den Central-Kraft, hvilken er som Quadraten af Distancen forkeert, paa det at disse kunne med en bestandig Vinkel-Bevægelse (Motu Absidum) rulle om Kræfternes Center, da haver man alene her at agte, som forhen, at i Keile-Snittene og, om man vil, i Ellipsen i Særdeleshed, er $\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{2}y^2\pi}{p^3}$; hvoraf faaes $K = \frac{4b^2B}{v^2y^2\pi} + \frac{2b^2B.(v^2-1)}{v^2y^3}$.

Ottende Tillæg.

Om
Kanalernes perpendikulære Trykning af de
Legemer, som bevæge sig ned over dem.

§. 178.

Wi have i det foregaaende §. 32 seet, at saa tidt som tunge Ting 3 de tunge
bevæge sig ned over eller op efter krumme Linier, at de da i Tings Fald
denne Bevægelse ei alene yttrede en Kraft efter den krumme Linies igjennem krum-
Kæde-Linie, men og en anden perpendikulær paa dens Elementer, me Kanaler be-
roer disses Tryk-
hvis ning tildeels paa
Sterrelse var $\frac{gdx}{ds}$. Centrifugal-
Vi handlede der ikke videre om denne Kraft, for- Kraften.

di vi havde endnu ikke talt om Centrifugal-Kraften, uden hvilken disse
Betrægtninger ei kunde udferes. Men da dens Beskaffenheder nu ere
bekjendte, ville vi kortelig vise, hvorledes alle de herhid hørende
Spørgsmaal i Almindelighed kunde opløses.

§. 179.

Saa tidt som en Tynge falder eller stiger over en krum Linie
med en vis Hastighed, og Linies Modstand forhindrer den i at bevæ-
ge sig frit og ubindret, da maa nødvendig af Hastigheden alene en
Trykning paa Linies Elementer blive tilveiebragt. Thi da (Taf. X.
Fig. 1.) den over AE stigende eller faldende Ting altid søger at bevæ-
ge sig ud efter Tangenten EF af den krumme Linie, men formedels

dennes Modstand, som bestandig holder Legemet i den krumlinede Bevægelse, dette ikke kan skee, saa maa nødvendig i alle Liniens Elementer en Kraft, som FG, immer drive den Ting, der bevæges, ind ad imod den krumme Linie.

Denne Kraft maa net op være den samme, som den er, hvormed den Ting, der bevæges, søger at bryde Linien, for siden at bevæge sig frit fort efter Tangenten. Følgelig er den saa stor som dette Legemes centrifugale Kraft, betragtet i sin absolute Størrelse, det er; for saa vidt som det søger at bevæge sig ud fra Centret af den Cirkel, hvilken i det Punkt G af den krumme Linie rører denne sidste og falder ind over et af dens Elementer.

§. 180.

Den Trykning,
Centrifugal-
Kraften savaar:
søger, bestem-
mes.

Følgelig bestemmes let den Trykning paa den krumme Liniens Elementer, som kommer af Hastigheden alene. Forudsat; at denne sidste er bekendt. Thi denne Trykning er den selvsamme, som Centrifugal-Kraften i en Cirkel, hvis Halv-Diameter er Kæde-Cirkelns Halv-Diameter i det Punkt G, og i hvilken Hastigheden er den bekiendte Hastighed, hvormed Tingen bevæges udi G.

§. 181.

Kaldes Heiden, som svarer til denne Hastighed, h , Kæde-Cirkelns Halv Diameter r , den naturlige Længde $= 1$, den søgte Centrifugal-Kraft $= x$, da er, efter § 187. F. og den til samme giorte Anmerkning, $h : \frac{1}{2}r = x : 1$, følgelig bliver denne Centrifugal-Kraft, følgelig og den Trykning paa Elementerne af den krumme Linie, som kommer af Hastigheden alene $= \frac{2h}{r}$, altid nemlig den samme, som i Cirkel-

Om Kanalerne's perpendikulære Trykning. 363

Cirkel-Bevægelsen, naar i denne sidste Køre-Cirkelens Halv-Diameter antages som Halv-Diameter, $= r$, og Hastigheden i denne Bevægelse $= \sqrt{b}$, er derimod Tyngden $= g$, er Centrifugal-Kraften $= \frac{2gb}{r}$.

§. 182.

Følgelig bliver §. 178. 179. den hele Trykning T paa enhver krum ^{Ligeledes Kan-} ^{nalens hele} Linies Elementer, over hvilke en Tyngde drives af Kræfter, der virke ^{Trykning.}

altid efter parallelle og vertikale Direktioner, $T = \frac{2b}{r} + \frac{gdx}{ds}$, hvorefter af i enkelte Tilfælde altid bør bestemmes, hvad Styrke Siderne af den Kanal bør have, i hvilken et Legeme bevæges, som drives af visse Kræfter og med en vis Hastighed.

I Almindelighed derimod, om den perpendikulære Kraft, som Kræfterne forårsage, kaldes P , bliver den hele Trykning $\frac{2b}{r} + P$.

§. 183.

Vi sætte i §. 182. $T = \frac{2b}{r} + P$, af den Aarsag, at den ^{I hvad Til-} ^{fælde Kanalen} ^{ei trykkes af de} ^{faldende Tyng-} ^{der.} Trykning $\frac{gdx}{ds}$, som kommer af de hastiggierende Kræfters Virkning, kan, i Almindelighed betragtet, snart virke efter samme Direktion, som Centrifugal-Kraften, snart efter en imodsat. I det første Tilfælde søge begge med fælles Magt at bryde Kanalen eller den krumme Linies Elementer. I det sidste trykkes den krumme Linie ikke uden af Forskiellen imellem begge.

Saafermt derfor, at disse Kræfter ere hverandre imodsatte og lige store, da trykkes Kanalens Dele eller Elementerne af den krumme Linie aldeles ikke, følgelig skeer da Bevægelsen frit og ubindret i den

samme Linie, hvori Legemet ellers skulde med en ufrig Bevægelse gaae fort.

§. 184.

Dette stemmer fuldkommen med hvad vi forhen have sagt §. 184 Forel., at nemlig den Deel af Centripetal-Kraften, som er perpendicular paa den krumme Linie, altid maa være saa stor, som Centrifugal-Kraften, betragtet i Henseende til Kæde-Cirkelns Center. Denne Lighed imellem Central-Kræfterne er videre Aarsag i, at vi §. 158 og følg. ikke have bekværet os videre om Centrifugal-Kraften.

§. 185.

Hvad Trykningen bliver, naar Kræfterne, som forårsage Faldet, virke efter parallelle vertikale Direktioner. Dersom ved g forstaaes en Kraft, der paa samme Maade, som Tyngden, altid virker efter vertikale Direktioner med en altid ensdan

den, virke efter Tyngde, da er Trykningen af de faldende Ting $\frac{2b}{r} + \frac{gdx}{ds}$. §. 182.

Vi ville oplyse med nogle faa Exempler, hvorledes heraf Trykningen paa Linierens Elementer kan findes, og til den Ende først erindre, at naar (Taf. X. Fig. 7.) AC er den krumme Linie, hvis Spitse er i A, da er paa den horizontale Linie $Ad = x$, $df = y$.

§. 186.

Hvad Trykningen er over rette Linier. Dette forudsat. Skal da Kæde-Cirkelns Halv-Diameter være uendelig stor i alle Punkter af AC. Det er. Om AC forandres til den rette Linie AL, da bliver, fordi $r = \infty$; $\frac{2b}{r} + \frac{gdx}{ds} = \frac{gdx}{ds}$. Er AK vertikal, KL horizontal, $AK = a$, $KL = b$, $AH = y$, da

Om Kanalernes perpendicularære Trykning. 365

$$\text{Da bliver } x = \frac{by}{a} \text{ og } ds = \frac{dx\sqrt{b^2 + a^2}}{b} = \frac{dx \cdot AL}{LK}, \text{ felgelig } \frac{gdx}{ds} = \frac{g \cdot AK}{AL}.$$

Saa Trykningen af Tyngden over alle skraaelliggende Planer er til Trykningen af Tyngden i Vertikalen, som Planets Længde, til Planets Grund-Linie.

§. 187.

Er den Linie, hvorover en Tyngde falder, en Cirkel AEG, og den natur-^{fler.} liggende Tyngde = g , $AD = x$, $AF = r$, da er Pressionen $\frac{2bg}{r} + \frac{gdx}{ds}$. Men

$$\text{fordi udi E, } b = DE = \sqrt{2rx - xx}, \text{ saa bliver } \frac{2bg}{r} = \frac{2g\sqrt{2rx - xx}}{r}.$$

$$\text{Videre. Da } ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}, \text{ saa bliver } \frac{gdx}{ds} = \frac{g}{r} \cdot \sqrt{2rx - xx}.$$

$$\text{Felgelig bliver overalt i Cirklen den hele Pression} = \frac{3g}{r} \sqrt{2rx - xx}.$$

Og felgelig er den altid tre gange saa stor, som den Trykning, der kommer af den hastiggierende Kraft alene.

Deraf sees, at udi G, hvor AG er en Quadrant, bliver $\frac{3g}{r} \sqrt{2rx - xx} = 3g$, fordi $x = r$, saa Trykningen der er tre gange saa stor som Trykningen af Tyngden, suidkommen saaledes, som vi serhen have beviist den at vare §. 155.

§. 188.

Er Linien AC en Parabol, hvis Parameter = p og $px = y^2$. 3 Parabolen, naar Høden lig-
Da bliver $ds = dx \cdot \sqrt{\frac{4px + p^2}{4x}}$ og $\frac{gdx}{ds} = g\sqrt{\frac{4x}{4x + p}}$, som er ger horizontal.

den Deel af Pressionen, der forårsages af de hastiggjørende Kræfter.

Den anden Deel af den, som forårsages af Centrifugal Kraften, eller $\frac{2bg}{r} = \frac{2g \cdot y}{r} = \frac{2g\sqrt{(px)}}{r}$. Men man veed, at til et

hvert Punkt udi Parabolen er $r = \frac{\sqrt{(4x+p)^3}}{2\sqrt{p}}$, som i §. 206. F.

$$= \frac{((p+4x)\sqrt{p^2+4px})}{2p}, \text{ sølgelig faaes } \frac{2bg}{r} = \frac{4gp\sqrt{xp}}{(p+4x)\sqrt{p^2+4xp}},$$

$$\text{saar den hele Trykning bliver } \frac{g\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+p}} + \frac{4gp\sqrt{px}}{(p+4x)\sqrt{p^2+4xp}}.$$

§. 189.

Ligeledes, naar
Arten ligger
vertikal.

Derfor de krumme Linier, som AE, (Taf. X. Fig. 8.) i Steden for at ligge horizontal med deres Arel, have den tværtimod vertikal, som AK, og den hastiggjørende Kraft altid virker i den Direktion BF parallel AK, da om denne Kraft forestilles ved Ba, og opløses i de to andre Bb og ba, den sidste parallel Tangenten, den første derimod perpendicular paa Arten, saa er det klart, at denne perpendicularære Kraft da treffer fra Linien, og bliver den centrifugale imodsat. Man seer videre; at saa tidt som den forrige Værdie af den perpendicularære Kraft $\frac{gdx}{ds}$ vedligeholdes; Da falde Abscisserne AG over Arten AL, derfor hvad i det forrige Tilfælde var Abscisse, faaer nu samme Benævning som Ordinate, og omvendt.

§. 190.

Vi vilde opløse dette ved et Exempel i Parabolen. Ligger den-
ne Linies Arel vertikal, da bliver $x^2 = py$, $dy = \frac{2x dx}{p}$, og
 $ds = \frac{dx}{p} \sqrt{p^2 + 4x^2}$, saa at derfor $\frac{g dx}{ds} = \frac{gp}{\sqrt{p^2 + 4x^2}}$, som er den
Deel af den perpendicularære Pression, der kommer af den hastiggjorens
de Kraft g , hvilken vi her antage saa stor som den naturlige Tyngde.

Den anden Deel af Trykningen, som foraaarsages af Centrifuge-
Kraften, er $\frac{2bg}{r}$, men $r = \frac{(p^2 + 4x^2)\sqrt{p^2 + 4x^2}}{2p^2}$. Og saaledes

des bliver $\frac{2bg}{r} = \frac{4gp x^2}{(p^2 + 4x^2)\sqrt{p^2 + 4x^2}}$. Thi $h = \frac{x^2}{p}$. Men

dise tvende Kræfter virke efter imodsatte Drive-Linier. Den hele

Trykning bliver derfor $= \frac{gp}{\sqrt{p^2 + 4x^2}} - \frac{4p x^2 g}{(p^2 + 4x^2)\sqrt{p^2 + 4x^2}}$.

Da x her betyder den halve Ordinate, saastreemt da, at man
vil, at den, som forhen, skal betyde Abscissen, maa i Steden for

x^2 sættes px , da man saar den hele Trykning $= \frac{gp}{\sqrt{p^2 + 4px}}$

$- \frac{4p^2 g x}{(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}} = \frac{p^2 g}{(p + 4x)\sqrt{p^2 + 4px}}$, i hvilken Vordie
 x betyder Abscissen AH.

§. 191.

Saastræemt at de faldende Ting begynde deres Fald over Linier, Maade at be-
som hindre det, med en vis bestemt Hastighed, der svarer til den stemme Tryk-
Heide a , da forandres derved ikke den Virkning, som kommer af de Begyndelsen af
Faldet stoor med
hastiggjorens

en vis given Hastiggierende Kræfter, selgelig heller ikke den Deel af Trykningen
stighed.

$\frac{gdx}{ds}$. Men alene den, som kommer af Centrifugal-Kraften, §. 175.

Førel., hvilken sidste altid vorer efter Hastighedens Quadrat.

Da derfor over de rette Linier Centrifugal-Kraften $= 0$, saa
er det i Faldet over dem det samme, hvad heller at de tunge Ting be-
gynde at falde med en vis given Hastighed hen efter Planets Direktion,
eller ikke.

§. 192.

Exempel i Cirk-
len.

I de krumme Linier derimod haver en Centrifugal-Kraft altid
Sted. Saaledes i vores forrige Exempel i Cirklen. §. 182. Om
man der sætter, at Faldet blev begyndt udi A med en Hastighed, som
svarede til den Høide a , da blev Hastigheden i E den, som svarede til
 $\sqrt{2rx - xx} + a$, og derfor Centrifugal-Kraftens Trykning
 $= \frac{2g\sqrt{2rx - xx} + 2ga}{r}$. Selgelig bliver i dette Tilfælde den hele

$$\begin{aligned} \text{Trykning udi E} &= \frac{g}{r}\sqrt{2rx - xx} + \frac{2g\sqrt{2rx - xx} + 2ga}{r} \\ &= \frac{3g}{r}\sqrt{2rx - xx} + \frac{2ag}{r}. \end{aligned}$$

§. 193.

Ligeledes i Pa-
rabolen.

Ligeledes i Parabolen. Hastigheden bliver den, som svarer til
Høiden $a + \sqrt{px}$. Om nemlig, som i §. 188, Arken ligger
horizontal. Selgelig bliver Centrifugal-Kraftens Trykning, som var

$$= \frac{2bg}{r} = \frac{2ag + 2g\sqrt{px}}{r} = \frac{(2ag + 2g\sqrt{px}) \cdot 2p}{(p + 4x)\sqrt{p^2 + 4px}}. \text{ Saaledes bliver}$$

$$\text{den hele Trykning} = \frac{g\sqrt{4x}}{\sqrt{4x + p}} + \frac{(2ag + 2g\sqrt{px}) \cdot 2p}{(p + 4x)\sqrt{p^2 + 4px}}.$$

§. 194.

§. 194.

Man kan ligeledes bestemme Trykningen i andre Hypoteser af Almindelig Bestemmelse af Kanalens Trykning, naar Kræfterne drive bestandig inod et Punkt.

For Ex. Om disse sidste drive inod et vist Punkt, og ere i hvad Forhold af Distancen fra dette Punkt af, som man selv vil. Thi i dette Tilfælde er, i Følge §. 48, den perpendikulære Kraft paa den krumme Linies Elementer
$$= \frac{KV\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds}.$$

Fremdeles er Hastigheden $= \int -Kdy + B$, saa Centrifugal-Kraften heraf altid kan bestemmes. Følgelig og den hele Trykning. Men da de herhid hørende Opløsninger ikke føre betydelige Slutninger med sig, ville vi alene vise, hvorledes i den Hypothese af den naturlige Tyngde de foresatte Spørgsmaal kunde opløses.

§. 195.

For Exempel. Om man vil undersøge, hvad det er for en Linie, over hvilken et Legeme skal falde saaledes, at Linien i alle sine Punkter bliver trykt af den faldende Tyngde med en Kraft, saa stor som dens hele Vægt, da siden Trykningen er $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds}$. Kaldes da den naturlige Tyngde g , bliver $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds} = g$, som er Ligheden til den krumme Linie CEF. (Taf. XI. Fig. 1.)

For at bestemme h og r i den krumme Linies Abscisser og Ordinater, da om man antager, at AC er Heiden til den Hastighed, hvormed Faldet begynder, AB den krumme Linies Arel, cd og cf Ordinater $= y$, Ac Abscissen $= x$, og $ce = dx$, da bliver Hastigheden, som vindes ved Faldet igiennem AC og CEF $= \sqrt{gy}$. §. 48. F. Ansees ds som bestandig, bliver $r = \frac{dy ds}{dx}$, og saaledes den hele Trykning

ning $= \frac{2gy \cdot ddx}{dyds} + \frac{gdx}{ds} = g$, eller $2y ddx + dy dx = dy ds$,
 som dividert med $2\sqrt{y}$, forandres til $\frac{\sqrt{y} \cdot ddx}{ds} + \frac{dx dy}{2\sqrt{y} ds} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$.
 Hvoraf Integralen er $\frac{\sqrt{y} \cdot dx}{ds} = \sqrt{y} + B$, eller $dx\sqrt{y} = ds\sqrt{y} + B$,
 hvor den bestandige Størrelse B kan tages efter Behag, og derfor $= ds\sqrt{c}$,
 fordi saavel ds som c betyde her bestandige Størrelser og Overeenstem-
 melsen med de øvrige Dele i Ligheden udfordrer en Størrelse af den
 Beskaffenhed, som $ds\sqrt{c}$. Ved at antage $\sqrt{c}$ større eller mindre,
 forandres alene den Forhold af $dx : ds$, følgelig den Vinkel, som den
 ferske Tangent gier med Axlen af den krumme Linie.

Da derfor den fundne Lighed er $\sqrt{y} dx = \sqrt{y} ds - \sqrt{c} ds$.
 Tages i den $\sqrt{y} = z$, saa bliver $dy = 2z dz$, og $ds^2 = dx^2 + 4z^2 dz^2$, hvilket, naar sættes om i den givne Lighed, forandres
 den til denne anden $dx = \frac{2z^2 dz - 2\sqrt{c} z dz}{\sqrt{2cz - c}}$. Gieres atter igien

$2z - \sqrt{c} = t$. Saaes $dz = \frac{dt}{2}$ og $z = \frac{t + \sqrt{c}}{2}$. Følgelig

bliver $dx = \frac{(t^2 - c) dt}{4t\sqrt{c}} = \frac{t^{\frac{3}{2}} dt - ct - \frac{1}{2} dt}{4\sqrt{c}}$. Hvis Integral er

$\frac{1}{4\sqrt{c}} \left(\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - 2ct^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{10\sqrt{c}} \left(t^{\frac{5}{2}} - 5ct^{\frac{1}{2}} \right)$. Sættes i Steden
 for t dens Værdie $2z - c$, saaes $\frac{1}{10\sqrt{c}} (t^2 - 5c) \sqrt{t}$

$\frac{1}{10\sqrt{c}} (4z^2 - 4z\sqrt{c} - 4c) \sqrt{2z - \sqrt{c}}$

$= \frac{2}{5\sqrt{c}} (z^2 - \sqrt{c}z - c)$ og $x = \frac{2}{5\sqrt{c}} (z^2 - \sqrt{c}z - c) (\sqrt{2\sqrt{c}z - c}) + B$.

Denne

Denne bestandige Størrelse B bestemmes deraf, at naar $x = 0$, bliver $\sqrt{y} = z = \sqrt{a}$, og derfor

$$B = -\frac{2}{5\sqrt{c}}(a - \sqrt{ac} - c)\sqrt{2\sqrt{ca} - c},$$

$$\text{og } x = \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2 - \sqrt{cz} - c)\sqrt{2\sqrt{cz} - c}$$

$$- \frac{2}{5\sqrt{c}}(a - \sqrt{ac} - c)\sqrt{2\sqrt{ca} - c}.$$

Og naar endelig i Steden for z sættes $\sqrt{y}$, og alt behørig quadres, faaes en algebraisk Linie af femte Høide, som er den, vi have sagt.

Man kan paa selv samme Maade opløse en Deel andre Spørgsmaal af samme Beskaffenhed. Men Nytten af deres Oplosning er ikke betydelig.

Tolvte og Trettende Forelæsning.

Om
de tunge Tings Bevægelse, som skydes
eller kastes ud.

§. 214.

De udkastede Ting burde egentlig beskrive Ellipser, om Jordens Bredde ikke overskar deres Bane, og derved hindrede Bevægelsen.

Til den Lærdom om Central-Kræfterne henhører endnu som et særdeles Stykke, den om de Tings Bevægelse, hvilke skydes eller kastes, eller paa nogen anden Maade drives afsted efter en retlined Bevægelse, i hvilken de gaae fort med en altid ensdan Hastighed, imidlertid at de af Tyngden drives ned efter. Da Tyngden driver bestandig imod et og det samme Punkt, nemlig imod Jordens Center, saa sees deraf, at den almindelige Theorie om Central-Kræfterne haver her ligesaavel Sted, som for; thi overskar Jordens Bredde ikke det udkastede Legemes Bane, maatte det §. 211. beskrive en Ellipse omkring Jordens Center, hvis ene Bredde-Punkt dette sidste blev. Imidlertid, da vi her see paa den letteste Maade at komme til Kundskab om Sandhederne paa, ville vi legge en anden Plan for at forstaae denne Bevægelse, en Plan, som er overmaade simpel,

simpel, og efter hvilken man ved Hielp af de allerletteste og mest bekiendte Egenskaber af Keile-Snittene kan lære at forstaae, hvad deraf er nyttigst og nødvendigst at vide til Brug i andre af Mathematikens Dele.

§. 215.

Er da (Taf. XI. Fig. 2.) AH den Linie, efter hvis Direktion en Ting i A antages at være kastet ud med en vis ^{Bestaaffenheden af de udkastede Tings Bevægelse forklares.} Hastighed proportionert AC, da er det uimodsigeligt, at om denne Hastighed alene virkede, skulde den udkastede Ting blive ved at bevæge sig bestandig hen efter AH saaledes, at de i lige Tider igiennemløbne Rum i denne Linie, nemlig AC, CF, FP, FN, o. s. v. skulde blive lige store, hvad heller Linien AH er horizontal, eller den staaer skiev paa Horizonten.

Men da i Tingenes Bevægelse, som drives af Tyngden, denne Kraft virker ei alene, men Tyngden desuden alle Dieblis driver den Ting, der bevæges, ned imod Jordens Center, saa maa agtes, at siden Jordens Halv-Diameter kan ansees som at være uendelig stor, naar den sammenlignes med den ringe horizontale Bane AO, hvilken den udkastede Ting beskriver, saa kunne alle de Linier, hvori den tunge Ting over en saa liden Distance falde ned imod Jordens Center, CB nemlig, FK, NM, PQ, o. s. v. ansees som lige-lobende eller parallelle.

§. 216.

Fremdeles maa agtes, hvad vi i det forrige fuldstændig have bevist, at Tyngden er en Kraft, som hos os kan ansees for bestandig i lige Tider at gjøre lige Virkninger, om end de vertikale Hoider ere noget længere eller kortere fra Jordens Center. §. 122. Dette forudsat sees, at naar AC er proportionert den Kraft, hvormed Tingen kastes eller skydes ud, og CB proportionert den, hvormed Tingen drives bestandig ned efter imod Jordens Center, ACO den Linie, over hvilken Kasket eller Skuddet efter AH ansees som at være forhoiet under den Forhoiings- eller Elevations- Vinkel HAO, da er CADB Kræfternes Parallelogram, i hvilket Tver-Linien AB tilkiendegiver ligesaa vel den igiennemløbne Bue (der kan ansees, om Tiden er overmaade liden for en ret Linie) som den hele Kraft og Hastighed, der i samme Tid er bleven tilveiebragt i Tingen af Kræfterne AC og CB. §. 60.

Holdt nu Tyngden med et op, maatte Tingen blive ved at bevæge sig bestandig i den rette Linie ABE, siden ingen Inertie af sig selv kan forandre sin Direktion. Den bliver derfor ved, om intet forhindrede, at løbe med en Hastighed proportionert AB fort efter Tangenten AE. Sattes Tiden for Bevægelsen den samme og ligesaa liden som før, saa er det klart, at i lige store Tider (begge nemlig overmaade smaa) bliver $BA = EB$, imidlertid at Tyngden, ved at drive efter Vertikalen EK, tilveiebringer med EB en nye Hastighed, som BG.

§. 217.

§. 217.

Da derfor Trianglerne ABC og AEF ere ligedanne Triangler, saa følger, at fordi $AB = BE$, §. 216. bliver og $AC = CF$, og ligeledes, fordi ACI og AFK ere ligedanne Triangler, bliver $AI = IK$, fordi $AC = CF$.

I denne Bevægelse blive de lige Tider igiennemløbne horizontale Rum lige store.

§. 218.

Fortsætter man denne Betragtning videre i flere Elementer af den frumme Linie, som Gv , da blive i Henseende til dem alle de forrige Slutninger de samme, thi da den Hastighed BG, hvormed Elementet af Linien blev igiennemløbet, i en ligesaadan Tid skulde føre Tingen igiennem $GV = BG$ hen efter Tangenten, saa maa CF og FN være skaarne i samme Forhold, som BG og Gv , følgelig da $BG = vG$ er og $CF = FN$, og derfor atter igien $AI = IK = KM$ o. s. v. hele Linien igiennem.

Deraf kan sluttes, at om AO er horizontal, da uagtet at Tyngden idelig formerer eller formindsker Hastigheden efter Vertikalen, blive dog altid de horizontale Rum, som Tingen beskriver, AI, AK og AM, Tiderne af Bevægelsen i AQO proportionerte, følgelig og de til disse Linier i Direktionslinien AH svarende Stykker, AC, CF, o. s. v. lige store.

§. 219.

Hvad sig ellers angaaer, at de horizontale Rum AI, IK, o. s. v. blive lige store i lige store Tider og andre som AL Tiderne, i hvad Forhold de ere endog under sig altid proportion-

Dette sidste bevises endnu klarere af Central-Kræfternes Beskaffenhed.

kan stige over
Horisonten.

Thi da $\text{Hvlen } nbR$ af Parabolen som vertikal, maa staae perpendicular paa AO , og dele den i to lige Dele, saa er $Ab = \frac{1}{2}a$ og $c : s = \frac{1}{2}a : \frac{\frac{1}{2}as}{c} = db$. Men Ad er en Tangent og dR Hvlen , folgelig veed man af den koniske Geometrie, at $dn = nb$, folgelig at $nb = \frac{\frac{1}{4}as}{c}$, som er den største Høide, hvortil Skuddet eller Kastet kan stige. Men $\frac{s}{c}$ er Tangenten af Elevations-Vinklen EAO , altsaa er den største Høide, hvortil Skuddet kan stige, Fjerde-Delen af det horizontale Lob AB , multiplicert med Tangenten af Elevations-Vinklen.

§. 223.

Tilligemed Parameter af Parabolen Hvlen .

Saa snart som nb er giden, kan man finde Parametern til Hvlen udi n , eller til nbR . Thi om man kalder denne Parameter P , da veed man atter igien af den koniske Geometrie, at $p = P + 4nb = P + \frac{as}{c}$. Men $p = \frac{a}{cs}$, §. 221. saa Parametern til $\text{Hvlen} = \frac{a}{cs} - \frac{as^2}{cs} = \frac{ac}{s}$, eller, den er den fjerde proportionelle til Sinus og Cosinus af Elevations- eller Forhøjnings-Vinkeln og til det horizontale Lob.

§. 224.

Den halve Parameter forholdes sig til det hele horizontale Lob, som den hele Si-

Da man veed af Geometrien, at $2sc$ er Sinus til den dobbelte Vinkel, naar Sinus til den enkelte $= s$, og Cosinus $= c$, saa sees §. 221, at da $p = \frac{a}{sc}$, bliver $1 : sc = p :$

a , og

a , og $2 : 2sc = p : a$, eller $1 : 2sc = \frac{1}{2}p : a$. Følgelig forholder sig den halve Parameter til det hele horizontale Løb som Sinus totus til den dobbelte Elevations- eller Forhøjnings-Vinkel. Deraf forstaaes,

1) Alt saa længe Parametern er den samme, forholder sig de hele horizontale Løb som Sinus af den dobbelte Forhøjnings-Vinkel, eller $a = 2sc$, thi Forholden af $1 : p$ antages bestandig at blive den samme.

2) Men man seer let, at Parametern bliver bestandig den samme, saa længe som Hastigheden, hvormed Tingen Begyndelsen af Bevægelsen kastes ud, bliver den samme. Thi (Taf. XI. Fig. 2.) er denne Hastighed under adskillige Forhøjnings-Vinkler ens, bliver AC ligeledes uforanderlig, saavelsom CB, folgelig bliver og $\frac{AC^2}{CB} = p$ en uforanderlig Størrelse.

3) Følgelig maa, saa længe i Rast eller Stød under adskillige Forhøjnings-Vinkler Hastigheden bliver uforandret, de i den hele Tid, Rastet varer, giorte horizontale Løb forholde dem til hverandre under sig, som Sinus af de dobbelte Forhøjnings-Vinkler.

Dette sidste kan man og uden videre Dmsvob strax udele af Ligheden §. 221. $p = \frac{a}{sc}$. Thi antages p bestandig, bliver a som cs , folgelig og $= 2cs$.

4) I dette Tilfælde, saasnart Vinklen, under hvilken Rastet skeer, forandres, forandres Parabolen eller Løbebanen, thi §. 223

nye Parabol i $P = \frac{ac}{s}$, i hvilken Værdie baade a , c og s ere bestandig for dette Tilfælde.

anderlige, saa snart som Forhøinings-Vinklen forandres

I disse Parabolers forholde sig Parametrene til Høderne som Quadraterne af Forhøinings-Vinklernes Cosinus.

5) Da i det a altid er proportionert cs §. 224. I. saa er $P = c^2$, og følgelig under adskillige Forhøinings-Vinkler forholde sig Parametrene til Høderne af de adskillige Paraboler, i hvilke Lobet over Horizonten skeer, som Quadraterne af Cosinus af disse Forhøinings-Vinkler. Hvilke Paraboler alle med hverandre overskære hinanden i det fælles Punkt, i hvilket Tingen under adskillige Forhøinings-Vinkler kastes eller skydes ud, og have alle parallelle Høder.

Og de største Høider som Quadraterne af samme Vinklers Sinus.

6) Alle disse Paraboler's største Høide over Horizonten er i Almindelighed §. 222 $= \frac{as}{4c}$, altsaa proportionerte ss , fordi $a = cs$, følgelig ere de proportionerte Quadraterne af Sinus af deres adskillige Forhøinings-Vinkler.

Følgelig ere og de største Høider, hvortil de med samme Hastighed udkastede Ting kunde stige over Horizonten, som Quadraterne af Sinus af de til dem svarende Forhøinings-Vinkler.

Disse sidste forholdesig og som de forkeerte Sinus af Forhøinings-Vinklerne.

7) Da man veed af Geometrien, at naar Sinus til den enkelte Vinkel $= s$ er Sinus versus, eller den forkeerte Sinus til den dobbelte Vinkel $= 2s^2$, om Sinus totus $= 1$, saa følger,

At saavel de forømtalte adskillige Paraboler's største Høider, som og Skuddene deres største Stigninger over Horizonten forholde sig til hverandre under adskillige Forhøinings-Vinkler, som de forkeerte Sinus af disse Vinkler.

8) Da

8) Da derfor $Per = cc$, og (Taf. XI. Fig. 3.) $nb = ss$,

saa bliver Tangenten til Forhøinings-Vinklen EAO altid $\frac{\sqrt{nb}}{\sqrt{p}}$.

§. 225.

Videre sees overmaade let:

1) Alt det længste Skud eller Kast, som med en vis giben Hastighed udi A kan gøres over Horizonten, er det som skeer under en Forhøinings-Vinkel af 45° .

Det længste ho-
rizontale Kast
skeer under 45°
Forhøinings-
Vinkel over Ho-
rizonten.

Ehi da Kastets horizontale Længde, eller det horizontale Løb, er som Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel, §. 224. 3. og Sinus totus, eller Sinus til to gange 45° er den største Sinus, saa maa under 45° det største Kast skee.

2) Ligeledes sees, at under Forhøinings-Vinkler, som paa begge Sider gaae lige meget fra 45° , under nemlig og over 45° , ere de horizontale Løb altid lige store, f. Ex. til 30° og til 60° maa man, i at skyde eller kaste, naae lige langt, fordi de dobbelte Vinkler sammenlagte beløbe 120° , og Sinus derfor af begge, af den stumpe nemlig og den skieve, ere lige store.

§. 226.

Fremdeles sluttes, naar Hastigheden i A er idelig den samme,

1) Alt dersom Skuddets eller Kastets Længde under 45° er bekendt, eller og Kastets Længde eller det horizontale Løb under 15° , som altid er det halve af det horizontale Løb under 45° , fordi $\text{Sinus } 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ Sin. } 90^\circ$. Saa kunne

Alt givet Præ-
ved Skud at be-
stemme alle
øvrige horizon-
tale Længder un-
der andre For-

Bbb 3

deraf

Heinings-
Vinkler.

deraf alle de øvrige horizontale Løb under alle andre Forheining-Vinkler let findes, alene ved at tage den fjerde i Proportion til Sinus totus, til Kasset's største Længde og til Sinus af den Vinkel, under hvis halve Deel Kasset skal stee. Man kan ligeledes af et hvert andet Prove-Skud under en Vinkel bestemme alle øvrige Skuds horizontale Længder under andre Vinkler.

2) Følgelig kunne deraf Taster for samtlige Forheining-Vinklerne forferdiges af det bekiendte største horizontale Løb og af de øvrige givne horizontale Løb, antagne efter Behag, hvilket, siden det er af nogen Vigtighed, vi vilde oplyse med et Par Exempler.

Første Exempel.

Saaledes, om man gjør med en vis Ladning et Prove-Skud af et Stykke under 15° , eller under 45° , og finder, at den største horizontale Længde beløber 1200', men den Distance, som man haver at stye paa, ei er længer end 800', og man vil vide, under hvad Forheining-Vinkel over Horizonten Stykkets Arel skal sættes, for net op med samme Ladning at træffe paa denne Længde. Da bliver

$$1200 : \text{Sin. tot.} = 800 : \text{Den dobbelte Vinkels Sinus}$$

$$\text{Log. } 800 = 2.9030900$$

$$\text{Log. Sin. } 90^\circ = 10.$$

$$12.9030900$$

$$-\text{Log. } 1200 = 3.0791812$$

$$9.8239088. \text{ hvortil svarer } 41^\circ 49'.$$

Følgelig

Følgelig kan man stille Stykkets Arel, for at skyde net op paa en Distance af 800', hvad heller man vil under $20^{\circ} 54\frac{1}{2}'$ eller under $69^{\circ} 5\frac{1}{2}'$.

Andet Exempel.

Ligeledes, om det foromtalte Prove-Skud giver for det største horizontale Lob, under en vis Ladning af samme Krud, 2000', og man vil vide, under hvad Vinkel Stykkets Arel skal staae paa Horizonten, for at treffe net op paa en Distance af 1260'. Da bliver

$$2000' : \text{Sin. } 90^{\circ} = 1260' : \text{Den søgte Vinkel Sinus}$$

$$\text{Log. } 1260 = 3.1003705$$

$$\text{Log. Sin. } 90^{\circ} = 10.$$

$$13.1003705$$

$$- \text{Log. } 1260 = 3.3010300$$

$$9.7993405$$

hvortil svarer i Taflerne $39^{\circ} 3'$, saa den ene Vinkel, hvorunder Stykkets Arel kan stilles, er til $19^{\circ} 31\frac{1}{2}'$, følgelig bliver den anden $= 70^{\circ} 28\frac{1}{2}'$.

§. 227.

Man finder saaledes paa denne Maade overmaade let ved Hielp af et eller andet Prove-Skud, hvorledes alle de Punkter kunne treffes, (Taf. XI. Fig. 3.) hvilke, som det Punkt O, ligge udi Horizonten, og hvis Distance ikke overgaaer det horizontale Lobs Længde under 45° . Saafermt derimod, at en Ting FG haver en Hoide over Horizonten og skal treffes
udi

udi G, AFO antaget som horizontal, da seer man, at Spørgsmaalet er strax af en anden Beskaffenhed, til hvilket at opløse vi ville iagttage følgende.

Parametern af Parabolen er to gange Skudets horizontale Længde under 45° .

Da §. 224 Sin. tot. forholder sig til Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel, som den halve Parameter til det horizontale Skuds hele Længde, saa følger, at fordi den dobbelte Vinkel af 45° er 90° , maa dens Sinus blive saa stor, som Sinus totus, og folgelig bliver altid det største horizontale Løbs Længde saa stor, som den halve Parameter af Parabolen.

§. 228.

Hastigheden, hvormed Tingene kastes ud, findes altid ved Faldet igiennem Hverde Dele af Parametern.

Deraf kan man altid tydelig bestemme, hvad Hastigheden er, hvormed en Ting er skudt eller kastet ud efter AE, saasnart som man veed det største horizontale Løb, thi denne Hastighed er altid den, som vindes ved at falde igiennem hverde Dele af Parametern, eller igiennem den halve Deel af det største horizontale Løb.

Thi kaldes Høiden til den Hastighed, hvormed en Ting i A kastes eller skydes ud, h , da, fordi §. 49. ved at falde igiennem et Rum af $15'$, vindes en ensdan Hastighed som $30'$ i Enden af Faldet, om Hastigheden kaldes i A, v , bliver $15 : 30 = h : v^2$ §. 48. og $v = \sqrt{60h}$, men er at hvad en Tynge falder i et Sekund $= 15'$, da, fordi Aa i et Sekund $= \sqrt{60h}$, bliver $p. Ac = at^2$, eller $60h = 15p$, folgelig $4h = p$, og $h = \frac{p}{4}$.

Men

Men da p (om det største horizontale Løb kaldes A) $= 2A$,
 saa bliver $h = \frac{A}{2}$, eller Høiden, som svarer til Hastigheden,
 hvormed Tingen kastes ud, bliver saa stor som Halvdelen af det
 største horizontale Løb.

§. 229.

Deraf forstaaes, at man ligeledes kan bestemme Hastig- Og Høiden, der
 heben, hvormed en Ting kastes ud i A , ved ethvert andet givet Hastighed, er
 Horizontal-Løb, naar Forhøinings-Vinklen, under hvilken derfor den fjerde
 det er giort, tillige er givet. Thi da $p = \frac{a}{sc}$, §. 224, saa i Proportion til
 er altid Høiden, der svarer til Hastigheden udi $A = \frac{a}{4sc}$, §. 228, den dobbelte Si-
 nus af Forhøi-
 nings-Vinkeln,
 til den hele Sinus
 og til det halve
 horizontale Løb.
 eller den forholder sig til det under en vis Vinkel giorte halve
 horizontale Løb, som Sinus totus til Sinus af den dob-
 belte Forhøinings-Vinkel.

§. 230.

Følgelig kan ved denne Hastighed alt det forrige bestem-
 mes, alene at man i alt, hvad der er sagt, sætter i Steden
 for $\frac{p}{4}$, den Høide C . Hvilket da ingen videre Anmærkning
 behøver, ville vi derved ei opholde os.

§. 231.

Derfor Hastigheden efter $AE = \sqrt{6ob}$, §. 228. (Taf. Tiden bestem-
 XI. Fig. 6.) inddeles i en horizontal Kz , og en vertikal KA ,
 Ee da

da bliver, om $\text{Sinus } 90^\circ = 1$, $1 : An = c : Kn$, følgelig bliver den horizontale Hastighed $= c \cdot \sqrt{6cb}$.

Da nu efter Horizonten Bevægelsen er ensdan §. 217, saa er Tiden af Bevægelsen $= \frac{a}{c \cdot \sqrt{6cb}}$. Men a er som cs , følgelig bliver Tiden som $\frac{cs}{c}$; følgelig som s : Eller Tiderne af Bevægelsen over Horizonten, blive under adskillige Forhøinings-Vinkler som Sinus af disse Vinkler, om Hastigheden er den samme.

§. 232.

Alt dette sat forud, ville vi vise, hvorledes af den givne Maade at giøre Hastighed udi A, (Taf. XI. Fig. 3.) Forhøinings-Vinklen kan findes, for at treffe en Ting udi G, som i den givne Distance fra A, AF haver den givne Høide GF over Horizonten. Og først, hvorledes man kan ved Udregning bestemme denne Sag.

Siden da Hastigheden er given, er Parametern given §. 228. Derfor kan af den det længste horizontale Skud findes, §. 227, og af det igien ubestemtviis det horizontale Løb AO, som skeer under den ubekiendte Vinkel EAO, hvilken gives ved sin Sinus og Cosinus. §. 226. 1. Følgelig er Ab bestemt §. 224. 6. og da $Ab : AF = \sqrt{an} : \sqrt{HG}$, fordi de horizontale Dele af Linien AO igiennemløbes med en ensdan Bevægelse, og Aa, Ad ere som Tiderne, findes HG; da $HG + GF = \frac{s}{c} AF$, hvoraf Ligheden for Tangenten til EAO faaes.

Eller endnu lettere. Kaldes Distancen AF, d , GF, a , Tangenten til Vinklen EAO, x , da er $AF : FH = 1 : x$,

om

om Sinus totus = 1, følgelig $HF = dx$. Videre er $HG = dx - a = AS$, og $SG^2 = AH^2 = AF^2 + FH^2 = d^2 + d^2 x^2$, saa da $p \cdot AS = SG^2$, bliver $d^2 + d^2 x^2 = p dx - ap$, hvoraf faaes, naar den quadratiske Lighed opløses,

$$x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - pa - dd}}{d}, \text{ deraf sees.}$$

- 1) At man finder altid Tangenten til to adskillige og ligegyldige Vinkler, under hvilke Skuddet eller Kasten kan fæe, med mindre $pp = 4pa + 4dd$, da $x = \frac{1}{2}p : d$.
- 2) At det altid er umueligt at træffe den Ting, man skyder eller kaster til, saa længe som $\frac{1}{4}pp$ er større end $pa + dd$.
- 3) Saafermt derimod, at $\frac{1}{4}pp$ bliver mindre end $pa + dd$, bliver Størrelsen under Quadratkodens Tegn negtende, og følgelig umuelig.
- 4) Dersom $GF = 0$, da faaes Ligheden for den førstomtalte Tilfælde, da Punktet O var udi Horizonten, som bliver

$$x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - dd}}{d}.$$

§. 233.

* Den anden Maade, hvorpaa dette uden Hensigt til Ved geometrisk Parabolens kan vises, kan jeg ikke undlade at tale om, da den fører til en geometrisk Beskrivnings-Maade, eller Construction, som er ikke mindre almindelig end artig.

Construction at
bestemme alt
det, som angaaer
de tunge Tings
Fald.

Er da (Taf. XI. Fig. 4.) AF den givne Distance, BF den Ting, som skal træffes, dens Høide over Horizonten, og

den Ting, som kastes eller skydes ud, skal igiennemløbe den krumme Linie ABG, for at gaae fra A til Horizonten i G, og undervejs at støde an paa BF i det Punkt B: Da, uden videre at bekymre sig om, hvad den Linie ABG er for en, har man alene nødig

1) At søge Hastigheden, hvormed Tingen skydes ud i A, som enten kan findes af §. 228, eller paa hvad anden Maade man vil. For Ex. ved at dividere det hele horizontale Lob AG med Tiden, da derved den horizontale Hastighed er bekiendt, som forholder sig til den hele Hastighed udi A igien, som Cosinus af Forhøjnings - Vinklen til Sinus af 90° . §. 231.

2) Er Hastigheden funden, bestemmes den Høide ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed kan vindes, hvilken Høide findes som før §. 228, eller af §. 57, og naar den sættes af efter en forkortet Maale-Stok, ville vi antage den saa stor som Linien AE.

3) Videre sættes af i samme forkortede Maal Distancen AF, i hvilken den Høide, som skal treffes BF, er borte fra Skyde-Punktet A. Høiden af den Ting, der skal treffes, sættes i F efter samme Maal af paa Papiret, og man trekker den Linie AB.

4) Videre sættes den fundne Høide, der svarer til Hastigheden udi A, lodret eller perpendicular paa AG, og en anden Perpendikel AD ligeledes paa AB.

5) Fremdeles trekkes ED horizontal eller parallel AG, (thi denne sidste Linie antages at forestille Horizonten) hvorpaa
AD

AD deles i to lige Dele udi c . Fra c som Center med Halv-Diametern CD slaaes en Halv-Cirkel DEA, som nødvendig maa gaae igiennem det Punkt E, fordi DEA er, i Følge vores antagne, en ret Vinkel.

6) Derpaa deles AB i 4 lige store Dele, hvoraf AK er en, og fra K reises op den rette Linie KIH parallel AE, hvilken, saa tidt Kasket er mueligt, overskier Cirklen DEA, som man veeb, i to Punkter I og H, med mindre begge disse Sekanter falde ind sammen i hverandre, og blive to lige store Tangenter paa Cirklen, som OR.

7) Trekkes da igiennem de to Punkter I og H, i hvilke KIH overskier Cirklen, to Linier AI og AH, da ere Vinklerne IAG og HAG, som kunne maales ved Transportoren, de Vinkler, hvorunder Ujlen af et Stykke eller af Kasket bør gaae, for at den efter AI udkastede Ting kan net op støde an udi B.

Hvilket saaledes bevises.

Da AE er den Høide, igiennem hvilken ved at falde Hastigheden i A kan vindes, saa er samme Hastighed $= 2AE$. Videre; da med denne selsomme Hastighed AM burde igiennemløbes, i den Tid at Tingen bevæger sig igiennem AB, eller i hvilken den kan ansees som at være falden igiennem MB, saa er Tiden igiennem MB $= AM$, thi Tiderne ere, naar Hastighederne ere i ensdan Bevægelse de samme, proportionerte de igiennemløbne Rum. §. 13. Følgeslig, om Tiden igiennem AE kaldes T, den igiennem MB, t , er $T : t = 2AE : AM$; men Tiderne ere og som Quadrat-Rødderne af de igiennemløb-

nemløbne Num. §. 48. Følgelig $4AE^2 : AM^2 = EA : MB$, og
 $AE^2 : \frac{AM^2}{4} = EA : MB (= 4IK)$.

Denne Proportion flyder af Faldets Natur, men den flyder ligeledes af den forhen givne geometriske Beskrivnings-Maade, i Følge hvilken Trianglerne EIA og IKA ere ligedannede Triangler, (fordi Vinklen af Strengen IA og Tangenten AK er saa stor som Vinklen i Peripherien IEA, der staae paa samme Bue IA, og desuden Berørs-Vinklerne, som gøres ved A og I paa Parallelerne EA og KI, ere lige store). Følgelig bliver $EA : AI = AI : IK$ og $EA : IK = EA^2 : AI^2$, derfor og $EA : 4IK = (MB) EA^2 : 4AI^2 = \frac{AM^2}{4}$.

Da derfor den physiske Kæftets Beskaffenhed stemmer saaledes fuldkommen overens med den geometriske, saa seer man; at Direktionen for Kæftet efter AI er rigtig bestemt, og man kan paa samme Maade bevise det i Henseende til AH.

§. 234.

* Deraf sees, at saa tidt som Kæftet skeer, for at træffe udi Horizonten udi G, falder AB over AG og AD over AE, saa det udi denne Tilfælde er AG, som skal deles udi fire lige store Dele, paa AG sættes AE perpendicular, og fra dens Midte med en Halv-Diameter $= \frac{1}{2}AE$ slaas Halv-Cirklen EIA. Er saa over AG, $AK = \frac{1}{4}AG$, da om fra K Perpendiklen KI reises op, og samme kan sfiere Cirklen i to Punkter I og H, (eller røre den) ere Linierne AI og AH, ligesom for, Direktions-Linierne for Skuddet eller Kæftet.

§. 235.

§. 235.

* Derfom RO er opreist paa den forhen sagte Maade, saa $AR = \frac{1}{4}AB$, og RO rører Cirklen udi O uden at skiere den, da sees let, at Vinklen $\angle OAK$ bliver 45° , thi $\angle COK$ bliver da 90° , følgelig Vinklen, som Chorda (her Diametern) QCO gjør med Rørelinien $= \frac{1}{2}QAo = Ao = 90^\circ$, følgelig bliver Vinklen $\angle AOK = 45^\circ$.

§. 236.

* Da man seer af det forrige (Taf. XI. Fig. 4.), at Punktet I, hvori Cirklen DIA overskier, siden AIP af Forhøinings-Vinklen MAG, er det Punkt, hvorfra $IK = \frac{1}{4}MB$ og $AK = \frac{1}{4}AB$, hvilket, om AB falder ind i et med AG, giver $IK = \frac{1}{4}MF$ og $AK = \frac{1}{4}AG$, saa sees let, at man i dette Tilfælde ved samme geometriske Beskrivnings-Maade kan, naar Forhøinings Vinklen IAF er given, tilligemed den Høide EA, der svarer til Hastigheden udi A, deraf finde det hele horizontale Løb AG, og Rørelsets største Høide over Horizonten, tilligemed Parametern, og følgelig beskrive Parabolen, som igiennemløbes ABG.

Nemlig. (Taf. XI. Fig. 5.) Over en ubestemt Linie AG, som man antager at forestille Horizontalen, opreises i det Punkt A, fra hvilket Rørelset skal ske, en Linie AB perpendicular, og saa stor som den Høide, der svarer til Hastigheden udi A. Over AB, som Diameter, beskrives en halv Cirkel BDA, og Forhøinings-Vinklen HAG bestemmes og trekkes.

Dette

Dette gjort, kastes fra D, hvor Cirklen overkier Cirklen AH af Forhøinings-Vinklen, en Perpendikel DL ned, og videre tages, 1) $4AL = AG$, saa er AG det hele Horizontale Løb.

2) Kastes fra D Perpendiklen DI ned, og fra D, naar ID treffes ud, tages $DI = DE$, fra E kastes Perpendiklen EF ned, saa er EF Kastets største Høide over Horizonten; fordi, som før er sagt, samme svarer til det Punkt F, hvilket falder midt udi AG. og $EF = \frac{1}{4}HG$.

3) Videre da E saaledes giver den horizontale Høire Linie af Parabolen, er E samme Linies Spitse, EF dens Arel, følgelig kan fra E af Parabolen beskrives, alene at Parametern er bekiendt.

4) Men da Parametern til Areln EF er saa stor som Parametern p udi A, mindre end $4EF$, og $BA = \frac{1}{4}p$. §. 228. saa er Parameter til Areln $= 4(BI + IA) - 4IA = 4BI$. Følgelig kan Parabolen beskrives.

§. 237.

I hvad Tilfælde denne Theorie stemmer best overens med Erfaring.

Alt dette var fuldkommen rigtigt, om Luften ingen Modstand gjorde, hvorved de udkastede Ting's Bevægelse blev hemmet tildeels, og mærkelig svekket, i sær i de Tilfælde, da Hastigheden er stor. Vi ville derfor affhandle efter dette det letteste og mærkbærdigste i Henseende til denne Modstand. Imidlertid vise de i Mængde giorte Prover og tagne Erfaringer, saavel som de derover giorte Udregninger, at naar Kuglen, som skydes ud, er tung og Hastigheden maadelig, hvilket er
just

just den Tilfælde, som i Brugen af Bomberne forekommer, at Luften da langt fra ikke saa meget svækker Bevægelsen, saa disse Regler jo desuagtet paa det nærmeste blive rigtige og uden betydelige Feil, hvorfor de og kunne altid følges og ansees for Hoved-Regler, hvorefter man haver at bestemme Direktionen af de Ting, som sthdes eller kastes ud. Dog seer man deraf, at jo mindre Hastigheden er, jo tungere Kuglen er, og jo kortere Skuddet skal gaae; desto noiere maa man træffe, naar man følger den her lagte Theorie.

Niende Tillæg.

Fortsættelse om de udkastede Tings Bevægelse.

§. 196.

Da denne hele Theorie virkelig henhører til Central-Kræfterne, Det forrige be-
vises af Central-
Kræfternes Be-
kæftethed. saa vil jeg i dette Tillæg vise, hvorledes man af dem ved Udregninger, tagne alene af disse Kræfters Natur, er i Stand til at bestemme alt, hvad der angaaer denne Bevægelse. Da man allerførst maa agte, (Taf. XI. Fig. 6.) at om A er, som før, det Punkt, fra hvilket Tingen sthdes eller kastes ud efter den Direktion AE, der selgelig bliver Kere-Linien til Løbe-Banen ABC udi det Punkt A. Om fremdeles DAE er den Vinkel, som Direktionen af Skuddet gjer med Vertikalen DA, og sammes Sinus kaldes s , Cosinus c . Om

D d d

videre

videre DA er Høiden, som svarer til Hastigheden udi $A = b$, og AG antages som Abscisser, Gg som Semiordinater. Da bliver Hastigheden, som svarer til et hvert Punkt som I over AL $= \sqrt{b-x}$, til et hvert Punkt som g $= \sqrt{b+x}$, om Abscisserne kaldes x. Og da det Punkt, hvortil Central-Kraften driver, antages at være uendelig langt borte, blive alle Linier, som ga i lige store Tider lige store, af samme Årsag, som før §. 219. F. Saa om Gg kaldes y, bliver derfor dy en bestandig Størrelse og $ddy = 0$, om nemlig Elementet af Tiden dt er bestandig, eller $ddt = 0$.

§. 197.

Nemlig. Linien,
hvori Bevægelsen af de udkafter de Ting skeer, bestemmes.

Dette forudsat, da siden dy og dt blive usforanderlige Størrelser, om f er ligeledes en usforanderlig Størrelse, kommer man derved til den simple Differential-Lighed, $dy = fdt$, men da, om $gg = dS$, for det

$$\text{Punkt } g \quad dt = \frac{dS}{\sqrt{x+b}}, \text{ bliver } dy = \frac{fdS}{\sqrt{x+b}}.$$

I denne Lighed maa f bestemmes, og siden denne Størrelse er i alle Punkter af den krumme Linie ensdan eller usforanderlig, kan den bestemmes af det, som den bliver i det Punkt A, i hvilket $x = 0$.

Da derfor i A $dy = \frac{fdS}{\sqrt{b}}$, og i A er desuden $dS : dy = 1 : s$, om Sinus $90^\circ = 1$, og Elementet af den krumme Linie $= dS$, saa bliver i A, $dy = sdS$, følgelig $\frac{fdS}{\sqrt{b}} = sdS$, og derfor $f = s\sqrt{b}$.

Efter at denne Størrelse saaledes er bestemt, bliver $dy = \frac{fdS}{\sqrt{x+b}}$ forandret til $\frac{s\sqrt{b} dS}{\sqrt{x+b}} = dy$, og derfor $\frac{bs^2 dS^2}{x+b} = dy^2$, men $dS^2 = dx^2 + dy^2$, følgelig bliver

$x dy^2 + h dy^2 = h s^2 dx^2 + h s^2 dy^2$, og saaledes er

$$dy^2 = \frac{h s^2 dx^2}{x + h(1 - s^2)}, \text{ men } 1 - s^2 = c^2,$$

følgelig bliver $dy = \frac{s\sqrt{b} dx}{\sqrt{x + c^2 h}}$, og derfor $y = 2s\sqrt{h}\sqrt{x + c^2 h} + B$.

Denne uforanderlige Størrelse bestemmes af det Egheden bliver udi A, naar $x = 0$, i hvilken Tilfælde $y = 2sch$, og da over AL y bestandig tager af, er $B = + 2sch$: Følgelig i Almindelighed $y = 2s\sqrt{b}\sqrt{x + c^2 h} + 2sch$, eller $y^2 - 4schy = 4s^2 hx$.

§. 198.

Man seer let, at denne Lighed er til Parabolen, men saa at Den er en Parabol. Abscisse og Semiordinate ei passe sammen i Areln. For derfor at forandre den til den sædvanlige Lighed for Areln af Parabolen, maa allerførst agtes, at, naar $x = 0$, bliver $y = 4sch = 2AL$. Følgelig bliver $AL = 2sch$, og gM Semiordinaten til Areln $= y - 2sch$.

For nu videre at bestemme BL. Da, om Parametern kaldes p , er det klart, at, siden $LM = x$ er $pBL + px = Mg^2 = y^2 - 4schy + 4s^2 c^2 h^2$, og da $y^2 - 4schy = 4s^2 hx$ §. 197, bliver $p.BL + px = 4s^2 hx + 4s^2 c^2 h^2$, hvoraftrekket 1) $px = 4s^2 hx$. Naar Leddene sammenlignes i Ligheden,

og følgelig, at Parametern til Areln i Parabolen $p = 4s^2 h$,

2) $p.BL = 4s^2 c^2 h^2 = p.c^2 h$, hvoraftrekket 2)

at den største Heide, hvortil Raket kan komme over Horizonten, eller $BL = c^2 h$,

3) At Ligheden til Parabolen bliver, om de foranderlige Størrelser begge begynde i dens Spitse eller horizontale Tangent B. $pz = vv$, om $z = x + c^2 h$ og $v = y - 2sch$; ellers, naar x og y begynde som før, bliver $4s^2 hx = y^2 - 4schy$. Næmlig x begynder om den Distance $c^2 h$ fra Spitsen af Parabolen.

§. 199.

Parameterværdierne som Quadraterne af Cosinus af Forheiningens Vinklerne, om Hastigheden er den samme.

Deraf slutes videre, at fordi $p = 4s^2 h$. Da om h bliver bestandig, forandres Parametern for Arken af Parabolen altid efter Quadraten af Cosinus af Forheiningens Vinkel.

§. 200.

Ligeledes bestemmes Skuddenes største Hoide saavel under den samme, som under adskillige Hastigheder.

Og da $BL = c^2 h$. Da om Hastigheden er som før under adskillige Forheiningens Vinkler den samme, bliver Skuddenes adskillige største Heider over Horizonten proportionerte Quadraten af Sinus af Forheiningens Vinklerne. Og om Hastigheden er adskillig, men Forheiningens Vinklerne de samme, da forholde de sig som Quadraterne af Hastighederne.

§. 201.

Tiderne af Bevægelserne bestemmes ligeledes.

Tiden angaaende, saa, siden $dy = s\sqrt{b} dt$, er $y = ts\sqrt{b}$. Og da, naar $t = 0$, y bliver lige saa stor, som naar den hele Tid er til Ende, og den bestandige Sterrelse i den allerede findes, saa bliver for det hele Fald $t = \frac{4sch}{s\sqrt{b}} = 4c\sqrt{b}$ §. 198. Hvoraf sees, at Tiderne, i hvilke Bevægelserne skeer over Horizonten, naar Hastigheden er den samme, men Forheiningens Vinklerne forandres, ere altid proportionerte Sinus af Forheiningens Vinklerne.

§. 202.

§. 202.

Og da dt er som dy , saa sees §. 197, at lige store horizontale Rum altid igiennemløbes i lige store Tider, saa at Bevægelsen hen efter Horizonten er altid en ensdan Bevægelse.

§. 203.

Da $2AL = 4sch$, saa følger

1) At om Hastighederne blive de samme, saa forholde sig de horizontale Løb under adskillige Forheiningens-Vinkler som Sinus af de dobbelte Forheiningens-Vinkler $= 2sc$.

Saa og de horizontale Løbs indbyrdes Forhold i alle Tilfælde.

2) Ere Forheiningens-Vinklerne de samme, da forholde sig de horizontale Løb, der svare til adskillige Hastigheder, som Quadraterne af disse Hastigheder.

3) Og ere baade Forheiningens Vinklerne og Hastighederne adskillige, da forholde de horizontale Løb sig i sammensat Forhold af de dobbelte Forheiningens-Vinkler og af Hastighedernes Quadrater.

§. 204.

Derfor i o er Parabolens Brende-Punkt, da veed man af den koniske Geometrie, at $oB = \frac{1}{4}p = s^2h$. Man veed fremdeles, at enhver Linie, som op er $= Bq + Bo = s^2h + c^2h - x = h - x = DK$. Hvoraf sees.

Den Høide, der svarer til Hastigheden, er i et hvert Punkt af Parabolens den rette Linie, som gaaer fra sammes Brende-Punkt til et Punkt i Parabolens, er den Høide, ved at falde igiennem hvilken Punkt til Punkt hastigheden udi samme Punkt kunde vindes.

At enhver Linie, som trekkes fra Parabolens Brende-Punkt til et Punkt i Parabolens, er den Høide, ved at falde igiennem hvilken Punkt til Punkt hastigheden udi samme Punkt kunde vindes.

terne i den krumme Linie.

§. 205.

Deraf sees, hvorledes man altid kan, da Parametern til Parabolens er givet, beskrive Parabolens, og fremdeles giøre en Mængde andre Slutninger; Men da det allerede sagte er i disse Henseende nok, ville vi ei længere derved opholde os.

Tiortende Forelæsning.

Om

Bevægelsens Hindring i flydende Materier, saa tidt som Legemerne i at bevæges af dem lide en Modstand.

§. 238.

Uarsagerne til de flydende Materiers Modstand, som her betragtes, ere Inertien og Elasticiteten.

Endskjønt vi her ikke ville med Flid handle om Reglerne for de flydende Ting's Modstand, fordi disse Betragtninger henhøre egentlig til Hydraulik, er det os dog paa en vis Maade nødvendigt, i Anledning af det foregaaende, tildeels at betragte de Hindringer, hvorved de flydende Materier, igiennem hvilke Tingene bevæges, svække Bevægelsen, siden at al Bevægelse hos os skeer sædvanlig igiennem deelige Materier, og det derfor i disse Henseende er af Betydning at vide, for hvor vidt det vi i det foregaaende have bevist at være, naar ingen Modstand var, sikker kan anvendes udi Brugen eller ikke. Til den Ende iagttage vi allerførst, at i de flydende Ting, efter deres adskillige Natur og Beskaffenheder adskillige Uarsager kunde forefalde, som hver for sig kunde paa sin Maade forarsage en Modstand imod Bevægelsen. Af dem alle betragte vi her ikke meer end to. Den ene er de flydende Væseners Inertie. Den anden den ringe

ringe Kraft, hvormed Delene af de flydende Væfener henge sammen, og som man sædvanlig pleier at kalde de flydende Deles Tenacité. Virkelig ere heller ikke andre deslige Mærker synderlig bekendte.

§. 239.

Hvad Inertien angaaer, da om den virkede alene, er ^{Modstanden, hvilken foraa-} det temmelig let at indsee, at Modstanden, i Folge den, ^{sages af de fly-} maatte altid blive Quadraten af den Tings Hastighed propor- ^{dende Tings In-} tionert, som bevægede sig imod Delene af den flydende Ma- ^{ertie alene, er} terie. Thi da det kommer paa et ud, hvad heller at et Lege- ^{proportionert} me bevæger sig imod den flydende Materie, eller om den fly- ^{Hastighedernes} dende Materie bevæger sig imod Legemet, saa følger, at om i den flydende Materie, som støder an paa et Legeme, der hviler, Hastigheden blev dobbelt, maatte tillige de anstodende Partiklers Antal blive dobbelt udi samme Tid. Følgelig da Anstødets Kræfter, som ytrer sig i en uendelig liden Tid, eller den hele Pression er som Massen i Hastigheden. §. 26. Og Massen er her Hastigheden proportionert, saa bliver den hele Modstand eller den hele Pression proportionert Hastighedens Quadrat, om Modstanden af Inertien alene tages i Betragtning.

§. 240.

Saafermt derimod, at man ikke betragter uden den ^{Modstanden af} Modstand, som kommer af Tenaciteten eller af de flydende ^{Tenaciteten er} Deles sammenhengende Kraft; da, saa længe Hastigheden ^{derimod Hastig-} ^{heden proportio-} ^{nert.} er

er den samme, bliver den immerfort bestandig eller Tiden proportionert. Er Hastigheden adskillig, bliver den Hastigheden proportionert, fordi i samme Tid med dobbelt Hastighed et dobbelt Antal Partikler skilles af det samme Legeme fra hverandre, ved en tredobbelt Hastighed et tredobbelt Antal o. s. v.

§. 241.

I hvad Tilfælde af Bevægelsen disse adskillige Modstandens Love have Sted.

Saa snart som Bevægelsen er stor og Hastigheden anseelig, synes de flydende Tings Modstand efter de beskæftigede de gjorde Erfaringer temmelig at nærme sig den Modstands Lov, der er som Hastighedens Quadrat. Thi da de flydende Deles sammenhengende Kraft ikke er uden meget liden, bliver den som intet at regne imod den Modstand, hvilken Inertien forvolder, naar Hastigheden er anseelig stor. I de meget langsomme Bevægelser derimod synes den Modstand, hvilken er som Hastigheden, at have Sted frem for den, som er proportionert Hastighedens Quadrat. Denne sidste synes endog da at være i høj Grad ubetydelig, og neppe engang værd at betragte.

§. 242.

Sagen af dem treffer fuldkommen ind med Erfaring.

Alt dette uagtet, er det endnu meget vanskeligt at sige, hvorudi den sande Modstandens Hypothese udi Lusten og i Almindelighed i Naturen bestaaer. Det er unegteligt, at de tvende feromtalte nærme sig den anseelig, men da de af dem gjorde Slutninger ikke treffe saa aldeles noie ind med Erfaring, som man skulde og maatte ønske, saa bliver Modstandens

dens naturlige Love endnu iblant de Ting, som fremdeles
noiere bør undersøges. I sær, saa tidt som den flydende
Materie i alle sine Dele ei er af samme Tykkelse, men denne
sidste er i adskillige Lag adskillig, saaledes som i Luften. I
dette Tilfælde kommer det ei alene an paa, at vide i hvad
Forhold at Modstanden staaer med Hastigheden; men des-
uden, hvorledes Modstanden voxer eller tager af i Henseen-
de til Inertiens større eller mindre Mængde i disse adskillige
Lag. Men, endskjønt at disse Love langt fra ikke ere ret be-
kiendte, saa viser dog Erfaring, at den Hypothese af Modstand,
der sætter samme proportionert Hastighedens Quadrat, nær-
mer sig temmelig til den sande Luftens Modstand paa maade-
lig store Distancer, naar Hastigheden er nogenlunde anseelig.

§. 243.

Antager man den flydende Materie, der staaer imod, I det Tilfælde
som at være overalt lige tyk; folgelig og, som den, der yttres af rectlined Be-
overalt samme Modstand, naar Hastigheden er den samme i vægelse, da et Le-
det Legeme, som bevæger sig imod den. Da kunne i Hen- geme uden at
seende til Bevægelsen adskillige Tilfælde skilles fra hverandre, drives af andre
hvoraf den simpleste er den, at et Legeme betragtes som at Kræfter be-
bevæge sig imod den flydende Materie med en den flydende ger sig imod
meddeelt Hastighed, uden at drives af andre Kræfter, end den flydende
af sin Hastighed alene. Det forstaaer sig selv, at Modstan- Materie med en
den da altid svækker Bevægelsen; var den overalt bestan- vis given Hastig-
dig og saa stor som Tyngden, er der ingen Tvivl paa, at jo hed.
i dette Tilfælde Hastigheden paa samme Maade maatte ved det

Ee

Flyden-

Flydendes Modstand tabe sig, som naar et Legeme stiger op efter med en vis given Hastighed, men bliver imidlertid idelig drevet ned efter af Tyngden; i hvilket Tilfælde det ei kunde igiennemløbe et større Rum, end det er, ved at falde igiennem hvilket, den Hastighed, som det begyndte at bevæges med, ved Faldet kunde erhverves.

§. 244.

Tabes den hele Hastighed ikke uden i en uendelig Tid og igiennem et uendeligt Rum, med mindre at Modstanden er en mindre Høide af Hastigheden, end Quadratkoden.

Men det, som her maa synes besynderligt, er, at Udregningerne vise (*), at saa tidt som Modstanden er som Quadraten af Hastigheden forkeert, kan i dette Tilfælde i flydende Materier som staae imod, Bevægelsen ikke tabes uden i en uendelig Tid og igiennem et uendeligt Rum. Man beviser i Almindelighed, at det selvsamme altid maa have Sted, saa tidt som Modstanden retter sig efter en Høide af Hastigheden større end Quadraten, og ikke det alene; men er Modstanden som Hastigheden, tabes endda ikke Hastigheden, uden paa selvsamme Maade. Tiden, hvori hele Hastigheden taber sig, bliver virkelig ikke endelig, med mindre at Modstanden retter sig efter en Høide af Hastigheden, som er mindre end dens Quadratkod. (**)

§. 245.

Dette stemmer vel ikke ganske med Erfaring, imidlertid kan deraf dog ikke sluttes, at de foromtalte Hypotheser vige

(*) See Tilægget §. 208. 209.

(**) Alt bevises i Tilægget fra §. 209 = 220.

vige saa overmaade af fra den rette naturlige, saa de ei skulde kunde bruges. Thi Aarsagen, hvorfor Hastigheden ikke taber sig i de foromtalte Tilfælde, naar den bliver meget liden, er, fordi at Modstanden da, saa at sige, forsvinder. Desuden er det i Luften vanskeligt at bestemme ved Erfaring, om et Legeme af samme Tyngde, som Luften selv, kan ved en given Hastighed bevæge sig i dette Element uendelig langt bort eller ikke, naar det ei under Bevægelsen blev drevet af andre Kræfter end af sin Hastighed alene. I Vandene derimod eller i de tykke flydende Materier er det altid vist, at Bevægelsen af de i dem udfastede Ting, hvilke ere af samme specifikke Tyngde som de flydende Ting selv, ei gaae fort i det uendelige, men at den endog taber sig paa maadelige Rum. Dette sidste stemmer vel ikke med Theorien §. 244. saa noie, som det skulde; men desuagtet bliver det dog altid vist, at de samme Udregninger, som vise, at Bevægelsen bør være uendelig, saa længe som den Forhold, der er imellem det flydendes Tykkelse og det igiennemløbne Rum er endelig; de samme vise (*), at i overmaade tykke Materier Hastigheden ei alene maa tabe sig over endelige, men endog over meget smaa Rum.

§. 246.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, ville vi Maade at bestemme Modstandens Størrelse i Hensende til Tyngden.

See 2

den

(*) See Tillægget §. 210.

den i Henseende til en vis given Unitet. Da derfor den Kraft, vi best kiender, er Tyngden, bestemmes Modstanden og best i Henseende til den. Kalder man derfor den Hastighed $\sqrt{c}$, med hvilken, naar en Ting bevæger sig imod en overalt ensdan flydende Materie, Modstanden da bliver saa stor som Tyngden. Kaldes enhver anden Hastighed ubestemt: viis $\sqrt{z}$, og den flydende Materies Modstand sættes at være som Quadraten af Hastigheden. Da bliver den virkelige Modstand, som svarer til enhver anden Hastighed, $\frac{gz}{c}$, fordi $c : g = z$ til den ubestemte Modstand.

§. 247.

I høed Tilfælde
Modstanden
for anses som
ubetydelig, saa
tids som den ret-
ter sig efter Ha-
stighedsens Qua-
drat.

Deraf sees, at i alle Hypothesser af Modstand, jo tykkere af Materie at det Flydende er af, desto mindre bliver c ; af jo tyndere derimod at det Flydende er, en desto større Størrelse bliver c . Følgelig, om et flydende Væsen var uendelig tyndt, maatte $\frac{gz}{c}$ eller Modstanden blive intet, fordi c da blev som noget uendeligt stort at regne imod g og z . Hvoraf sees, at da i Luften c nødvendig maa være en anseelig stor Størrelse; saa længe da som Bevægelsen er meget langsom, eller z meget liden, bliver fast $\frac{gz}{c} = 0$, hvorfor og Modstanden, der forarsages af Inertien, kan i dette Tilfælde anses for intet. Derimod er det noget langt andet, naar z er en stor Størrelse, siden $z : c$, da bliver en endelig Forhold.

§. 248.

§. 248.

Paa den anden Side derimod, saa tidt som det Flydende ^{I hvad Tilfælde} de er overmaade tykt, bliver fast $c = 0$, og derfor $\frac{gz}{c} = \infty$ ^{derimod at Bevægelsen formes}
 $= \infty$. Modstanden bliver derfor en uendelig stor Kraft, ^{den strax maa}
 hvorfor og Bevægelsen da uenkelig over et meget lidet Rum
 og i en ganske kort Tid maatte ophøre, med mindre at den
 Hastighed var uendelig stor, hvormed Tingene begyndte at
 bevæge sig imod det flydende. Saafermt derfor, at den ret-
 linede Bevægelse skulde skee i deslige overmaade tykke Mate-
 rier med endelige Hastigheder, maatte Bevægelsen paa Die-
 bliffet høre op.

I Almindelighed forstaaes af det allerede sagte, at jo
 tyndere det flydende er, desto mindre, jo tykkere det er, desto
 meer forsinkes Bevægelsen, alt for Resten lige.

§. 249.

Foruden dette Tilfælde, da Modstanden alene hindrer ^{Derfor} Tingene
 Bevægelsen, er i den, endog naar den skeer simpel hen i ret ^{ne falde i flyden-}
 Linie, endnu to andre Hoved-Forandringer at agte. Den ^{de Materier,}
 ene, naar Tingene falde ned efter, og under Faldet Tyngden ^{som staae imod}
 beforder, men det Flydendes Modstand derimod svækker Be- ^{efter Quadra-}
 vægelsen. I dette Tilfælde, naar, som før, Tyngden, ^{ten af Hastighe-}
 driver ned efter, kaldes g , bliver den hele hastiggjørende ^{den, da bliver}
 Kraft, der beforder Bevægelsen ned efter, $g - \frac{gz}{c}$. ^{den største Ha-}
 Men ^{stighed den,}
^{imod hvilken}
^{Modstanden er}
^{saa stor som}
^{Tyngden.}

da z i Begyndelsen idelig voxer, saa bliver $\frac{gz}{c}$ alt større og

større; følgelig bliver $g = \frac{gz}{c}$, eller den hele ned efter drivende Kraft, altid mindre og mindre. Hvoraf sees, at Hastigheden her langt fra ikke kan ved Faldet vore til den Grad, som i den frie og uhindrede Bevægelse; men at omfider, naar $z=c$, hvilket er den største Grad, hvortil Hastigheden kan vore, den hele hastiggjørende Kraft ned efter ganske maa tabe sig, og Bevægelsen maa siden skee simpel hen, som om hverken Tyngde eller Modstand virkede; fordi disse to Kræfter fra det Dieblis af, da $z=c$, gjøre hinanden bestandig til intet.

§. 250.

Men denne Hastighed vinder dog ikke uden i en uendelig stor Tid og igiennem et uendeligt Rum.

Saaledes kan ved Faldet i flydende Materier, som staae imod, aldrig uden en vis Hastighed vindes, om end at Faldet selv varer i en uendelig Tid, og gaaer fort over et uendeligt Rum. Men det, hvad Udregningerne her vise (*), er ikke mindre besynderligt, end det, hvad vi forhen have anmerket i §. 243. Skiont den største Hastighed, som vindes ved Faldet, ikke er uden endelig, kan den dog ved Faldet i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, ikke blive til, før et uendeligt Rum i en uendelig lang Tid er blevet igiennemløbet; følgelig er det heller ikke før efter en uendelig lang Tid, at denne Bevægelse bliver ensdan, og at Modstanden bliver saa stor som Tyngden. Årsagen er, at Bevægelsens Formering bliver ukiendelig liden over et ansee-

(*) See Tillægget fra §. 221 = 230.

anseeligt Rum, saasnart som Modstanden er omtrent blevet af samme Størrelse som Tyngden.

§. 251.

Deraf sees ydermere, at om Tingene i Begyndelsen af Bevægelsen have en vis Hastighed, hvormed at de falde ned efter, da kan den være saa stor, at Tingen, langt fra at blive drevet ibelig med større Hastighed ned efter af Tyngden, tværtimod taber strax af sin Bevægelse. Thi dette maa altid have Sted, saa tidt som den Hastighed, hvormed at Tingen begynder sit Fald, er større end den største Hastighed, hvilken kan vindes ved Faldet, eller, (hvilket kommer paa et ud) naar den til denne Hastighed svarende Modstand er større end Tyngden eller den bestandige Kraft, som driver Legemet ned efter.

I hvad Tilfælde at Tingene ved Faldet lange fra ikke vinde en nye Hastighed, men meget meer tabe af den de have.

§. 252.

Beskaffenhederne af Faldet ere derfor langt anderledes, naar Bevægelsen skeer i en flydende Materie, som staaer imod, end naar den skeer uden al Hindring, saaledes som vi i det foregaaende have betragtet den. Hastigheden retter sig langt fra ikke her, som i den frie Bevægelse, efter Quadrat-Roden af den igiennemløbne Høide, en eneste Tilfælde undtagen (*), naar nemlig baade den flydende Materies Tykkelse er overmaade li- den, og den Høide, igiennem hvilken Faldet uden Hastighed i Begyndelsen skeer, er meget ubetydelig imod den, som svarer til den Hastighed, imod hvilken Modstanden i Luften er saa stor som Tyng-

I hvad Tilfælde at de forhen givne Regler for den frie Bevægelse endnu kunne bruges i flydende Materier, som staae imod.

(*) See Tillegget §. 227.

Tyngden. Dette er Aarsagen, hvorfor vi, uagtet Luftens Modstand, i Machin-Basenet altid kunde uden fiendelig Forskiel giøre Brug af alle de Sætninger, som vi forhen have beviist for den frie Bevægelse. Fordi vi da altid ere fast i det Tilfælde af denne sidste Hypothese. I store Fald og Bevægelser derimod er Beskaffenheden en langt anden. De for den frie Bevægelse givne Regler finde da ikke meer Sted.

§. 253.

Beskaffenheden af Bevægelsen, naar Legemerne stige i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden.

Det tredje Tilfælde, som i den retlinede hindrede Bevægelse fortiener at eftertænkes, er; naar Legemerne stige med visse givne Hastigheder op efter, og formindskes derfor af deres Bevægelse ikke alene af det Flydendes Modstand, men endog af Tyngden, der driver ned efter i en Direktion, som er Bevægelsen imodsat, saa tidt denne stiger i Vertikalen, som vi her antage det. Thi da bliver den hele hindrende Kraft $= g + \frac{gz}{c}$. Hvoraf sees

At i flydende Materier, som staae imod, stiger Bevægelsen, i Henseende til Faldets og Stigningens indbyrdes Henseender, heller ikke som i den frie Bevægelse. Thi i den hindrede Bevægelse maa nødvendig Tiden af Stigningen, saavel som Faldet selv, hvortil Legemet stiger, blive mindre end Tiden af Faldet og det ved dette sidste igiennemløbene Rum, naar nemlig Hastigheden i Enden af Faldet og i Begyndelsen af Stigningen er den samme.

§. 254.

§. 254.

Imidlertid bliver i Bevægelsen op og ned efter Ulighe- I de tyndere
den altid mindre i de i sig tyndere, end i de i sig tykkere flydende ^{flydende} Ting
Materier, som let sees; fordi $\frac{g^2}{c}$ bliver i de første en ulige ^{hindres} Bevæ-
mindre Størrelse end i de sidste. ^{gelsen} mindre,
end i de tykkere.

§. 255.

Ligeledes bliver Virkningen af Modstanden altid mindre Saa og i flyden-
(alt for Resten lige) paa Ting af større Tyngde under samme ^{de} Materier af
ydere Omsvøb, end paa de lettere; fordi de førstes hele Be- ^{samme} Tykkelse
vægelse, eller det i dem, som faaes ved at multiplicere Hastig- ^{er} Tabet, som de
heden med Massen §. 27, bliver større end i de sidste. Er Tyng- ^{tykkere} Legemer
den den samme under samme ydere Omsvøb, men Legemerne ^{gior}, mindre,
derimod, som bevæges, af ulige Størrelse, da tabe i den sam- ^{end} det, som i
me flydende Materie de mindre Ting snarere deres Bevægelse ^{den} gøres af de
end de store, fordi at Modstanden er Overfladen eller Diame- ^{tyndere}.
terns Quadrat i ligedanne Ting; deres hele Kræfter derimod;
for saa vidt, som at de beroe paa Massen, ere Kubik:Indhol-
den proportionerte.

§. 256.

Faldet over de krumme Linier er ligeledes ubi flyden- I Faldet over
de Materier, som staae imod, af en langt anden Beskaffen- ^{de} krumme Li-
hed, end i den uhindrede Bevægelse. I sær er det betyde- ^{nier} bliver Ha-
ligt, at i det første Tilfælde i §. 249, (T. XII. F. I.) naar Faldet ^{stigheden} ikke
skeer over den krumme Linie AB, hvis horizontale Tangent ^{størst} i det ne-
er i B, da vører ikke Hastigheden hele Linien AB igiennem ^{derste} Punkt.

Eff

indtil

indtil i B, men alene til et vist Punkt L, i hvilket Modstanden forholder sig til Tyngden, som Cosinus af den Vinkel, hvilken i samme Punkt Tangenten gjør med Vertikalen, til den hele Sinus (*).

§. 257.

I flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Distancen, taber sig Cyklويدens isokrone Egen- skaber, med mindre at Bevægelsen er høist langsom.

Man seer deraf fremdeles, og af det, som allerede forhen er blevet sagt om Faldet ned efter de rette Linier §. 247 og folg. at Faldet over de israaeliggende Linier er i flydende Ting, som staae imod, langt fra heller ikke af den Beskaffenhed, som i den uhindrede Bevægelse, med mindre, at baade den flydende Materie er overmaade tynd, og Længden af Faldet ubetydelig imod den Høide, som svarer til den Hastighed, imod hvilken Modstanden er saa stor som Tyngden (**). Men det Betydeligste i alle disse Henseende er Faldet udi Cyklويدen. Denne Linie taber i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, ganske og aldeles sin isokrone Egen- skab (***). Tiden igiennem dens Buer beroer altid paa Buernes Længde, saa Faldet ikke skeer over adskillige cyklويدale Buer udi lige Tider, uden i det Tilfælde alene, da de ere overmaade smaa. Desuagtet maa man ikke tænke, at af de Forsøg udi Cyklويدen, hvilke vi forhen have anført som tilforladelige experimentale Beviis paa de store Tyngdens og Naturens Love, intet sikkert kan sluttes. Thi i alle disse Forsøg er

Hastig-

(*) See Tillægget §. 801.

(**) See Tillægget §. 289 = 299.

(***) See Tillægget §. 305 = 308.

Hastigheden af Bevægelsen overmaade liden, saa den Modstand af Inertien, hvilken er som Quadraten af Hastigheden, i disse Forsøg aldeles ikke hindrer. §. 247. Saafermt man vil meene, at derimod den Modstand, som kommer af Tenaciteten, skulde kunde giøre disse Forsøg utilsforladelige, da er det beviist (*), at endskiont Cykloiden taber sin isokrone Egenskab i den Hypothese, da Modstanden er som Quadraten af Hastigheden, beholder den dog denne Egenskab lige fuldt, naar Modstanden ei er uden Hastigheden proportionert, og udi alle de Tilfælde, da Modstanden kunde ansees som at være bestandig.

§. 258.

Den frumlinede Bevægelse er ligeledes af langt anden Bessaffenhed i flydende Materier, som staae imod, end i den frie og uhindrede Bevægelse. Drives for Ex. de tunge Ting ned efter af Kræfter, som paa Tyngdens Maade virke efter parallele og vertikale Direktioner, da bliver den frumme Linie, som de udkastede Ting beskriver, langt fra ikke en Parabol, men en langt anden Linie (**). I Luften, betragtet som en tynd flydende Materie, hvis Modstand er som Hastighedens Quadrat, bliver den Linie, som nærmer sig til de udkastede Tings sande Bane, en Linie af tredie Orden, og om man vil nærme sig den endnu meer, da en Linie af fjerde. I alle andre Ordener kunde algebraiske Linier findes, som nær-

De udkastede Ting beskriver i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, ikke Paraboler, men deres sande Bane nærmer sig til andre algebraiske Linier af de høiere Ordener.

§ff 2

me

(*) *Newtons Princip. Philosoph. Lib. 2. Sect. VI. Prop. 26.*

(**) See Tillægget §. 260 = 275.

me sig til den sande Bane, og disse Linier blive idelig af en høiere Orden, eftersom det Flydendes Modstand antages at blive større til. Imidlertid kan her ikke negtes, at jo den forhen givne Theorie af Parabolen ikke treffer ind med den sande Bevægelse, med mindre at de udkastede Ting ere anseelig tunge og deres Hastighed maadelig. I dette Tilfælde nærmer den paraboliske Theorie, som forhen sagt, sig temmelig noie til den sande, men man maa altid tilstaae, at den er ikke saa noie, som den, der af de forhen omtalte Linier af tredie og fjerde Orden kunde bestemmes.

§. 159.

Almindelige
Anmerkninger
om Bevægelsen
ved Central-
Kræfterne i fly-
dende Materier,
som staae imod.

Angaaende de andre centrale Kræfter og den af dem forarsagede krumlinede Bevægelse, da var i Henseende til dem overmaade meget at erindre, i Anledning af det, hvad vore Tidens Geometrer allerede have sagt og beviist, men endnu meget mere, naar man seer paa, hvad desangaaende kunde siges, som endnu af alle er bleven urørt. Det er unegteligt, at endskiont man i disse Materier ikke kan giøre andet, end gaae fort ved Hypotheser, ere de dog desuagtet overmaade vigtige i Physik og i de Undersøgninger, som udfordres til at kiende de sande Naturens Love. Saaledes er det unegteligt, i Følge det, som vi forhen have sagt; at om Planeterne bevæges i ledige Rum, de da maa drives af Kræfter, som ere centrale og af den Besskaffenhed, som vi der have tillagt dem, saa der paa denne Maade unegtelig bliver en almindelig Tyngde til i Naturen, i det mindste i vores Solsystem.

Systeme. Men deraf kan langt fra ikke sluttes, at de Bæ-
ner, som i Himlene beskrives af Planeterne, ikke kunde be-
skrives af dem i flydende Materier, som stode imod, saa
snart som andre Kræfter regierede i Naturen (*). Saa de
flydende Tings Modstand er af en uendelig Vigtighed i Na-
turens Betragtning, og kan give Anledning til utallige Un-
dersøgelser, som ikke ere mindre vanskelige, end nyttige i
den sande Kundskab.

Tiende Tillæg.

Om
de flydende Tings Modstand, igiennem hvilke
Legemerne bevæge sig.

Første Inddeeling.
Om den retlinede Bevægelse.

§. 206.

Følge af det, som vi allerede have sagt udi Forelæsnungen, fore-
falde i den retlinede Bevægelse 3 Hoved Tilfælde at betragte.

a) Naar et Legeme bevæges imod den flydende Materie, uden at
drives af andre Kræfter end af Hastigheden i den samme rette
Linie alene.

Abvikkelige Til-
fælde i den retli-
nede Bevægelse,
som har betrag-
tes, naar en fly-
dende Materie
staar imod.

§ff 3

b) Naar

(*) See Tillægget §. 283 = 285.

- b) Naar det falder, drevet af visse Kræfter, og Begyndelsen af Faldet skeer enten uden, eller med en vis given Hastighed.
- c) Naar Legemerne stige med en vis given Hastighed op efter, imidlertid at de idelig drives ned efter af hastiggjørende Kræfter.

Vi ville kortelig vise det betydeligste, som fortæller at efter: tænkes i disse tre Tilfælde, saavel, naar den flydende Materie er overalt af samme Tykkelse og Modstand, som naar dens Modstand og Tykkelse er foranderlig paa adskillige Distancer.

§. 207.

Første Tilfælde.

1) Naar denne Materie er overalt lige tyk, dens Modstand, som Quadraten af Hastigheden, og de udkastede Ting bevæge sig linie, hen efter hvilken Bevægelsen skeer, AB (Taf. XI. Fig. 7.). alene ved deres Hastighed, uden Antages Begyndelsen af Bevægelsen at skee udi A, saa at $Ab = x$ at drives af andre Kræfter.

Materie, som staaer imod, drevet af dets Hastighed alene.

Er den Hastighed, hvormed Bevægelsen begynder $= A$, den Er den Hastighed, hvormed Bevægelsen begynder $= A$, den paa de først givne almindelige Regler for Bevægelsen. Saaledes om Modstanden antages at være som Quadraten af Distancen, (da dette er den eneste Hypothese, som stemmer med Naturen) og $\frac{np}{m} dt = dv$ §. 5, men efter det §. 246 For. sagte, er her $\frac{np}{m} = \frac{gz}{c}$, og saaledes, fordi Hastigheden idelig formindskes, alt som Tiden vøxer, $-\frac{gz}{c} dt = dv$. Men $v^2 = z$, fordi z er den Høide, som svarer

til

til Hastigheden udi b , selgelig $v = \sqrt{z}$, og $dv = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$. Altsaa faaes $\frac{2g}{c} dt = -dz \cdot z^{-\frac{3}{2}}$ og $\frac{g}{c} t = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + B$. B bestemmes af, hvad Integralen bliver, naar $t = 0$, da $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, saa den fuldstændige Lighed derfor bliver; $\frac{g}{c} t \sqrt{z} \sqrt{A} = \sqrt{A} - \sqrt{z}$, eller $t = \frac{c(\sqrt{A} - \sqrt{z})}{g\sqrt{z}\sqrt{A}}$.

§. 208.

Deraf kan, naar Hastigheden er given, Tiden altid bestemmes, udi hvilken den Hastighed $\sqrt{A}$ forandres til den søgte $\sqrt{z}$. I denne Hypothese tabes Hastigheden ikke uden i en uendelig Tid. Men det, som her bør synes besynderligt, er, at om Hastigheden ganske skal tabe sig, da kan det ikke skee, med mindre at Tiden først er blevet uendelig stor. Thi er $\sqrt{z} = 0$, bliver $t = \frac{1}{0}$, og derfor ∞ .

§. 209.

Det samme findes, om man søger Ligheden imellem Hastigheden $\sqrt{z}$ og Rummet, da man faaer §. 7. $-\frac{gz}{c} dx = dz$, og $-\frac{g}{c} dx = \frac{dz}{z}$. Et heller uden igiennem et uendeligt Rum. Hvoraf Integralen er $\text{Log. } z = -\frac{g}{c} x + B$. Men B bestemmes derved. At naar $x = 0$ er $z = A$. Saa det fuldstændige Integral bliver $\text{Log. } z - \text{Log. } A = -\frac{g}{c} x$, eller $\text{Log. } \frac{A}{z} = \frac{gx}{c}$. Forstaaes ved e det Tal i den hyperboliske Logarithmique,

que, hvis Logar. = 1. Da bliver $z = \frac{A}{\frac{x}{e^c}}$, om $g = 1$.
 Følgelig bliver Hastigheden eller $\sqrt{z} = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{2c}}$.

§. 210.

Den Hypothese af Modstanden som Quadraten af Hastigheden stemmer ei ganske med Erfaring.

Deraf sees, at om Hastigheden skal ganske tabes, saa $\sqrt{z} = 0$, bliver $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{2c}} = 0$, hvilket, saa tidt som A og c ere endelige

Sterrelser, aldrig kan skee, med mindre at $x = \infty$. Saa den hele Hastighed, hvormed Tingene skydes eller kastes ud, ikke kan tabe sig, førend at i en uendelig lang Tid et uendelig langt Rum er blevet igiennemløbet.

Er derimod c en uendelig liden Sterrelse; hvilket sidste haver Sted, saa tidt som den flydende Materie er overmaade tyk, da bliver

dog $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{2c}} = 0$, om end x ikke er uden en meget liden endelig Ster-

relse imod c . Følgelig kan i dette Tilfælde Hastigheden tabes ei alene over et endeligt, men endog over et anseelig liden Rum.

§. 211.

Tiden bestemmes i samme Henseende til Rummet.

Tiden af Bevægelsen bestemmes ligeledes i Henseende til Rummet. Thi da $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{A}{e^{2c}} - x}}$, Saa er, fordi $\text{Log}.e = 1$.

$$t = \frac{-x - \frac{2c}{A^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}}.$$

§. 212.

§. 212.

Skient at i den Hypothese af en Modstand, som Quadraten af Hastigheden bestemmes i Almindelighed, kunde tabe deres hele Bevægelse uden i en uendelig Tid og over et uendeligt Rum. Saa kan det dog skee under andre Betingninger, hvor Høide af samme for vi og i Almindelighed ville undersøge, hvad der her skee i disse Henseende, saa tidt som de flydende Tings Modstand er som den ubestemte Høide z^m af Hastigheden. I dette Tilfælde bliver $c^m : g = z^m :$

$\frac{z^m}{c^m} g$, eller om $g = 1$, som $\frac{z^m}{c^m}$. Hvilket tilkiendegiver den virkelige Modstand.

Sætter man derfor i den Lighed $-\frac{np}{m} dx = v dv$; $\frac{np}{m} = \frac{z^m}{c^m}$,

og $v dv = dz$, som før §. 207. Da bliver $-\frac{z^m}{c^m} dx = dz$,

og $-\frac{dx}{c^m} = z^{-m} dz$. Hvoraf Integralen er $-\frac{x}{c^m} = \frac{1}{1-m} z^{-m+1}$

$= \frac{z^{1-m}}{1-m} + B$, saa man faaer $-\frac{x}{c^m} = \frac{z^{1-m} - A^{1-m}}{1-m}$

og $z^{1-m} = \frac{c^m A^{1-m} - x(1-m)}{c^m}$,

følgelig $z = \frac{\sqrt[1-m]{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}{\sqrt[1-m]{c^m}}$.

§. 213.

Hastigheden ta-
bes ikke uden
igienem et uen-
deligt Rum, saa
tidt som Mod-
standen er en
Høide af Hastig-
heden større end
Quadraten.

Deraf sees, at saa tidt som $m > 1$, bliver i forrige Lighed

$$z = \frac{\sqrt{c^m}}{m-1}, \text{ eller om man dividerer under}$$

$$\sqrt{c^m A^{1-m} + (m-1)x}$$

Legnene oven og neden med A^{1-m} . Saaes i forrige Lighed

$$z = \frac{\sqrt{c^m + (m-1)x} : A^{1-m}}{1-m}, \text{ eller } \frac{A \cdot c^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt{c^m + (m-1)x} \cdot A^{m-1}} = z,$$

hvilken Værdie af z er lettere at bruge, og strax viser.

At saa tidt som Modstanden stæer, enten efter Quadraten af Hastigheden, eller efter en anden Høide af denne sidste, som er større end Hastighedens Quadrat. Da bliver aldrig den hele Hastighed til-
intetgjort, før et uendeligt Rum først er blevet igiennemløbet. Thi

$$\text{er } z = 0, \text{ maa } \frac{A \cdot c^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt{c^m + (m-1)x} \cdot A^{m-1}} = 0, \text{ og sellgelig}$$

$$x = \infty.$$

§. 214.

Yttrer sig der:

mod Modstan-
den efter en Høi-
de af Hastighe-
den, som er min-
dre end 1, da ta-
bes Hastigheden
altid over et en-
deligt Rum.

Modstandens Lov maa derfor være en noget mindre Høide af Hastigheden, end den, der er som sammes Quadrat. For at see dette sidste desto tydeligere, ville vi antage $m < 1$, og §. 212.

$$z = \frac{\sqrt{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}{1-m}, \text{ i hvilken Lighed } 1-m \text{ er en be-}$$

$$\sqrt{c^m}$$

kræf-

Kræftende Størrelse. Sættes $z = 0$, bliver $c^m A^{1-m} = (1-m)x$

og $x = \frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$. Hvilket bestemmer den største Længde, som

det udkastede Legeme kan igiennemløbe, hvilken altid bliver en endelig og bestemt Størrelse.

§. 215.

Sætter man i dette Tilfælde $m = \frac{1}{2}$, eller Modstanden, som Placledes naar Hastigheden simpel hen tagen. Hvilken Lov synes at finde Sted i Naturen, saa længe som Hastigheden ikke er uden meget liden, da

bliver som i §. 213. $\sqrt{z} = \frac{2\sqrt{cA-x}}{2\sqrt{c}}$, og den hele Hastighed ta-

kes over et Rum $x = 2\sqrt{cA}$. Saa det Rum, hvorover Hastigheden tabes, kan, om den flydende Materie er tyk, og derfor c en meget liden Størrelse, endog blive meget liden, i sær om den Hastighed $\sqrt{A}$, hvormed Tingen er udkastet, ikke er uden liden. Men det, som her atter igjen er besynderligt, er, at Tabet af den hele Hastighed desuagtet altid udfordrer en uendelig lang Tid.

§. 216.

For at see dette desto tydeligere, ville vi foretage os Udregningen af Tiden henført til Rummet i den §. 211 anførte almindelige Tilfælde. Da man faaer $dt = \frac{dx \sqrt{\frac{1-m}{c^m}}}{\sqrt{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}$

$$\sqrt{\frac{1-m}{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}$$

Egg 2

= dx

$$= \frac{dx \sqrt[2m-2]{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}{\sqrt[2m-2]{c^m}} = \frac{dx \cdot (c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt[2m-2]{c^m}}.$$

Hvilket er den Deel $\frac{1}{m-1}$ af det "ubekjendte Leedes" Differential, saa man derfor faaer

$$t = \frac{\frac{1}{m-1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot (c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{c^{2m-2}}} + B, \text{ eller og}$$

$$t = \frac{2(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{(2m-1)c^{2m-2}}} + B. \text{ Denne bestandige}$$

Størrelse bestemmes deraf, at naar $x = 0$, bliver Integralen

$$\frac{2 \cdot (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{(2m-1)c^{2m-2}}}, \text{ saa den fuldstændige Lighed for Tiden bliver}$$

$$t = \frac{2}{2m-1} \frac{(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{c^{2m-2}}}.$$

§. 217.

Er Modstanden større end den Hvide 1 af Hastigheden, tabes denne sidste aldrig uden i uendelig stor, i hvilken den hele Hastighed skulde tage sig, siden $x = \infty$. Deraf følger. At saa tidt som $m > 1$, maa, alt som Tiden tager til, x eller det igiennemløbne Rum ligeledes altid tage til, og naar $x = \infty$, maa $t = \infty$. Følgelig bliver altid den Tid uendelig Tid.

§. 213. I den Hypothese nemlig, da Modstanden enten er som Quadraten eller en anden Heide af Hastigheden større end Quadraten.

§. 218.

Er $m < 1$, da bliver x ei altid ∞ , §. 214. men i Almindelighed

$$x = \frac{c^m A^{1-m}}{1-m}.$$

Imidlertid da $2m - 1$ endnu, saa længe $m > \frac{1}{2}$ bliver en bekræftende Sterrelse, maa Tiden desuagtet blive uendelig.

Thi sættes i Steden for x , $\frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$, saa faaes

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1} (c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m} (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}} - (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}})}{\frac{m}{c^{2m-2}}},$$

hvilket, fordi $2m - 2$ er en negtende Sterrelse, forandres til

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1} \left(\frac{-m}{c^{2m-2}} \right)}{(c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m} (c^m A^{1-m}))^{\frac{2m-1}{2-2m}}}$$

$$= \frac{\frac{2}{2m-1} (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{c^{2m-2}}}, \text{ hvoraf det første Stykke viser, at Tiden}$$

bliver uendelig. Thi da den Heide $\frac{2m-1}{2-2m}$ er bekræftende, om $m > \frac{1}{2}$, og

$$c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m} c^m A^{1-m} = 0, \text{ saa bliver } t = \frac{1}{0} = \infty.$$

Er den mindre end samme Heide, bliver Tiden da altid endelig, saa længe Heiden ei er mindre end Quadraten af Hastigheden.

§. 219.

Er Modstanden
som Hæftighe-
den, er Tiden
endnu, men i
mindste Grad,
uendelig.

Er derimod $m = \frac{1}{2}$, da bliver $t = \infty$, fordi $2m - 1 = 0$,
saavel som $c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m} (c^m A^{1-m})$. Men ∞ tilkiendegiver,
som man veed, ubestemt-viis enhver Forhold, saa den derfor, hvil-

ken her haver Sted, maa søges ved Hielp af Differential-Ligheden,
der i dette Tilfælde bliver $dt = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\sqrt{cA-x}}$, §. 215. og derfor

$$t = 2\sqrt{c} \text{Log.} \left(\frac{1}{2\sqrt{cA-x}} \right) + B. \text{ Men}$$

$$B = -2\sqrt{c} \text{Log.} \frac{1}{2\sqrt{cA}}. \text{ Saa det fuldstændige Integral derfor}$$

$$\text{bliver } t = 2\sqrt{c} \text{Log.} \left(\frac{2\sqrt{cA}}{2\sqrt{cA-x}} \right).$$

Er $x = 2\sqrt{cA}$. Da er det hele Rum udløbet, og selgelig
Tiden af Bevægelsen endel. §. 215. Selgelig faaes for den hele Tid
af Bevægelsen $t = \text{Log.} \infty = \text{Log.} \infty$. Hvoraf man seer, at
Tiden, udi hvilken Bevægelsen skeer over det Rum $2\sqrt{cA}$ er uendelig
stor. Skient derved kan agtes, at $\text{Log.} \infty$ er det mindste, saa
at sige, af alle uendelige store Sterrelser.

§. 220.

Er Modstanden
derimod mindre
end Quadrats-
Moden af Hæf-
tigheden, er Ti-
den, i hvilken
den hele Hæftig-
hed tabes, altid
endelig.

Er derimod $m < \frac{1}{2}$. Da er den Tid, udi hvilken Bevægelsen
gaaer for sig, altid endelig. Thi da efter det forhen fundne §. 218

$$t = \frac{2}{2m-1} (c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{m-1} (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}) \\ = \frac{2}{2m-1} \frac{c^m A^{1-m}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$

$$\frac{\frac{2}{2m-1} (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{c^{2m-2}}}, \text{ og det første Leed er } = 0, \text{ saa bli-}$$

$$\text{ver Tiden af Bevægelsen altid} = \frac{\frac{2}{1-2m} (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^m : (2m-2)}$$

$$= \frac{\frac{2}{1-2m} A^{1-m} \cdot (A - c)^{\frac{2m^2-2m}{2m-2}}}{1-2m} = \frac{2 A^{1-2m} c^m}{1-2m}, \text{ hvilket altid}$$

tillænder en endelig Sterrelse.

Andet Tilfælde.

Naar Tingene drives ned efter af givne Kræfter, og tillige lide en immervarende Modstand, i Særdeleshed om de tunge Tings naturlige Fald, naar Modstanden er, som Quadraten af Hastigheden.

§. 221.

Vi skille her to Tilfælde fra hverandre, den ene, naar Tingene begynde deres Fald simpel hen uden al Hastighed. Den anden, naar de falde ned efter udfastede i Vertikalen, eller i den drivende Krafts Direktion med en vis Hastighed. Vi ville først foretage den første Tilfælde, da man strax seer. At om den henester den rette Linie BA drivende Kraft kaldes K. Den Kraft, som svækker Bevægelsen ved at staa imod, M. Da bliver den hele hastiggierende Kraft ikke uden K—M. Antages Faldet at begynde udi B, saa $Ba = x$, $ab = dx$. Og den Heide, som svarer til Hastigheden udi $a = z$. Da bliver i

2) Naar i en overalt liggende flydende Materie de tunge Ting falde ned efter uben anden Hastighed end den, de vinde ved Faldet.

Atmin-

Almindelighed §. 249 For. $(K - M) dx = dz$. Hvilken Lighed ikke i alle Tilfælde, men ikkun i nogle kan integreres.

§. 222.

Da almindelig
at bestemme Ha-
stigheden og Ti-
den.

Vi ville af disse i særdeleshed betragte en. Den, da de hen efter BA drivende Kræfter ere uden Forandring de samme, da K bliver en bestandig Sterrelse $= G$, og M desuden antages at være en simpel Funktion af Hastighedernes Heider. Er denne Heide z^m , da bliver, som før §. 212, $M = \frac{z^m}{c^m} g$, naar ved g forstaaes den naturlige Tyngde her hos os, eller M bliver simpel hen $= \frac{z^m}{c^m}$, om $g = 1$. Den almindelige Lighed $(K - M) dx = dz$ forandres derfor i dette Tilfælde til denne anden $(G - \frac{z^m}{c^m}) dx = dz$, eller $(Gc^m - z^m) dx = c^m dz$, saa $dx = \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$, og derfor $x = \int \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$. Videre faaes $dt = \frac{c^m dz}{(Gc^m - z^m)\sqrt{z}}$, og $t = \frac{c^m dz}{(Gc^m - z^m)\sqrt{z}}$, men da disse Ligheder ikke ere almindelig integrable, ville vi særdeles opholde os ved den Tilfælde, som synes at være den naturlige, den nemlig, i hvilken Modstanden er som Quadraten af Distancen.

§. 223.

Derfor i dette
Tilfælde Mod-
standen er som

Vi ville foretage det vigtigste Tilfælde, da Modstanden antages at være som Quadraten af Hastigheden; I hvilken Lighed $dt =$

$dx = \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$, §. 222. derved forandres til denne anden Quadraten af

$dx = \frac{cdz}{Gc - z}$, og $x = c \text{ Log. } \left(\frac{1}{cG - z} \right) + B$. Men $B = c$ Hastigheden i Henseende til Nummer.

Log. cG . Følgelig bliver

$x = c \text{ Log. } \frac{cG}{cG - z}$. Og naar man vil finde Hastigheden

følv, bliver $\frac{x}{c} = \frac{cG}{cG - z}$, eller $cG e^{\frac{x}{c}} - z e^{\frac{x}{c}} = cG$, saa

$$z = \frac{cG e^{\frac{x}{c}} - cG}{e^{\frac{x}{c}}} = cG \left(\frac{e^{\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}}} - 1 \right) \cdot \frac{e^{-\frac{x}{c}}}{e^{\frac{x}{c}}} = cG \left(1 - e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

forbi $e^0 = 1$.

§. 224.

Da jo større x bliver, desto mindre bliver $1 - e^{-\frac{x}{c}}$, eller $\frac{1}{e^{\frac{x}{c}}}$. Saa sees, at den største Hastighed, hvilken paa denne Maade

Vindes i dette Tilfælde den største Hastighed ved Faldet ikke, for et uendeligt stort Num er igiennemløbet.

Kan vindes, aldrig tilveie bringes udi de tunge Tings Fald, før end at et uendeligt stort Num er blevet igiennemløbet. Er derimod $x = \infty$, da kan siden ingen Formeering udi Hastigheden meer skee; thi da bli-

ver $cG \left(1 - e^{-\frac{x}{c}} \right) = cG$, og Hastigheden selv $= \sqrt{cG}$, hvilket er derfor den største Hastighed, som kan vindes ved Faldet af de tunge Ting, naar en flydende Atmosphære staaer dem ved sin Inertie immer imod, og er desuden, som vi her antage det, overalt af samme Beskaffenhed.

hhh

§. 225.

§. 225.

Desuagtet er
den største Ha-
stighed, som ved
Faldet vindes,
altid endelig i
denne Hypo-
these.

Saaledes bliver den største Hastighed, som ved Faldet kan vin-
des, den, med hvilken om et Legeme blev kastet ud i en flydende Ma-
terie af ensdan Tykkelse, dets Modstand da blev net op saa stor som
Tyngdens Drift ned efter. Hvilket og uden Hielp af disse Udregnin-
ger let sees.

Er de drivende Kræfter de samme, da blive de største Hastighe-
der, som ved Faldet kunde vindes, altid proportionerte $\sqrt{c}$, og derfor
bestandig større i de tyndere, mindre i de tykkere flydende Materier.
Fordi derfor i et aldeles opfyldt Rum, udi hvilket Tykkelsen var paa sit
allerstørste, $\sqrt{c}$ ei er uden en overmaade liden Størrelse, eller $og = 0$,
saa bliver saavel Hastigheden, som det igiennemleebne Rum $= 0$.
Saa at i et saadant aldeles opfyldt Rum ikke uden en overmaade liden
eller rettere, slet ingen Bevægelse kan have Sted, saa tidt som Tin-
gene bevæge sig ned efter, uden at have en vis Hastighed i Begyn-
delsen af Faldet.

§. 226.

Dettes Sam-
menligning med
de Hastigheder,
som vindes i
Tingenes frie
og uhindrede
Fald.

Er den flydende Materie af aldeles ingen Tykkelse, da bliver
 $\sqrt{c}$ en uendelig stor Størrelse. Og for videre at see, hvorledes
Hastigheden da forholder sig ei alene naar den er størst, men ellers

overalt, kan videre agtes, at, naar $c = \infty$, opløses $e^{-\frac{x}{c}}$ ved
de uendelige følger til den Verdie $1 - \frac{x}{c}$, uden at beholde flere Leed
af følgen, fordi Næsten divideres ved de høiere Potenser eller Hei-
der af c . Man faaer derfor

$$z = cG(1 + \frac{x}{c} - 1) = cG\frac{x}{c} = xG, \text{ er } G = g = 1, \\ \text{bliver}$$

bliver $x = z$ eller Heiden af Faldet den Heide, som svarer til den vundne Hastighed, saaledes som den og bør være det.

§. 227.

Er c ikke just ∞ , men dog meget liden, da kan man beholde

flere Leed af den uendelige Følge, hvori c^{-x} opløses, hvilken Følge er $1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} + \dots$ o. s. v. saa

$$z = G. \left(x - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{6c^2} + \dots \text{o. s. v.} \right)$$

Maade at bestemme Hastigheden, naar de flydende Materier, som staae imod, ere overmaade tynde, og Modstanden som forhen.

Da Luften kan ansees som en flydende Materie af meget liden Tykkelse, saa kan ved Hielp af denne Lighed de tunge Tings Fald i den paa det nærmeste udregnes, i sær, om de ere af en meget anseelig Tyngde.

I samme Tilfælde kan man fremdeles agte, at naar c er en meget stor Størrelse, og x en meget liden, bliver $z = Gx$, ligesom i den frie Bevægelse.

§. 228.

Man kan af den oven anførte Lighed §. 223 ligeledes bestemme Vægfærdigheden af Bevægelsen i de Tilfælde, da de tunge Tings Fald begynder ned efter med en vis given Hastighed. Thi dertil behøves intet andet, end at man i Ligheden $x = -c \text{ Log. } (cG - z) + B$ bestemmer B saaledes, som dette Tilfælde det udkræver. Er nemlig Heiden, som svarer til Hastigheden, i Begyndelsen af Faldet $= A$, da bliver $z = A$, naar $x = 0$, og man faaer

$$B =$$

$$B =$$

$$B = {}^c \text{Log.} \overline{{}^c G - A}, \text{ og } x = {}^c \text{Log.} \frac{{}^c G - A}{{}^c G - z},$$

$$\text{sa } z = e^{\frac{-x}{c}} (A - {}^c G) + {}^c G. \text{ Hvoraf sees}$$

1) At om $A = {}^c G$, da bliver og $z = {}^c G$, eller en bestandig Sterrelse: Følgelig kan i dette Tilfælde Hastigheden aldrig tage til eller formeres, men Legemet bevæger sig bestandig med efter med en ensdan Bevægelse. Man seer let hvorfor. Da $z = {}^c G$, saa er Modstanden just saa stor, som den hastiggjørende Kraft af Tyngheden §. 228. 229. Følgelig kan Hastigheden ved Faldet ikke vore.

2) Er $A > {}^c G$, da er $\frac{A - {}^c G}{\frac{x}{e^c}}$ altid en bekræftende Ster-

relse, hvilken formindskes, alt som x vore. Bevægelsen tager derfor i dette Tilfælde immer af, indtil at omsider, efter at et uendeligt Rum er igiennemløbet, $\frac{A - {}^c G}{\frac{x}{e^c}} = 0$, og $z = {}^c G$, som er den mindste

Hastighed, det faldende Legeme kan bevæge sig med.

3) Er derimod $A < {}^c G$, da bliver $\frac{A - {}^c G}{\frac{x}{e^c}}$ en negtende

Sterrelse, hvilken altid bliver mindre og mindre, alt som x bliver

større og større. Følgelig bliver $e^{\frac{-x}{c}} (A - {}^c G) + {}^c G$ altid større og større, i det x tager til. Hastigheden vore derfor og idelig, men kommer dog aldrig til sit største, før et uendeligt Rum er igiennemløbet, fordi $\frac{A - {}^c G}{\frac{x}{e^c}}$ ei før $= 0$.

4) Føl-

4) Følgelig bliver i alle Tilfælde $\sqrt{Gc}$ den største Hastighed, hvilken naar er naaet, Bevægelsen altid siden gaaer fort enspan, uden enten at formindskes eller at formeres.

§. 229.

Man bestemmer i begge disse Tilfælde Tiden paa samme Maade som før. Næmlig i den første er $dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{\sqrt{cG(1-e^{\frac{-x}{c}})}}$ mes i de tunge Tings Fald, naar de begynde Faldet uden Hastighed, og Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

Sættes $\frac{-x}{c} = v$, bliver $-dx = \frac{cdv}{v}$, og $dt = \frac{-cdv}{v\sqrt{cG(1-v)}}$

$= -\frac{c}{\sqrt{cG}} \cdot \frac{dv}{v\sqrt{1-v}}$, hvilket, som man strax seer, kan gøres rationel, ved at sætte $\sqrt{1-v} = y$. Thi da er $1-y^2 = v$.

$dv = -2ydy$, og $\frac{dv}{v\sqrt{1-v}} = \frac{-2ydy}{(1-y^2)y} = \frac{-2dy}{1-y^2}$. Men

Divisores af $1-y^2$ ere $1+y$ og $1-y$. Følgelig er $\frac{-2dy}{1-y^2} =$

$\frac{2dy}{y^2-1} = \frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y+1}$. Hvoraf Integralen er $\text{Log.} \frac{y-1}{y+1}$

+ B, og $\int \frac{-c}{\sqrt{cG}} \cdot \frac{dv}{v\sqrt{1-v}} = \frac{-c}{\sqrt{cG}} \cdot \text{Log.} \frac{y-1}{y+1} + B$.

Sættes igien i Steden for y dens Værdie $\sqrt{1-v}$, er

$\frac{-c}{\sqrt{cG}} \text{Log.} \frac{y-1}{y+1}$. B = $\frac{c}{\sqrt{cG}} \text{Log.} \frac{\sqrt{1-v}+1}{\sqrt{1-v}-1} + B$. Og

naar ydermere i Steden for y fremdeles sættes dens Værdie $\frac{-x}{c}$, faaes omsider

$$t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \left(\text{Log.} \frac{\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} + 1}{\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} - 1} - \text{Log.} \frac{+1}{-1} \right), \text{ fordi B}$$

bestemmes af det, hvad Integralen bliver, naar $x = 0$.

Man kan giøre denne Lighed simplere, ved at agte, at

$$\text{Log.} \frac{x}{e^{\frac{x}{c}}} = \frac{x}{c}. \text{ Thi multiplicerer man med } \sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} + 1$$

$$\text{oven og neden, da faaes } t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \left(2 \text{L.} \frac{\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} + 1}{-e^{\frac{-x}{c}}} - \text{L.} -1 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \left(2 \text{L.} \left(\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} + 1 \right) + \text{Log.} e^{\frac{x}{c}} \right), \text{ fordi}$$

$$\text{Log.} -e^{\frac{x}{c}} = \text{Log.} e^{\frac{x}{c}} + \text{Log.} -1. \text{ Saaledes bliver}$$

$$t = \left(\frac{x}{c} + 2 \text{Log.} \left(\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} + 1 \right) \right) \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}}. \text{ Eller og,}$$

om man multiplicerer den, nest forhen fundne Lighed oven og neden

med $e^{\frac{x}{c}}$. Faaes

$$t = 2 \sqrt{\frac{c}{G}} \cdot \text{Log.} \sqrt{e^{\frac{x}{c}} - 1} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}}.$$

§. 230.

Den største Hastighed naaes da ikke uden i en uendelig Tid.

Da derfor §. 224 $x = \infty$ for den største Hastighed kan

§. 231.

§. 231.

Begynde de faldende Ting deres Fald med en vis given Hastig- Tiden bestem-
hed $\sqrt{A}$, da er Oplosningen endnu den samme. Thi man faaer i des ligeledes i
dette Tilfælde $dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{-x}{e^c} (A - Gc) + Gc}}$, §. 228. hvilket begynder med en
vis given Ha-
stighed.

ved at sette $e^{\frac{-x}{c}} = v$, som før, og $(A - Gc) = f$; faaes

$dt = \frac{-cdv}{v \sqrt{vf + Gc}}$. Sættes igien $\sqrt{vf + Gc} = y$, bliver

$dt = \frac{-2cdy}{y^2 - Gc}$. Men af $y^2 - Gc$ ere Divisorerne $y + \sqrt{Gc}$,

og $y - \sqrt{Gc}$. Saa $dt = \frac{\sqrt{\frac{c}{G}} dy}{y + \sqrt{Gc}} - \frac{\sqrt{\frac{c}{G}} dy}{y - \sqrt{Gc}}$, og

$t = \sqrt{\frac{c}{G}} (\text{Log. } y + \sqrt{Gc} - \text{Log. } y - \sqrt{Gc}) + B$. Sættes

i Steden for y dens Værdie $\sqrt{vf + Gc}$, faaes

$t = \sqrt{\frac{c}{G}} \text{Log.} \frac{\sqrt{vf + Gc} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{vf - Gc} + \sqrt{Gc}} + B$. Endelig om i Steden for

v sættes $e^{\frac{-x}{c}}$, bliver $t = \sqrt{\frac{c}{G}} \text{L.} \frac{\sqrt{\frac{-x}{fe^c} + Gc} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{\frac{-x}{fe^c} + Gc} - \sqrt{Gc}} + B$.

Og $B = -\sqrt{\frac{c}{G}} \text{Log.} \frac{\sqrt{f + Gc} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{f + Gc} - \sqrt{Gc}}$

$= -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \text{Log.} \frac{\sqrt{A} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{A} - \sqrt{Gc}}$, Hvoraf endelig faaes

$t =$

$$t = \frac{V_c}{V_G} \left(\text{Log.} \frac{\sqrt{\frac{x}{f.e^c + Gc}} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{\frac{x}{f.e^c + Gc}} - \sqrt{Gc}} - \text{Log.} \frac{\sqrt{A} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{A} - \sqrt{Gc}} \right). \text{ Eller og}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{Log.} \frac{\sqrt{\frac{x}{c^c Gc}} + \sqrt{\frac{x}{c^c Gc}} + A - Gc}{\sqrt{A} + \sqrt{Gc}}$$

Tredie Tilfælde.

Naar Tingene stige op efter med en vis given Hastighed, men drives tillige ned efter af andre Kræfter; i Særdeleshed, naar de finde en Modstand, som Quadraten af Hastigheden, i det de stige.

§. 232.

3) Almindelig Bestemmelse af Hastighed, vis given Hastighed, og visse givne Kræfter drive dem igien ned efter Rum og Tid, naar Tingene den Direktion BA. Da forene disse sidste sig med Modstanden af stige op efter, og den flydende Materie, udi hvilken at de bevæge sig. Vedligeholdes drives imidlertid ned efter af derfor de samme Benævninger, som før §. 216, undtagen at her visse Kræfter.

Ab = x, og ba = dx bliver (K + M) dx = -dz. Hvilket, naar sammenlignes med Ligheden §. 216 (K - M) dx = dz, strax viser, at Bevægelsen op og ned efter ikke bliver her i Henseende til Hastigheden og Tiden, udi lige høie Punkter og over ligedanne Rinter

den

den samme, som vi før have bevist, at den maatte være det udi den frie Bevægelse, da intet stod imod.

§. 233.

Den almindelige Lighed $(K + M) dx = - dz$ er ligesaa lidet integrabel, som den §. 221. Vi ville derfor foretage den af de enkelte Tilfælde, som i Anvendelsen og Brugen er af størst Betythed, den da K er en bestandig Kraft $= G$. Sætter man i dette Tilfælde, som før, M eller Modstanden som en ubestemt Heide af

Hastigheden $= \frac{z^m}{c^m} g = \frac{z^m}{c^m}$, om $g = 1$. Da forandres den al-

mindelige Lighed $(K + M) dx = - dz$ til denne anden

$$\left(G + \frac{z^m}{c^m}\right) dx = - dz, \text{ saa } dx = \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}.$$

$$x = \int \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}, \text{ og } t = \int \frac{-c^m dz}{(Gc^m + z^m)\sqrt{z}}.$$

§. 234.

Da disse Ligheder heller ikke ere almindelig integrable, er i Hastigheden bestemmes i Hens
Særdeleshed, efter det forhen sagte, det Tilfælde betydeligt, naar Mod- standen et som Quadraten af Hastigheden, da den forrige Lighed
standen et som Quadraten af Hastigheden, da den forrige Lighed
 $dx = \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}$ forandres til denne anden $dx = \frac{-cdz}{Gc + z}$, hvoraf
standen er som
Quadraten af
Hastigheden.

Integralen er $x = c \text{ Log. } \frac{1}{cG + z} + B$. Men $B = -c \text{ Log. } \frac{1}{cG + A}$.

Om den Heide, der svarer til Hastigheden i Begyndelsen af Bevæ-

gelsen op efter $= A$, saa at derfor $x = c \operatorname{Log} \frac{cG + A}{cG}$, og

$$z = (A + cG) \cdot e^{\frac{-x}{c}} - cG.$$

§. 235.

Den taber sig
altid igiennem
et endeligt Rum

Skal den hele Hastighed tabe sig, bliver $z = 0$, og
 $x = c \operatorname{Log} \frac{cG + A}{cG}$, som derfor er den Høide, under hvilken at
Hastigheden aldeles ophører.

§. 236.

Maade at be-
stemme Hastig-
heden i meget
små flydende
Materier.

Dersom den flydende Materies Modstand er meget liden, saa
betyder et stort Tal, og x imod c ligeledes en meget liden Størrelse.

Da kan i den uendelige Række, udi hvilken $e^{\frac{-x}{c}}$ bør opløses, alene
nogle saa af de første Leed beholdes, hvorved Hastigheden paa det
nærmeste findes. Saaledes, da $e^{\frac{-x}{c}} = 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \dots$
o. s. v. saa bliver i dette Tilfælde

$$z = -cG + (A + cG) \cdot \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} \right).$$

I alle andre
Tilfælde maa af den uendelige Række den ubekendte x søges, efter de
bekendte Metoder.

§. 237.

Tiden af Bevæ-
gelsen bestem-
mes.

Tiden af Bevægelsen er i dette Tilfælde $\frac{dx}{\sqrt{z}}$

$$= \frac{dx}{\sqrt{(A + cG) \cdot e^{\frac{-x}{c}} - cG}},$$

hvilken Lighed kan paa samme Maade

gieres

gøres integrabel, som før §. 231, saafremt nemlig, at man sætter

$$\frac{-x}{c} = v \text{ og } -dx = \frac{cdv}{v}. \text{ Bliver } \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{-cdv}{v\sqrt{av-cG}}, \text{ naar}$$

$$A + cG = a. \text{ Tages videre som i §. 231 } \sqrt{av-cG} = y.$$

$$\text{Bliver fremdeles } \frac{dx}{\sqrt{z}} = -\frac{2cdy}{y^2 + cG}, \text{ hvilket paa samme Maade,}$$

$$\text{som før, kan opløses i to logarithmiske Integraller, saa man faaer } -\frac{dt}{c}$$

$$= \frac{I}{y + \sqrt{y^2 + cG}} + \frac{I}{y - \sqrt{y^2 + cG}}. \text{ Og } -\frac{t}{c} = \text{Log. } \frac{y - \sqrt{y^2 + cG}}{y + \sqrt{y^2 + cG}}$$

en Størrelse, som altid er imaginær, fordi c og G ere bekræftende Størrelser.

§. 238.

Da derfor dette Slags Integraller, saa tidt som de ere imaginære, i Henseende til den logarithmiske Linie, have en virkelig Værdie i Henseende til Cirkel-Linien, ville vi integrere ved Hielp af denne sidste. Er da (Taf. XI. Fig. 8.) BA en Cirkel-Bue, hvis Element er $ab = ds$, cd Elementet af Tangenten $= dx$, og saaledes $Ad = x$. Da er, om Halv-Diameteren $cA = r$, $ab = ds$

$$= \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2} \text{ og } \int \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2} = \text{Buen } Ab. \text{ Om } r = 1, \text{ er } ds = \frac{dx}{1+x^2}.$$

For nu at bringe $\frac{dy}{y^2 + cG}$ til samme Form kan agtes. At $\frac{dy}{y^2 + cG}$

$$= \frac{1}{cG} \frac{dy}{\frac{y^2}{cG} + 1}. \text{ Saa } x^2 = \frac{y^2}{cG}, \text{ og } x = \frac{y}{\sqrt{cG}}. \text{ Men da bli-$$

ver Elementet af Buen, hvis Halv-Diameter $= 1 = \frac{dy\sqrt{cG}}{y^2 + cG}$, og

$\int \frac{dy \sqrt{cG}}{y^2 + cG}$ er Buen Ab , hvis Tangent eller Nære-Linie er Ad .

Følgelig bliver $\frac{1}{\sqrt{cG}} \int \frac{dy \sqrt{cG}}{y^2 + cG} = \frac{1}{\sqrt{cG}}$ B. T. Ad . (ved B. T. Ad .

forstaaes Buen, hvis Tangent er Ad .) Derfor bliver $\frac{-2c}{\sqrt{cG}}$ B. T. Ad

$$+ B = \int \frac{-2c dy}{y^2 + cG} = t.$$

Sættes i Steden for y dens Værdie $\sqrt{av - cG}$. I Steden

for v dens Værdie $e^{-\frac{x}{c}}$, og saaledes i Steden for y , $\sqrt{\frac{-x}{ae^{-\frac{x}{c}}} - cG}$.

Da bliver, Tang. $\frac{y}{\sqrt{cG}} = \text{Tang.} \frac{\sqrt{\frac{-x}{ae^{-\frac{x}{c}}} - cG}}{\sqrt{cG}}$, og

$$t = -\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \text{B. Tang.} \frac{\sqrt{\frac{-x}{ae^{-\frac{x}{c}}} - cG}}{\sqrt{cG}} + B. \text{ Men}$$

$B = \text{B. T.} \frac{\sqrt{a - cG}}{\sqrt{cG}} \cdot \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} = \text{B. Tang.} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{cG}} \cdot \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}$, fordi $a = A$
 $+ cG$, §. 237, saa den hele Tid, hvori at Tingen stiger til den
 ubestemte Høide x , bliver $2\sqrt{\frac{c}{G}} \cdot \text{B. T.} \sqrt{\frac{A}{cG}}$

$$- 2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{B. T.} \frac{\sqrt{\frac{-x}{ae^{-\frac{x}{c}}} - cG}}{\sqrt{cG}}.$$

§. 239.

Den største Høide, hvortil et Legeme i dette Tilfælde kan stige,
 er

er $c \text{ Log. } \frac{A+cG}{cG}$, §. 235. saa at i det $\frac{-x}{ae} = \frac{-\text{Log. } \frac{A+cG}{cG}}{ae}$.

Men $\text{Log. } \frac{A+cG}{cG} = -\text{Log. } \frac{A+cG}{cG} = \text{Log. } \frac{cG}{A+cG}$.

Derfor bliver og $\frac{A+cG}{cG} = \frac{cG}{A+cG}$. Hvoraf faaes videre

den hele Tid af Stigningen, indtil Hastigheden ganske er tabt,

$$= 2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{ B. T. } \sqrt{\frac{A}{cG}} - 2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{ B. T. } \sqrt{\left(\frac{acG}{A+cG} - cG\right)} \sqrt{cG}.$$

Men da $a = A + cG$ er $\frac{acG}{A+cG} - cG = 0$. Følgelig bliver

den hele Tid, hvori Legemet stiger $= 2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{ B. T. } \sqrt{\frac{A}{cG}}$.

§. 240.

Følgelig bliver Tiden af Stigningen altid endelig, endog i det Tilfælde, da Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen var uendelig. Den er altid endelig.

for. Thi $2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{ B. T. } \sqrt{\infty} = 2\sqrt{\frac{c}{G}} \text{ B. T. } 90^\circ$.

§. 241.

Man kan derfor altid bestemme Tiden, hvori saavel de med en vis given Hastighed udkastede Legemer stige, som falde, naar Hastigheden, hvormed de kastes ud, er bekendt. Ligesom man og i samme Hypothese, i Følge de forrige Egheder, baade kan bestemme det igiennemløbne Rum, og af dette igjen Hastigheden. Imidlertid er det altid ulige lettere at finde Tiden af den hele Bevægelsen nemlig, hvori de udkastede Ting baade stige og falde, end Hastigheden selv, hvormed de kastes ud. Saa det derfor er en Sag af

Al den givne hele Tid, udi hvilken et Legeme saavel stiger som falder, at bestemme det Rum, det igiennemløber, af den igjen Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen, og endelig de enkelte Tider af

Stigningen og nogen Værdighed at vise, hvorledes af den hele Bevægelses-Tid, naar samme antages som given, saavel de enkelte Tider af Stigningen og Faldet, som Hastigheden, Tingen kastes ud med, og Høiden, hvortil den stiger, kunde findes.

Kaldes da den hele Tid af Bevægelsen T. Den søgte Høide AB, x. Da bliver efter hvad i det foregaaende allerede er bleven

beviist, Tiden af den hele Stigning $= 2\sqrt{\frac{c}{G}} B. T. \sqrt{\frac{A}{cG}}$. Og

Tiden af Faldet $= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \cdot 2 \text{Log.} \left(\sqrt{\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}}} - 1 + \sqrt{\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}}} \right)$ §. 239

og 229. Derfor bliver $T = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} (B. T. \sqrt{\frac{A}{cG}} + \text{Log.} \left(\sqrt{\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}}} - 1 + \sqrt{\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}}} \right))$. Men da $x = c L. \frac{A+cG}{cG}$ §. 235. Og følgelig $\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}}$

$= \text{Log.} \frac{A+cG}{cG} = \frac{A+cG}{cG}$. Saa bliver $\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}} - 1 = \frac{A}{cG}$, og

Tang. $\sqrt{\frac{A}{cG}} = \text{Tang.} \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}} - 1 \right)$, og derfor atter igien

$T = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} (B. T. \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}} - 1 \right) + \text{Log.} \left(\sqrt{\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}} - 1} + \sqrt{\frac{x}{e^{\frac{x}{c}}}} \right))$.

i hvilken Lighed, da c og G ere bekiendte Størrelser, og saavel Buen, som de exponentielle og logarithmiske Størrelser, kunde opløses i uendelige Følger. Saa kan man altid bestemme x, hvad heller man vil paa denne eller paa andre Maader, hvorved man nærmer sig til den ube-kiendtes Værdie. Men er x given, da er Hastigheden tillige given, og ved dens Hielp igien de enkelte Tider; saavel den, hvorudi Tingen stiger, som den, hvorudi samme falder ned igien.

§. 242.

Disse Udregninger forforktes anseelig, naar man kan antage c Samme be-
 som en meget stor Sterrelse imod x , hvilken Hypothese nogenlunde stemmes paa en
 gaaer an udi Lusten. Thi man behøver alene at undersøge, hvad saavel meger let Maas-
 Tiden af Stigningen, som Tiden af Faldet da blive, for at sam- de, naar Faldet
 menligne dem med den givne og bekendte Sterrelse T . steer i meget
 tynde flydende
 Materier.

Tiden af Faldet ned efter bestemmes saaledes. Den er §. 229

$$= \sqrt{\frac{c}{g}} \left(\frac{x}{c} + 2 \text{Log.} \sqrt{\frac{-x}{1 - e^{\frac{-x}{c}}}} + 1 \right) \text{ og da } \text{Log. } 1 + x$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \text{ o. s. v. saa er L. } \left(\sqrt{\frac{-x}{1 - e^{\frac{-x}{c}}}} + 1 \right)$$

$$= \sqrt{\frac{-x}{1 - e^{\frac{-x}{c}}}} - \frac{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)}{2} + \frac{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \dots \text{ o. s. v.}$$

Fremdeles da $e^{\frac{-x}{c}} = 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \dots \text{ o. s. v.}$ saa bli-

ver $1 - e^{\frac{-x}{c}} = \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3}$, og $\sqrt{\frac{-x}{1 - e^{\frac{-x}{c}}}}$

$$= \sqrt{\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3}}, \text{ hvilken Quadratkod om trekkes ud efter}$$

de sædvanlige Regler faaes $\sqrt{\frac{-x}{1 - e^{\frac{-x}{c}}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x\sqrt{x}}{4c\sqrt{c}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{12c^2\sqrt{c}}$

$$- \frac{x^2\sqrt{x}}{c^2\sqrt{c}} + \dots \text{ o. s. v.} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x\sqrt{x}}{4c\sqrt{c}} + \frac{5x^2\sqrt{x}}{96c^2\sqrt{c}} - \dots \text{ o. s. v.}$$

Indsættes dette i de første Led af $\text{Log.} \left(\sqrt{\frac{-x}{1 - e^{\frac{-x}{c}}}} + 1 \right)$

=

$$= \sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{c}}) - \frac{1}{2} + e^{\frac{-x}{c}} - \frac{1}{2}} + \text{o. s. v. og af dem samlig}$$

alle de samles, som ei overgaar en vis given Høide, som for Ex. den

Høide $\frac{x}{2}$. Da faaes Log. $(\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}} + 1}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x}{2c}$

$$+ \frac{x\sqrt{x}}{12c\sqrt{c}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{480c^2\sqrt{c}}. \text{ Følgelig bliver Tiden af Faldet ned efter}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}}.$$

Man kan heraf strax finde Tiden, hvori en udkastet Ting stiger, naar c ansees som overmaade stor imod x , saaledes som vi i det foregaaende have antaget den at være i de meget tunge Tings Bevægelse udi Luftten. Thi Tiden er den samme, hvad heller at et Legeme bevæger sig op eller ned efter, naar i begge Tilfælde Kræfterne ellers virke paa samme Maade efter en Direktion. Fordi intet er klarere, end at i den Tid, da et Legeme, som stiger til en vis Høide op efter, miste sin Hastighed ved Tyngdens og det Flydendes forenede Modstand, samme Legeme drevet ned efter af begge disse Kræfter forenede, jo i samme Tid og igiennem samme Høide maa igjen vinde denne selvsamme Hastighed, saa at begge Betragtninger derfor løbe ud paa et. Antages da saavel Tyngden som det Flydendes Modstand begge at virke, i det Legemet falder ned efter, da bør alene c forandres til en negtende Størrelse. Thi drive begge ned efter, bliver Ligheden, som forklarer

$$\text{Bevægelsen, } (G + \frac{z^m}{c^m})dx = dz. \text{ Men den §. 222.}$$

$$(\frac{z^m}{c^m})dx = dz, \text{ forandres til den første, ved at sætte } c \text{ negtende eller } = -c.$$

Følge.

Følgelig kan man og, alene ved at sætte $c = -c$, betiene sig af den forrige Værdie af Tiden $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}}$, siden Tiden, hvori over den Høide x Hastigheden tabes, er den samme som den, hvori den paa den nylig forklarte Maade vindes, imidlertid at den tabte og vundne Hastighed i begge Tilfælde altid bliver den, som tabes ved at stige igiennem x . Derfor bliver Tiden, hvori Legemet stiger, $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} - \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}} - + o. s. v.$ og begge Tiderne sammenlagte, saavel nemlig den, hvori Legemet stiger, som den, hvori det falder, eller $T = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}} + + o. s. v.$

§. 243.

Denne Oplosnings-Maade er i disse ellers vidtledige og vanskelige Udregninger den allerletteste. Men man maa vel agte, at den Høide, hvortil den udkastede Ting stiger, eller x , maa være saa meget mindre, som ferre af de første Leed i Righeden $T = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{G}}$ o. s. beholdes. For Resten seer man, at naar x er funden, er Hastigheden, som tabes over x , følgelig den, hvormed Tingen blev i Begyndelsen udkastet, ligeledes funden. Hvoraf da videre de enkelte Tider findes §. 239. 230.

Fjerde Tilfælde.

Om den retlineede Bevægelse igiennem flydende Materier, som ei ere overalt lige tykke.

§. 244.

Vi have i det foregaaende betragtet de flydende Materier, igiennem hvilke Bevægelsen skede, som de der vare overalt af ensdan Bevægelsens almindelige Bestemmelse i flydende Tykkelse.

dende Materier, fælle.
som ei ere over-
alt lige tykke.

Imidlertid gielder denne Hypothese ikke fuldkommen udi Luftten, siden dette flydende Væsen af utallige Marsager kan blive i alle sine horizontale Lav snart tykkere, snart tyndere, saa det ikke er den mindste Vanskelighed, i disse Henseende at bestemme, efter hvad Lov Tykkelsen i Luftten tager af: Endskient at det endnu altid blev uvisst, hvorsvidt Udrengningen blev muelig, naar disse Naturens Love vare os virkelig bekiendte. Det vi derfor her have at afhandle, er alene, i Almindelighed at vise, hvorledes i deslige Tilfælde Udrengningerne kunde gieres. Saaledes, om man antager, at Tykkelsen og dens Modstand tager af eller til efter Distancerne fra et vist frit Punkt A, og at Modstanden desuden er proportionert den Heide z^m af Hastigheden. Vil man da, som før, bestemme den absolute Modstand af den Hastighed, med hvilken, naar Tingene bevæger sig, Modstandens virkelige Kræfter i et flydende Væsen af en vis given Tykkelse bliver saa stor som Tyngden, og man kalder, som før, (Fig. 7.) Heiden, der svarer til Hastigheden c , Ab , x , den ubestemte Hastighed udi b , z , da blev, om den naturlige Tyngde $= 1$, og Tykkelsen i det flydende overalt var den samme, Modstanden $= \frac{z^m}{c^m}$. Men siden den nu er foranderlig, og som vi her ville antage det efter Distancen fra A, maa c^m være til x^m i en vis given Forhold, hvilken vi ville sætte at være den af $1 : a$, saa $c^m = ax^m$, og den hele Modstand bliver $= \frac{z^m}{ax^m}$.

Dette forudsat, bestemmes de almindelige Ligheder for Bevægelsen ligesom udi de forrige Tilfælde. Thi man faaer

1) For

- 1) For det Tilfælde, da Tingene falde ned efter, $(G - \frac{z^m}{ax^m})dx = -dz$, fordi x idelig tager af.
- 2) For det Tilfælde, da de stige, $(G + \frac{z^m}{ax^m})dx = -dz$.

§. 245.

Sættes $m = 1$ eller Modstanden Quadraten af Hastighe- Dens særbeles
 derne proportionert; da, om Tingene falde ned efter, bliver Bestemmelse,
 $(G - \frac{z}{ax})dx = -dz$. Sættes G at være en bestandig og alle- naar Modstan-
 tider ensdan virkende Kraft, kunne de ubekiendte saavel i denne den er som Qua-
 draten af Hastig- heden.

Lighed, som i den almindelige $(G - \frac{z^m}{ax^m})dx = -dz$
 ffilles fra hinanden ved at sætte $z = xy$. Da man derved forandrer

den Lighed $(G - \frac{z}{ax})dx = -dz$ til denne anden $-(aG - y)dx$
 $= axdy + aydx$ eller $\frac{dx}{x} = \frac{-ady}{aG + (a-1)y}$, hvoraf Integralen

er $\text{Log. } x = \frac{a}{1-a} \text{Log. } (1-a)y - aG + B$. B bestemmes der-

af, at i Begyndelsen af Faldet, naar $x = C$, er $z = 0$, selgelig
 og $y = 0$, hvoraf faaes $B = \text{Log. } C - \frac{a}{1-a} \text{Log. } -aG$. Sæt-

tes i Ligheden $\text{Log. } x = \frac{a}{1-a} \text{I. } (1-a)y - aG + B$ derfor $\frac{z}{x} = y$.

Da faaes $\text{Log. } x = \frac{a}{1-a} \text{Log. } (1-a) \frac{z}{x} - aG + \text{Log. } C$
 $- \frac{a}{1-a} \text{Log. } -aG$ eller $\text{Log. } \frac{x}{C} = \frac{a}{1-a} \text{Log. } \frac{(a-1)z + aGx}{aGx}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Dg ſølgelig bliver } \left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{1-a}{a}} &= \frac{(a-1)z + aGx}{aGx}, \text{ eller} \\
 z &= \frac{aGx}{a-1} \left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{1-a}{a}} - 1 = \frac{aG}{a-1} \cdot \frac{\left(\frac{a-1}{C^a} - x^{\frac{a-1}{a}}\right)}{-\frac{1}{x^a}} \\
 &= \frac{aG}{a-1} \left(\frac{a-1}{C^a} \frac{1}{x^a} - x\right).
 \end{aligned}$$

§. 246.

Hafſtigheden funden, findes Tiden, eller $\int \frac{dx}{aG \left(\frac{a-1}{C^a} \cdot \frac{1}{x^a} - x \right)}$

og i Henſeende til Hafſtigheden ſelv kan ydermere agtes, at naar $x=0$, er den og $=0$. Saa den ei alene er i B, men endog i $A=0$, thi Modſtanden bliver virkelig uendelig, ſaa tidt ſom $x=0$, ſordi den er efter det forhen ſagte $\frac{z^m}{ax^m} = \frac{1}{0} = \infty$.

Deraf ſees ligeledes, at i Almindelighed, ſaa tidt ſom Tingene bevæge ſig op efter fra A imod B, maa Hafſtigheden i Begyndelſen af Bevægelsen altid være uendelig ſtor. I øvrigt ſees let, at den Tilfælde, da Tingene ſtige, bringes paa den forrige, ved at forandre a til $-a$, thi derved bliver den ſidſte Lighed §. 244. forvandlet til den forſte.

§. 247.

Det Punkt be-
ſtemmes, udi
hvilket at Ha-

Imellem A og B maa være et Punkt, udi hvilket Hafſtigheden er ſterſt, hvis Kiende-Tegn er, at Hafſtigheden z , der hverken voxer eller

eller tager af, eller $dz = 0$. Da derfor $(G - \frac{z}{ax})(dx = -dz)$ Ligheden er
 størst.

bliver $Gax = z$, og derfor $Gax = \frac{aG}{a-1} (C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}} - x)$ eller

$$ax = C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}}, \text{ eller } a^a x^{a-1} = C^{a-1}, \text{ og f\u00e6lgelig } x = \frac{C}{a^{a-1}}.$$

§. 248.

Vi kunde saavel i dette Tilfælde, som i flere Hypotheser af samme Slags, anfere en heel Deel andre Udrengninger og Anmerkninger, men da de samtlig ere af ingen betydelig Nytte, fordi de Love i Naturen endnu ikke ere bekjendte, hvilke tilf\u00e6ndegive den sande Modstand i deslige flydende Materier, saa ville vi derved ikke opholde os. Et eneste kan man endnu kortelig i Henseende til det foregaaende agte, at det ene Tilfælde, da $a = 1$ ikke indbefattes i de integrerte Ligheder, siden man da kommer paa en V\u00e6rdie, som intet videre viser, end at man af Differential-Ligheden maa s\u00f8ge V\u00e6rdien. Da man faaer i den forrige Lighed §. 245. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{G}$, eller $G \text{ Log. } \frac{x}{C} = y + B$. Men $B = G \text{ Log. } C$, f\u00e6lgelig er $y = G \text{ Log. } \frac{C}{x}$ og $z = Gx \text{ Log. } \frac{C}{x}$, fordi $y = \frac{z}{x}$.

S\u00f8ges i dette Tilfælde den Distance fra B, som svarer til den største Hastighed, da fordi $a = 1$, bliver §. 245. $Gx = z$, naar $dz = 0$. Og saaledes $Gx = Gx \text{ Log. } \frac{C}{x}$, eller $1 = \text{Log. } \frac{C}{x}$ eller $e = \frac{C}{x}$, f\u00e6lgelig $x = \frac{C}{e}$.

Femte Tilfælde.

Om den retlinebe Bevægelse i flydende Materier, i sær i den, som
 staae overalt ensdan imod, saa tidt som Tingene tillige
 drives af Kræfter, der søge imod et vist Punkt.

§. 249.

Bevægelsens af-
 mindelige Be-
 stemmelse, naar
 Kræfterne ere
 centrale.

Dersom man i dette Tilfælde, ligesom i nest forrige, antager
 Tykkelsen af den flydende Materie, for at være adskillig i de adskillige
 horizontale Lag, og selgelig at tage af eller til i en vis Forhold af
 Distancen fra et vist givet Punkt A, og $Ab = x$. Da kan den
 Hastighed, imod hvilken det Flydendes Modstand er saa stor som
 Tyngden, ei være i alle Lag af en saadan flydende Materie den sam-
 me, men den maa nødvendig beroe paa Distancen, og være en Funk-
 tion af x , og bestandige Størrelser, efter hvad Hypothese, som man
 selv vil formere. Tilkiendegives den derfor i Almindelighed ved
 $\sqrt{Fx}$, og Modstanden antages desuden overalt at stee efter den Heide
 2^m af Hastigheden, da bliver Modstanden i $b = \frac{z^m}{(Fx)^m}$, naar,
 som før, den til Hastigheden udi b svarende Heide $= z$.

Kaldes da Central-Kraften imod A i Almindelighed K, da
 faaes

$$1) \text{ Om Tingen falder ned efter imod A, } dz = \left(P - \frac{z^m}{(Fx)^m} \right) - dx.$$

$$2) \text{ Om Tingen stiger fra A op imod B, } dz = \left(-P - \frac{z^m}{(Fx)^m} \right) dx;$$

af hvilke Ligheder den sidste strax udledes af den første, ved
 at sætte $-(Fx)^m$ i Steden for Fx^m .

§. 250.

§. 250.

Er i disse Ligheder $m = 1$, da bliver $(-P + \frac{z}{Fx})dx = dz$, Dens særdeles Bestemmelse,
 eller om $Fx = F$, er $(\frac{z}{F} - P)dx = dz$. Og saaledes $Pdx = -dz$ naar Modstan-
 $+ z \frac{dx}{F}$. den er sem Qua-
 For at fælle de ubekjendte fra hverandre, behøves at $-dz$ draten af Qua-
 $+ z \frac{dx}{F}$ saaledes maa multipliceres med en antagen Størrelse S , at stigheden.

$SPdx$ desuagtet ikke bliver uden en Funktion af x , og $\int (-dz + z \frac{dx}{F})S$
 en integrabel Størrelse, som er en Funktion af x og z i v . Men
 skal $-dz + z \frac{dx}{F}$ gøres integrabel, maa $-dz$ multipliceres med
 en Størrelse S , hvis Differential er $\frac{dx}{F}S$, siden Ligheden $SPdx$
 $= -Sdz + Sz \frac{dx}{F}$ ellers ikke kan vedligeholdes, og en saadan
 Størrelse er $\int \frac{dx}{F}$, naar ved e forstaaes det Tak, hvis hyperbolske

Logarithmus $= 1$, saa bliver $-SPdx = Sdz - Sz \frac{dx}{F}$ forandret

til $-e^{\int \frac{dx}{F}} \cdot Pdx = e^{\int \frac{dx}{F}} dz - \frac{e^{\int \frac{dx}{F}} z dx}{F}$, hvis Integral er

$\int -Pdx \cdot e^{\int \frac{dx}{F}} = e^{\int \frac{dx}{F}} z$, og $z = \frac{\int -Pdx \cdot e^{\int \frac{dx}{F}} + B}{e^{\int \frac{dx}{F}}}$, i

hvilken Lighed de ubekjendte ere adskilte, og det sidste Led er alene en
 Funktion af x og dx . B bestemmes af det, hvad Ligheden bliver,

naar

naar $z = 0$ og $x = C$, som før §. 245, og man kan her giøre ligedanne Anmerkninger, som de førhen giorte i nest forrige Tilfælde.

§. 251.

Og Central-
Kraften er pro-
portionert en gi-
ven Høide af
Distancen fra
Krafternes Cen-
ter.

Skönt de særligere og meer bestemte Egenskaber ikke ere i Brugen af Uinvendelsen af umistelig Vigtighed, ville vi dog endnu vise Maa- den at giøre dette Slags Undersegninger paa i det Tilfælde, da Central-Kraften er næiere bestemt, nemlig, som en vis given Høide af Distancen fra Krafternes Centers og den flydende Materies Mod- stand antages, som §. 250, at være i bestandig Forhold af Quadra- ten af Distancen, imidlertid at den flydende Materie selv ligeledes an- sees som at være i alle sine Lag lige tyk. Kaldes den naturlige Tyng- de 1 , den Distance, hvori at Central-Kraften er saa stor som samme, r , og Høiden af Distancen n , da bliver, om $Ab = x$, $r^n : 1 = x^n :$ $\frac{x^n}{r^n}$, hvilket er den centrale Krafts virkelige Størrelse udi b . Og de førhen §. 249 givne Egenskaber forandres saaledes :

1) Naar Faldet skeer ned imod Centret A , bliver dz

$$= \left(\frac{x^n}{r^n} - \frac{z}{c} \right) - dx, \text{ hvor } c \text{ betyder, som før, Høiden til den Hastighed, imod hvilken det Flydendes Modstand er saa stor som Tyngden.}$$

2) Gaaer Bevægelsen derimod op efter, bliver $\left(\frac{x^n}{r^n} + \frac{z}{c} \right) dx$

$$= -dz, \text{ fordi Hastigheden idelig tager af. Hvilke Eeg- der kunde, ligesom før, den ene udledes af den anden, alene derved, at } + c \text{ forandres til } - c.$$

§. 252.

§. 252.

Da derfor i den almindelige Lighed §. 250 blev $e^{\int -\frac{dx}{F}}$ I dette Tilfælde bestemmes Hastigheden saavel i Bevægelsen op ad som ned efter.

$z = \int -P dx e^{\int -\frac{dx}{F}} + B$, saa bliver i dette særlige Tilfælde for Fald

det ned efter $z = \int -\frac{x^n}{r^n} dx e^{\frac{-x}{c}} = e^{\frac{-x}{c}} \left(\int -\frac{x^n}{r^n} e^{\frac{-x}{c}} dx + B \right)$

$\frac{-x}{c}$

Ligeledes bliver for Bevægelsen op efter z

$$z = e^{\frac{-x}{c}} \left(\int -\frac{x^n}{r^n} e^{\frac{-x}{c}} dx + B \right)$$

Da $\int x^n e^{\frac{-x}{c}} dx$ integreret ved tillagte Stykker $= e^{\frac{-x}{c}}$.

$$\left(\frac{x^n}{g} - \frac{nx^{n-1}}{g^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{g^3} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{g^4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}{g^5} - + o. s. v. + B \right) \text{ saa sees, at}$$

denne uendelige Følge, hvis Fortgangs-Lov let sees, altid brykker af, saa tidt som n er et heelt og bekræftende Tal, da den kommer alene til at bestaae af et Leed meer end der er Uniteter udi n . Følgelig kan

z eller $e^{\frac{-x}{c}} \int -\frac{x^n}{r^n} e^{\frac{-x}{c}} dx$ i alle disse Tilfælde ligeledes integreres,

$$\text{man faaer nemlig } z = e^{\frac{-x}{c}} \left(\int -\frac{x^n}{r^n} e^{\frac{-x}{c}} dx + B \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r^n} (x^n e^{\frac{-x}{c}} - nx^{n-1} e^{\frac{-x}{c}} + n(n-1)x^{n-2} e^{\frac{-x}{c}} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} e^{\frac{-x}{c}} + \dots) + B \right)$$

$\frac{-x}{n-2} \cdot x^n - 3c^4 + \dots$ o. s. v.) + B) $c^{\frac{-x}{c}}$, naar nemlig i Steden
for g sættes $\frac{1}{c}$, som dette Exempel det udkræver.

§. 253.

Tre Kræfterne
Distancen fra
Centret propor-
tionerte, bliver
dog derfor ikke i
Bevægelsen
igiennem fly-
dende Materier
Tiderne af Fald-
det til Centret
isøfkrone.

Man kan derfor heraf udlede en Mængde Tilfælde, som alle
blive integrable. Vi ville iblant dem samlig her ikke opholde os uden
et eneste, det nemlig, da $n = 1$ og $z = -\frac{1}{r}(xc - c^2)$
Hvoraf flyder, at $dt = \frac{dx}{\sqrt{Be^{\frac{-x}{c}} - \frac{1}{r}(xc - c^2)}}$

Og selgelig; at Tiden af Faldet altid kommer til at beroe paa Distancen fra Centret, saa den artige Egenskab her taber sig, som vi forhen have beviist, at havde Sted i den frie Bevægelse, §. 22. at nemlig Tiden af Faldet i denne Kræfternes Hypothese altid var den samme, hvad heller at Begyndelsen af det ske i større eller i mindre Distancer fra Kræfternes Center.

§. 254.

Den Central-
Kraft, som der-
imod dertil ud-
fordres, bestem-
mes.

Men endskjont at denne Egenskab ei tilkommer den Hypothese af Kræfterne, naar de nemlig sættes at være som Distancen fra Centret; maa der dog desuagtet være en anden, i hvilken at samme haver Sted, endskjont at den flydende Materie yttre en Modstand, der altid er Quadraten af Hastigheden proportionert. Vi ville kortelig undersøge, hvad Kræfternes Lov i dette Tilfælde her være. Til den Ende ville

vi igien foretage den almindelige Eighed §. 250.

$$z = \frac{\int -P dx \cdot e^{\int -\frac{dx}{F}} + B}{e^{\int -\frac{dx}{F}}}. \quad \text{Fremdeles ville vi, for at have}$$

lettere Benævninger, sætte $\int P dx \cdot e^{\int -\frac{dx}{F}} = x$, da man derved
 faaer $z = \frac{B-x}{e^{\int -\frac{dx}{F}}}$, eller $z = e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)$.

§. 255.

Sæges deraf Tiden, da fordi $dt = \frac{dx}{\sqrt{z}}$, bliver

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)}} = a, \quad \text{ved } a \text{ forstaaes en bestandig Stør}$$

relse; thi i Følge Spørgsmaalets Natur bør Tiden af Faldet være altid

den samme. Følgelig beroer alt paa, at indrette $\frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)}}$

saaledes, at Integralet, i hvormeget end at B og x eller x forandres, desuagtet bliver for den hele Tid en bestandig Sterrelse. Men dette

faaes ved at sætte $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{F}}} = \frac{b dx}{\sqrt{x}}$. Saa man faaer

$$\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)} = \frac{b dx}{\sqrt{Bx - xx}} \quad \text{og} \quad t = \int \frac{b dx}{\sqrt{Bx - xx}}, \quad \text{men}$$

$\int \frac{\frac{1}{2}Bdx}{\sqrt{Bx-xx}}$ er en Cirkel = Bue, hvis Abscisse er x , eller

$\int -Pdx.e^{\int \frac{dx}{F}}$ og Diametern B ; og som derfor for den hele Bevægelse, naar $B = x$ forandres til Cirkelns halve Peripherie, hvis Diameter er den bestandige Størrelse B , saa den hele Tid af Faldet beleber sig til $\frac{b}{2B} \int \frac{\frac{1}{2}Bdx}{\sqrt{Bx-xx}} = \frac{bp}{2}$, naar Forholden af Diametern til Peripherien er den af $1 : p$.

Da saaledes Betingningerne af Spørgsmaalet ere blevne fyldestgjorte, er der ingen Vanskelighed meer i at bestemme Central-Kraften selv.

Næi da $\frac{dx}{\int \frac{dx}{F}} = \frac{b dx}{\sqrt{x}}$, saa bliver $\frac{dx}{\sqrt{\int \frac{dx}{F}}} = 2b\sqrt{x}$

$$= 2b\sqrt{\int \frac{dx}{Pdx.e^{\int \frac{dx}{F}}}}, \text{ og derfor } \left(\frac{dx}{\sqrt{\int \frac{dx}{F}}} \right)^2$$

$$= 4b^2 \cdot \left(\int Pdx.e^{-\int \frac{dx}{F}} \right). \text{ Tager man deraf igien Differentialer-}$$

ne, faaes $\frac{2dx}{\int \frac{dx}{2F}} \int \frac{dx}{\int \frac{dx}{2F}} = 4b^2 \cdot Pdx.e^{-\int \frac{dx}{F}}$, hvoraf endelig findes

$$P = \frac{e^{\int \frac{dx}{2F}}}{2b^2} \int \frac{dx}{\int \frac{dx}{2F}}.$$

§. 256.

Sættes i denne Lighed F at være en bestandig Størrelse $= c$, Men den er i
 hvilket haver Sted, saa tidt som Tykkelsen af den flydende Materie Naturen ikke
 lettelig umkelig.
 er overalt den samme. Da bliver $\int \frac{dx}{2F}$ integrabel $= \frac{x}{2F}$ og

$$P = \frac{c}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2F}}} = \frac{c}{2b^2} \cdot \frac{x}{e^{\frac{x}{2F}}} - 2F \cdot e^{-\frac{x}{2F}}, \text{ eller}$$

$$P = \frac{c}{2b^2} (2F - F e^{-\frac{x}{2F}}), \text{ eller } P = \frac{F}{b^2} (e^{\frac{x}{2F}} - 1)$$

$= \frac{c}{b^2} (e^{\frac{x}{2c}} - 1)$. Hvoraf sees, at naar for det hele Fald $x = 0$
 bliver $P = 0$, saa i Kræfternes Center selv Kræften plat skulde for-
 svinde, hvilken Hypothese ikke stemmer med Naturen.

Anden Afdeeling.

Om den krumlinede Bevægelse igennem flydende
 Materier, som staae tmod og ere
 overalt ensdanne.

I.

Naar Kræfternes Direktioner ere parallelle.

§. 257.

Den krumlinede Bevægelse, saaledes som den er blevet afhand- Almindelige Kræ-
 let i den almindelige Theorie for Central-Kræfterne §. 158. o. f. gler for den
 krumlinede Be- roer

bevægelse i flyden, roer paa de selsomme almindelige Betragtninger, som de vi her have de Materier, at giøre. Saa tidt nemlig, som den krumlinede Bevægelse skal have som staar imod.

Sted, udfordres altid en Hastighed efter Tangenten og desuden en anden Kraft, hvis Direktion er ikke i Tangenten. Vi ville her alene betragte denne sidste Kraft, for saavidt som at den er central, fordi andre Hypoteser ikke ere naturlige. Og iblant de centrale Kræfter igjen i Særdeleshed det Slags, som altid er bestandig i sin Virkning, saaledes som Tyngden hos os. Thi man kommer i de andre Hypoteser ikke stort videre end til differentielle Ligheder, hvilke ikke kunde integreres, men alene opløses enten ved de uendelige Felger eller ved krumme Liniers Beskrivning, saa Nytten ikke er betydelig.

§. 258.

Følger man da her den §. 158 o. f. forhen lagte Plan, saa sees strax, at den hele Central-Kraft K bør betragtes som opløst udi to andre, en som driver hen efter Tangenten, og en anden, som er perpendicular paa den krumme Linie, eller paa Tangenten udi Næres Punktet. Vedligeholdes fremdeles de samme Benævninger, som §. 158. o. f. da bliver

$$1) \text{ Tangential-Kraften} = \frac{Kdy}{ds}.$$

$$2) \text{ Normal-Kraften} = \frac{Kdx}{ds}.$$

§. 259.

Af disse Kræfter er det alene den første, som den flydende Materies Modstand forandrer, siden Legemet bevæger sig altid efter Tangenten med sin hele Hastighed. Kaldes derfor den flydende Materies

Mod-

Modstand R , da bliver Tangential-Kraften i dette Tilfælde $= \frac{K dy}{ds}$

— R . Hvoraf følger paa samme Maade som før §. 158.

1) At Ligheden for Tangential-Kraften bliver i Almindelighed

$$(K \frac{dy}{ds} - R) ds = v dv = dz, \text{ naar ved } z \text{ forstaaes den}$$

Heide, som overalt svarer til den ubestemte Hastighed v .

2) Derimod bliver Ligheden for Normal-Kraften fuldkommen,

$$\text{som §. 158, } K r dx = 2z ds, \text{ eller } K \frac{dx}{ds} = \frac{2z}{r}.$$

Af hvilke tvende Ligheder Differential-Ligheden til den krumme Linie
her bestemmes fast paa samme Maade som før §. 159 og 162.

§. 260.

Vi vilse opløse dette nærmere i den nyttigste Tilfælde, i den, Bevægelsens
da Central-Kraften er af bestandig Virkning; den flydende Materie almindelige Be-
overalt af samme Tykkelse; dens Modstand som Quadraten af Di- stammelse, naar
stancen forkeert, og Krafternes Center uendelig langt borte. Central-Kraft-
terne ere bestan-
Med dige.
saa Ord. Vi vilse særdeles betragte det Tilfælde, da Ting flydes
eller kastes ud i flydende Materier, som paa før sagte Maade staaer
imod, og drives ned efter af en bestandig Kraft, en saadan, som den
naturlige Tyngde.

Er i dette Tilfælde ALB (Taf. XI. Fig. 9.) den krumme Linie,
som det udkastede Legeme igiennemløber under Bevægelsen, da fore-
stille de rette Linier cD og EF , x , de paa dem perpendicularære cG
og EH , y . Ydermere er $K = G$, og den flydende Materies
Modstand $= \frac{z}{c}$, naar ved z forstaaes, som før, den Heide, der

svarer

svaerer til Hastigheden ubi E og c , Høiden, som svaerer til den Hastighed, med hvilken, naar et Legeme bevæger sig, det Flydendes Modstand bliver saa stor som den naturlige Tyngde.

Dette forudsat, forandres de to §. 259 givne Ligheder til disse andre.

$$1) \text{ For Tangential-Kraften } -Gdy - \frac{z}{c}ds = dz.$$

$$2) \text{ For Normal-Kraften } G\frac{dx}{ds} = \frac{2z}{r}. \text{ Sættes } dx \text{ bestandig, da}$$

$$\text{er } r = \frac{ds^3}{dxddy}, \text{ og derfor } \frac{Gdx}{ds} = 2z = -\frac{Gds^2}{ddy}, \text{ og}$$

$$G = -\frac{2zddy}{ds^2}.$$

§. 261.

Deemlig, saavel
i Henseende til
Hastigheden.

For at bestemme Hastigheden, behøves derfor intet andet, end at udvikle G ligeledes af Ligheden for Tangential-Kraften, da man

$$\text{faaer } G = -\frac{dz + \frac{z}{c}ds}{dy} = \frac{-2zddy}{ds^2}, \text{ og deraf igien}$$

$$cdz = \frac{2cddydy - zds^2}{ds^2}, \text{ eller } \frac{cdz}{z} = \frac{2cddydy - ds^2}{ds^2}.$$

Da nu dx er bleven taget som bestandig og $dy^2 + dx^2 = ds^2$,

$$\text{saar bliver } dsdds = dyddy, \text{ og } \frac{dz}{z} = -\frac{2dds - \frac{ds^2}{c}}{ds}. \text{ Følgelig}$$

$$\text{Log. } z = \int \frac{2dds}{ds} - \frac{s}{c}, \text{ eller } \text{Log. } z = 2 \text{ Log. } ds - \frac{s}{c}.$$

Men $\text{Log. } z$ er en endelig Forhold, da for at bringe det øvrige og dertil, faaes $\text{Log. } z = 2 \text{ Log. } ds - 2 \text{ Log. } \frac{dx}{c} - \frac{s}{c}$, eller

Log.

$$\text{Log. } z \frac{dx^2}{nds^2} = -\frac{s}{c}, \text{ fælgelig } \frac{z}{n} \frac{dx^2}{ds^2} = e^{-\frac{s^2}{c}} \text{ og}$$

$$\frac{z}{n} = \frac{ds^2}{dx^2} e^{-\frac{s^2}{c}}.$$

§. 262.

Er Hastigheden funden, findes Tiden paa den sædvanlige Maa: Som Tiden.

$$\text{de, man faar nemlig } dt = \frac{ds}{V_z} = \int \frac{dx \cdot e^{\frac{s^2}{2c}}}{V_n}.$$

§. 263.

Den krumme Linie selv bestemmes ligeledes. Thi

$$z = -\frac{nds^2}{s \cdot dx^2 \cdot e^c}, \text{ §. 261. og fordi at } G = -\frac{2zddy}{ds^2}, \text{ saa faaes}$$

$$z = -\frac{Gds^2}{2ddy}, \text{ fælgelig og } -\frac{n}{s \cdot dx^2 \cdot e^c} = -\frac{G}{2ddy}, \text{ og deraf igien}$$

Differential-
Ligheden be-
stemmes for den
krumme Linie,
som de udkastede
Ling beskæve i
flydende Mate-
rier, der staae
imod.

$2nddy = -G \cdot e^{\frac{s^2}{c}} dx^2$, som er den søgte Lighed til den krumme Linie: Thi da G sættes at være bestandig (eller, om man vil, en Funktion af y), saa indeholder denne Lighed intet andet end Linierne af den krumme Linie selv.

§. 264.

Opløser man denne Lighed ved Hielp af de uendelige Følger, da Den samme
seer man strax, hvad Skikkelse den uendelige Følge bør have deraf, at opløses videre, i

M m m

naar

fer, naar Mod: naar $c = \infty$, her Ligheden være $y = ax - \beta x^2$, folgelig maa
 standen er liden.

man sætte $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - \dots$ o. s. v. saa bliver
 $dy = a dx - 2\beta x dx - 3\gamma x^2 dx - 4\delta x^3 dx - \dots$ o. s. v. Og
 fordi dx ansees som bestandig, bliver $ddy = -2\beta dx^2 - 6\gamma x dx^2$
 $- 12\delta x^2 dx^2 - \dots$ o. s. v.

Gremdeles. Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$, bliver $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
 $= \sqrt{(dx^2 + a^2 dx^2 - 4a\beta x dx^2 + 4\beta^2 x^2 dx^2 - \dots)}$ o. s. v. Hvoraf,
 om Quadrat-Roden udtrekkes, faaes $ds = dx \cdot \sqrt{1+a^2} - \frac{2a\beta x dx}{\sqrt{1+a^2}}$
 $+ \dots$ o. s. v. saa at $\frac{s}{e^c} = \frac{(x\sqrt{1+a^2})}{e^c} - \frac{a\beta x^2}{c\sqrt{1+a^2}}$ o. s. v.
 fordi $s = x\sqrt{1+a^2} - \frac{a\beta x^2}{\sqrt{1+a^2}} + \dots$ o. s. v.

Da nu $\frac{s}{e^c} = 1 - \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2c^2} - \dots$ o. s. v., oplæser

man da den nyflig fundne Værdie af $e^{\frac{s}{c}}$ i sin uendelige Følge, faaes
 $\frac{s}{e^c} = 1 + \frac{x\sqrt{1+a^2}}{c} - \frac{a\beta x^2}{c\sqrt{1+a^2}} + \frac{x^2(1+a^2)}{2c^2} - \dots$ o. s. v.

Betruener man sig heraf i den foresatte Lighed $2nddy$
 $= -Ge^{\frac{s}{c}} dx^2$, under den Betingning, at x er en meget liden
 Størrelse imod c , og kaster derfor alle de Leed bort af Ligheden, i
 hvilke Heiden af x overgaaer Quadraten, da faaes $2n(2\beta + 6\gamma x$
 $+ 12\delta x^2) = G \cdot (1 + \frac{x\sqrt{1+a^2}}{c} - \frac{a\beta x^2}{c\sqrt{1+a^2}} + \frac{x^2(1+a^2)}{2c^2})$,
 som er en algebræisk Lighed, udi hvilken de ubekjendte Coefficienter
 eller midthjelpende Tal, a , β , γ , δ , maa bestemmes.

§. 265.

For at giere dette saa meget desto lettere, kan man udelade alle de Leed, som divideres ved c^2 ; fordi, naar x er meget liden, kunne de samtlige ansees som ubetydelige Størrelser, i det Tilfælde, da c er meget stor. Hvilken Hypothese nogenlunde kan antages i Henseende til Luft. Dette forudsat, faaes $G = 2n \cdot (2\beta + 6\gamma x + 12dx^2) \cdot (c\sqrt{1+a^2} - x(1+a^2) + \alpha\beta x^2) : c\sqrt{1+a^2}$. Eller fordi G er, i Følge Hypotesen, en bestandig Størrelse, bliver

$$0 = 4n\beta - \frac{4n\beta\sqrt{1+a^2}}{c}x + \frac{12n\gamma(1+a^2)x^2 + 4n\beta^2x^2}{c\sqrt{1+a^2}} + \frac{24ndx^2 \cdot c\sqrt{1+a^2}}{c\sqrt{1+a^2}}$$

Hvoraf videre findes:

$$1) \quad 4n\beta - G = 0 \text{ og } \beta = \frac{G}{4n}.$$

$$2) \quad 12n\gamma - \frac{G}{c}\sqrt{1+a^2} = 0 \text{ og } \gamma = \frac{G\sqrt{1+a^2}}{12nc}.$$

$$3) \quad 6dc\sqrt{1+a^2} - \frac{3G\sqrt{1+a^2}}{12nc}(1+a^2) + \frac{\alpha G^2}{16c^2}, \text{ og}$$

$$\delta = \frac{G(1+a^2)}{24nc^2} - \frac{\alpha G^2}{96n^2c\sqrt{1+a^2}}.$$

§. 266.

I disse saaledes fundne Værdier af β , γ , δ , er α endnu ubekendt. Men den bestemmes deraf, at siden Ligheden til den krumme Linie er, i Følge Hypotesen, $y = \alpha x - \beta x^2 - \dots$ o. s. v. og derfor $dy = \alpha dx - 2\beta x dx - \dots$ o. s. v. Da bliver, naar $x = 0$,

$$M m m \quad 2$$

$$dy =$$

$dy = adx$, og $\frac{dy}{dx} = a$. Men $\frac{dy}{dx}$ er Tangenten til den Vinkel Abg , som det udkastede Legeme gier i Udkastnings-Punktet A med Horizonten, og kan derfor altid ansees som bekiendt.

Ligeledes bestemmes den bestandige Sterrelse n af den Hastighed, hvormed Legemet er blevet skudt eller kastet ud udi A. Thi $z = \frac{nds^2}{dx^2} \cdot \frac{-s}{c}$, og, naar $s = 0$ er $z = \frac{nds^2}{dx^2} = \frac{n \cdot (a^2 + 1) dx^2}{dx^2} = n(a^2 + 1)$, saa i A er $z = C = n(a^2 + 1)$ og $n = \frac{C}{a^2 + 1}$.

§. 267.

De algebraiske frumme Liniers almindelige Begrebet til imod x , og selvgelig beholder i Ligheden enten et større eller mindre stemmelse, som Antal af Leed i begge de uendelige Følger, saaes algebraiske Ligheder nærme sig til den virkelige Linie, af adskillige Ordener, ligesom denne her fundne er en Linie af fjerde hvilken de udkastede Ting høi-Orden; fordi, i Følge den §. 264 og 265 giorte Hypothese, alle skrive i flydende Materier, som Leed udi Ligheden $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - \dots$ o. s. v. staae imod.

forseende indtil det, som haver den Coefficient δ . Men da δ (naar

$$\text{Værdien af } n \text{ sættes i dens Sted}) = \frac{G(1+a^2)^2}{24c^2C} - \frac{aG^2(a^2+1)^2}{96cC^2\sqrt{a^2+1}},$$

saa bliver δ en meget liden Sterrelse, saa lidt som den Hastighed, hvormed Tingen i A er kastet ud, er meget stor, fordi c^2C og cC^2 blive da meget anseelige Sterrelser imod de øvrige. Dette gier Ligheden endnu meget simplere, saa man faaer for dette Tilfælde denne Linie

$$\text{af den tredie Orden } y = ax - \frac{G(1+a^2)}{4C}x^2 - \frac{G(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}{12cC}x^3.$$

§. 268.

Sættes endelig $c = \infty$, da bliver $y = ax - \frac{G(1+a^2)}{4C}x^2$, Er Bevægelsen frie, bliver den igiennem et Rum uden Modstand, efter hvad vi desangaaende udsærlig have behandlet i det foregaaende.

§. 269.

Men hvad hælder man betiener sig af den ene eller af den anden af de Linier, som alle med hinanden kunde tiene til at bestemme Bevægelsen i de flydende Materier, som staae imod; findes dog i dem alle, naar Inklinations-Vinklen af Skuddet er given, den største Længde, hvorhen Skuddet kan naae, eller AB, ved at sætte $y = 0$, i den fundne algebraiske Lighed $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3 - \dots$ o. s. v. Er Linien af tredje Høide, bliver $a = \beta x + \gamma x^2$, og derfor $x = \frac{+ \sqrt{4a\gamma + \beta^2} - \beta}{2\gamma}$, som er en Størrelse, der ikke beroer uden paa Tangenten af Inklinations-Vinklen og Hastigheden udi A, efter hvad vi have bevist §. 266. 267.

§. 270.

Sættes a at være en foranderlig Størrelse, men Hastigheden i A den samme, da findes dog §. 269 altid x , saa man paa denne Maade kan bestemme Kastets Længde under alle Inklinations-Vinkler til samme Hastighed.

§. 271.

Vil man sege det største Kast, som med samme Hastighed udi Saa og det største Kast, som kan A kan gøres; da udfordres dertil, at dx eller at Differentialen af x gøres, naar i

M m m 3

dens

alle Kæstene ha: dens Værdie $\frac{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}}{2\gamma} - \frac{\beta}{2\gamma} = 0$. Til den Ende maa, i
 sigtheden i Be-
 gyndelsen af Be-
 vægelsen er den
 samme. Steden for γ og β deres forhen fundne Værdier sættes i deres
 Sted. Saa

$$x = \frac{1}{2(1+a^2)} \cdot \sqrt{9c^2 G(1+a^2+48aCc\sqrt{1+a^2})} \cdot \sqrt{G - \frac{3}{2}c\sqrt{1+a^2}},$$

og naar $1 + a^2 = q$; bliver $0 = dx = 18c^2 ada : q$
 $- 96Cca^2 dx : Gq\sqrt{q} + 9c^2 ada : q + 24c^2 da : G\sqrt{q}$
 $+ 24Cca^2 da : G\sqrt{q^3} + 3cada \cdot \sqrt{9c^2 Gq + 48aCc\sqrt{q}} : Gq^{\frac{3}{2}}.$
 Hvoraf videre faaes

$$3c^2 a\sqrt{q} + \frac{24Ca^2}{G} - \frac{8Cq}{G} = \frac{a\sqrt{9c^2 Gq + 48aCc\sqrt{q}}}{G},$$

eller $4C(1 - 2a^2)^2 = 3aGc(1 - a^2)\sqrt{1+a^2}$; af hvilken
 Lighed Tangenten til den høieste Forhøinings-Vinkel, og selvselig Vin-
 klen selv altid kunne bestemmes.

§. 272.

Vinklen, under
 hvilken det stør-
 ste Kæst fæer, frie Bevægelse, som er uden al Modstand; da blev $1 - a^2 = 0$
 bliver lidt min-
 dre end 45° . og $a = 1$. Selvselig maatte det længste Kæst da fæer under 45° ,
 saaledes, som vi i det forrige have fundet det. Saa tidt der-
 imod som C er paa nogen Maade betydelig imod c , bliver først
 $3aGc(1 - a^2)\sqrt{1+a^2} - 4C(1 - 2a^2)^2 = 0$, hvilket
 viser, at i det første Leed $3aGc(1 - a^2)\sqrt{1+a^2}$, a er mindre
 end 1, saa at i en flydende Materie, der staaer imod, bliver Vin-
 klen, under hvilken det høieste Kæst fæer, altid noget mindre end 45° ,
 men nærmer sig altid saa meget meer til 45° , som $C : c$ er af en
 mindre Forhold.

§. 273.

§. 273.

Det Punkt L, hvori Skuddet stiger til sit Høieste, findes ved Det høieste Punkt bestemmes, hvortil den udkastede Ting kan stige.

at sætte $dy = 0$, fordi Tangenten maa i L være horizontal. Der

for bliver i dette Tilfælde $\frac{a}{3\gamma} = x^2 + \frac{2\beta}{3\gamma}x$, eller og

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{3\gamma} + \frac{\beta^2}{9\gamma^2}} - \frac{\beta}{3\gamma}$$

§. 274.

Da i Almindelighed $x = \frac{\sqrt{4a\gamma + \beta^2} - \beta}{2\gamma}$ §. 269. Paa hvad Maade den Hastighed kan findes, imod hvilken at Modstanden er saa stor som Tyngden.

$= \frac{1}{1+a^2} \left(\frac{\sqrt{9c^2 G(1+a^2)} + 48aC\sqrt{1+a^2}}{G} \right) - \frac{\frac{3}{2}c}{\sqrt{1+a^2}}$

saa sees, at saa tidt som Længden af et eneste Skud er givet, tilliged med Inklinations-Vinklen og Hastigheden udi A, saa kan deraf Sterrelsen c bestemmes, selgelig og den Hastighed, med hvilken, naar et Legeme bevæges, da bliver Modstanden saa stor som Tyngden.

§. 275.

Er den krumme Linie given, udi hvilken Bevægelsen skeer, da udføres videre. kan c umiddelbar deraf findes, i hvorledes og at det Flydendes Mod-

stand er beskaffen. Thi man faaer §. 260 $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$, selgel-

lig $z = \frac{-Gds^2}{2ddy}$ og $dz = \frac{-2Gdyddy^2 + Gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Men dz er og

§. 259 $= -Gdy - Rds$. Selgelig bliver $-Gdy - Rds$

$= \frac{-2Gdyddy^2 + Gds^2d^3y}{2ddy^2}$ og $R = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$, som er den almin-

delige Lighed, der, naar Modstanden er given, tiener til at bestemme Sterrelsen c .

Er

Er for Exempel $R = \frac{z}{c}$, saaledes som Modstanden paa det nærmeste findes at være udi Lusten. Da, fordi $z = \frac{-Gds^2}{2ddy}$, bliver

$$R = \frac{-Gds^2}{2cddy} = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2} \text{ og } c = \frac{dsdy}{d^3y}.$$

I hvilken Værdie ikke andre Sterrelser komme for end de alene, som kunde bestemmes af den krumme Linies givne Lighed.

§. 276.

Al den givne krumme Linie, udi hvilken Bevægelsen skeer, at bestemme Modstanden.

Deraf sees fremdeles, hvorledes man altid, naar den krumme Linie, udi hvilken Bevægelsen skeer, er given, kan bestemme den Modstand, som udfordres til at Bevægelsen kan skee udi denne Linie, om ellers den hastiggierende Kraft inmerfort sættes at være bestandig, siden man faaer $R = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$. Vi ville her ikke opholde os ved de adskillige Undersøgelser, som i denne Henseende ere blevne gjortte (*), da Nyttten af dem ikke er den, som man havde ønsket, men alene giere denne Anmerkning, at i de flydende Materier, som staae imod, kan en Parabol aldrig blive beskrevet af de udkastede Legemer, fordi i denne Linie d^3y , selgelig og $R = 0$: Hvoraf derimod paa den anden Side sees, at Parabolen er den Linie, hvori Legemerne bevæge sig, naar ingen Modstand hindrer, og de hastiggierende Kræfter ere bestandige.

§. 277.

Dersom den hastiggierende Kraft ei ansees som bestandig, men som foranderlig, efter hvad Lov man selv vil, alene at denne sidste er given

(*) See Eulers Mechanik T. I. C. 6. og Newtons Princ. Philos. Lib. 2. Sect. 6.

given, og at Direktionen bliver uforandret parallel eller vertikal, da bestemmes endnu R i dette almindelige Tilfælde lige saa let, som i den forrige Hypothese. Thi man behøver alene i Eigheden §. 275.

$z = - \frac{Gds^2}{2ddy}$, at behandle G, som en foranderlig Størrelse under

Differentiationen, og i øvrigt at giøre alt som i §. 275, da man

faaer $R = \frac{dGdsddy - Gds^2 d^3y}{2ddy}$. Saa den Modstand altid kan be-

stemmes, hvilken udfordres i samlig disse Hypoteseer af de hastiggjørende Kræfter dertil, at Bevægelsen kan skee i hvad given krum Linie som man vil.

§. 278.

Er derimod Modstanden og den krumme Linie, udi hvilken Bevægelsen skeer, begge givne, findes ligeledes de Kræfter, som i at virke altid efter vertikale Direktioner, alene ere i Stand til at forvolde, at Bevægelsen kan skee i denne krumme Linie. Thi da §. 261

Ligeledes af Modstanden og af den krumme Linie, naar de antages som givne, at bestemme de hastiggjørende Kræfter.

$G = - \frac{2zddy}{ds^2}$ og $\frac{z}{n} = \frac{ds^2}{dx^2} e^{-\frac{s}{c}}$, saa bliver i dette Tilfælde

$$G = - \frac{2ddy}{dx^2} ne^{-\frac{s}{c}}.$$

2.

Om den krumlineede Bevægelse, naar Kræfternes Direktioner ei ere parallelle, og en overalt ensdan flydende Materie bestandig staaer imod.

§. 279.

Sege Kræfterne bestandig imod et vist Center, da er den letteste Maade at behandle de herhid hørende Udrejninger paa den, som vi

Den krumlineede Bevægelses almindelige Be-

Nun

have

stemmelse, naar
de Hastigheds-
de Kræfter ere
foranderlige.

have betient os af i det foregaaende §. 158, da nemlig Ligheden for Normal-Kraften gives ved Perpendiklen paa Tangenten. Derved faaes for Tangential-Bevægelsen den samme Lighed, som før, $dz = -Kdy - Rds$, §. 259. For Normal-Kraften derimod faaes denne Lighed $\frac{Kdy}{2z} = \frac{dp}{p}$. §. 158.

§. 280.

Saa vel i Hen-
seende til Hastig-
heden.

Se ges en dobbelt Vardie af K ved Hielp af disse to Ligheder, da bestemmes Hastigheden, og man faaer $K = \frac{2zdp}{pdy} = \frac{dz + Rds}{-dy}$, og deraf igien $\frac{-pdz - 2zdp}{Rp} = ds$, som er den Lighed, hvoraf Hastigheden her bestemmes.

Saaledes om $R = \frac{z}{c}$, saaledes som vi i det forrige ofte have sagt, at Modstanden findes at være udi Luften. Da bliver $-\frac{cdz}{z} - \frac{2cdp}{p} = ds$, selgelig $-c \text{ Log. } z - c \text{ Log. } p^2 = s$, eller $-\text{Log. } \frac{1}{zp^2} = \frac{s}{c} + B$. Denne bestandige Sterrelse bestemmes deraf, at naar $s=0$, bliver $z=C$ og $p=b$, saa man faaer $\text{Log. } \frac{zp^2}{Cb^2} = -\frac{s}{c}$, og $\frac{zp^2}{Cb^2} = e^{-\frac{s}{c}}$, selgelig $z = \frac{e^{-\frac{s}{c}} \cdot Cb^2}{p^2}$.

For at sammenligne dette med Hastighedens Beskaffenhed i det Tilfælde, da Bevægelsen er frie, kan ydermere agtes, at ligesom i den frie og uhindrede Bevægelse Hastigheden er som Perpendiklen paa Tangenten forkeert tagen, saa bliver den i dette Tilfælde af den ufrie Bevægelse

Bewægelse og forkeert proportionert den Deel af samme Perpendikel, som tilkiendegives ved $e^{\frac{s}{2c}}$, saa den beroer tillige paa den igiennemløbsne Veis Længde.

§. 281.

Af Hastigheden findes Tiden. Thi Hastigheden, som faaes Som Tiden.
ved Integrationen af den Lighed $-\frac{p dz + 2z dp}{R p} = ds$, eller $-p^2 dz - 2z dp = R p^2 ds$, hvis Integral er $p^2 z = \int -R p^2 ds$, bliver $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\int -R p^2 ds}{p^2}}$, i hvilket vi vilde sætte $= z$, og selgelig bliver $t = \int \frac{ds}{\sqrt{z}}$.

$$\text{Er } R = \frac{z}{c}, \text{ da bliver } t = \int \frac{ds \cdot e^{\frac{s}{2c}} p}{b \sqrt{c}} + B.$$

§. 282.

Man bestemmer ligeledes den krumme Linie selv. Thi er z Da den krumme Linie, udi hvilken at Bevægelsen skeer.
fundet og K er en Funktion af y , da behøves intet andet end at sætte dens Værdie i Ligheden for Normal-Kraften $\frac{K dy}{2z} = \frac{dp}{p}$, da man derved faaar en nye Lighed, som ikke indeholder andet end Størrelser af den søgte krumme Linie.

Saaledes om Modstanden er Quadraten af Hastighederne proportionert, bliver $\frac{K dy \cdot e^{\frac{s}{c}}}{2Ch^2} = \frac{dp}{p^3}$. Sættes $K = y^n$, da bliver

Ann 2

$$\frac{y^n dy \cdot e^{\frac{s}{c}}}{2Cb^2} = \frac{dp}{p^3}, \text{ som er den almindelige Lighed for de Centrals}$$

Kræfter, der ere som en vis given Heide af Distanen fra Kræfternes Center. I denne Lighed kan s altid udryddes ved at agte, at

$$ds = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - p^2}}, \text{ saa man faaer i Almindelighed i denne Kræfternes Hypothese denne Lighed for den krumme Linie}$$

$$\frac{y^n dy \cdot e^{\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - p^2}}}}{2Cb^2} = \frac{dp}{p^3}.$$

§. 283.

Swad Kræfternes almindelige Forhold maa være, naar i en flydende Materie den samme Linie skal beskrives, som i den uhindrede Bevægelse. Sammenligner man den §. 282 givne Lighed $Kdy \cdot e^{\frac{s}{c}} = \frac{2Cb^2 dp}{p^3}$ med den forhen givne §. 163. $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, i hvilken sidste B tilkiendegiver det samme, som C i den første, og b ligeledes det samme som h , da seer man let, at den Kraft $K \cdot e^{\frac{s}{c}}$ maa i en flydende

Materie, som staaer imod, giøre; at i den ufrie Bevægelse den samme Linie igiennemløbes, som i den frie og uhindrede skulde beskrives af det udkastede Legeme, naar det blev drevet af den hastiggjørende Kraft K , thi man kommer udi begge Tilfælde til den samme Lighed for den krumme Linie $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$.

§. 284.

§. 284.

Vil man, saa tidt som den krumme Linie og Loven for Mod- Kræfternes al-
mindelige Be-
stemmelse af
Modstanden og
af den krumme
Linie antagne
som givne.
standen ere givne, bestemme, hvad Kræfter der udfordres til at for-
aarsage Bevægelsen i den givne krumme Linie igiennem en flydende
Materie, som staaer imod. Da lader sig samme nu let udvikle ved
Hielp af de foregaaende og fer sundne Ligheder. Thi i Følge §. 280

er Central-Kraften $K = \frac{2zdp}{pdy}$, §. 280 og 281 er $z = \int \frac{2-Rp^2 ds}{p^2}$

og derfor i Almindelighed $K = \frac{2f-Rp^2 ds \cdot dp}{p^3 dy}$.

§. 285.

Man kan ligeledes almindelig bestemme, hvad Slags Mod- Ligeledes Mod-
standens Be-
stemmelse af de
givne Kræfter
og af de givne
krumme Linier.
stand dertil udfordres, at et Legeme, som drives af en vis given Cen-
tral-Kraft, kan i en flydende Materie, som staaer imod, beskrive en
vis given Linie. Man behøver alene at betiene sig af den samme krumme
Methode her, som vi nylig forhen have betient os af §. 276. 277.

Thi i Følge §. 279 er $\frac{Kpdy}{2dp} = z$. Følgelig, saa tidt som K er

given i y, eller i de Sterrelser, som henhøre til den krumme Linie,
blive saavel Værdierne af z, som af dz, heller intet andet end Funk-
tioner af de Sterrelser, som henhøre til den givne krumme Linie.
Sattes derfor disse Værdier af z og dz i deres Sted udi Ligheden

§. 280. $-\frac{pdz + 2zdp}{Rp} = ds$. Da bliver $R = \frac{-pdz - 2zdp}{pds}$, i

hvilken Værdie, efter det nylig sagte, z og dz ikke ere uden Funktioner
af de Sterrelser, som henhøre til den givne krumme Linie.

§. 286.

Man kan i enkelte Tilfælde udløde af disse almindelige Ligheder en Mængde Slutninger (*), men da de Undersøgelser, som saaledes kunde gøres, fast alle have den Hensigt, at bestemme Theorien af Physik og Astronomie, og man i de fleste Tilfælde ikke kan komme videre end til differentielle Ligheder, ville vi derved ikke opholde os: Allermest, da det ikke er vanskeligt, af de her givne almindelige Metoder, naar Metoderne af Algebre ellers ere bekendte, uden Hindrer at bestemme det, som angaaer Bevægelsens, Modstandens og Kræfternes Natur udi de enkelte Tilfælde.

Tredie Afdeeling.

Om Faldet ned efter krumme og rette Linier, saavel som om Bevægelsen op efter disse Linier, naar de hastiggørende Kræfter ere bestandige, og virke efter parallelle Direktioner.

§. 287.

Da denne Afhandling er den selsomme, som den, vi forhen have betragtet i Tillægget til den tredie Forelæsning, alene med den Forskiel, at vi der ikke saae uden paa den Modstand alene, som kom af den Linie, over hvilken Bevægelsen skede, da vi derimod her desuden maa betragte den, som kommer af Legemets Hastighed eller Fart imod den flydende Materie. Saa kan man agte, at de §. 32. 33. givne

(*) See Eulers Mechanik sidst anførte Sted.

givne Værdier af Kræfterne her ligeledes have Sted. Dette alene iagttaget, at den forhen saa kaldte Normal-Kraft, den, som virker perpendicular paa den krumme Linie, forandres ikke af det flydendes Modstand, fordi den altid er en simpel Pression, og virker ikke med en given og bestemt endelig Hastighed, men da dette sidste haver Sted i Henseende til Tangential Kræften, saa er det den, som af det flydendes Modstand alene forandres. Endskjønt at denne Forandring tilsidst og strekker sig til den normale Kraft, fordi at Hastigheden efter Tangenten svækkes af Modstanden, selgelig og den Deel af den normale Kraft, som er centrifugal, i Følge af det, hvad vi desangaaende have sagt i Tillægget §. 178 og følg.

§. 288.

Er (Taf. XII. Fig. 1) AB den krumme Linie, ned efter hvilken at Faldet skeer, bestemmes alt her, som i §. 32. 33. alene, at hvad vi der have kaldet y, her kaldes x og omvendt, siden denne Benævnings-Måde her er den bequemteste. Derfor bliver, naar $AD = x$, $DE = y$, og den hele Kraft kaldes G, den Deel af samme, som bevæger efter Tangenten $= \frac{gdx}{ds}$, om

Bevægelsen almindelige Be-
stemmelse i fly-
dende Materier,
som staae imod,
naar de tunge
Ting bevæges
over disse Linier.

Bevægelsen skeer fra A til B ned efter, og $= -\frac{gdx}{ds}$, om Bevægelsen skeer fra B imod A op efter. Men denne Kraft formindskes eller formeres af Modstanden R, eftersom Bevægelsen skeer enten ned ad eller op efter, saa den hele bevægende Kraft efter Tangenten bliver saaledes $\pm \frac{gdx}{ds} - R$.

Kaldes

Kaldes desuden Hastigheden i et hvert Punkt af den krumme Linie som $E, \sqrt{z}$ og den dertil svarende Høide z , da bliver i Almindelighed $(\pm \frac{gdx}{ds} - R) ds = dz$.

§. 289.

J får, naar Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

Da det er fast unyttigt, (uden i meget saa Tilfælde) i denne Art af Bevægelse at betragte nogen anden Slags Modstand end den, der er som Quadraten af Hastigheden. Sættes da som før $R = \frac{z}{c}$,

da faaes for Faldet ned efter $gdx - \frac{z}{c} ds = dz$,

§. 290.

Og Faldet skeer over rette Linier.

Det simpleste Tilfælde af alle er det, da Faldet skeer over skraa- liggende rette Linier, som AB, (Taf. XI. Fig. 2.) om Cosinus til Vinklen $BAC = \frac{1}{a}$ og den hele Sinus $= 1$, bliver i den rette Linie $adx = ds$, saa $dz = gdx - \frac{az}{c} dx$, og $\frac{cdz}{gc - az} = dx$, hvoraf Integralen er $x = -\frac{c}{a} \text{Log.} \frac{gc - az}{gc} + B$.

J Henseende til den bestandige Størrelse B ere to Tilfælde at agte. 1) Den ene, naar Faldet ned efter begynder udi A uden al Hastighed. I dette Tilfælde ber altid, naar $x = 0$, ligeledes $z = 0$, saa B derfor bliver $= \frac{c}{a} \text{Log.} gc$, og $x = \frac{c}{a} \text{Log.} gc - \frac{c}{a} \text{Log.} \frac{gc - az}{gc}$, eller $x = \frac{c}{a} \text{Log.} \frac{gc}{gc - az}$.

2) Den anden er den, da Faldet i A begynder med en vis given Hastighed, for Exempel den, til hvilken den Høide c svarer.

I dette

I dette Tilfælde, naar $x = 0$, bliver $z = C$ og $B = \frac{c}{a} L. \frac{gc - aC}{gc - az}$.

Derfor bliver $x = \frac{c}{a} \text{Log.} \left(\frac{gc - aC}{gc - az} \right)$.

§. 291.

Man udvækker af disse Ligheder let Hastighederne ved at tage

Tallene. Thi i det første Tilfælde bliver $e^{\frac{ax}{c}} = \frac{gc}{gc - az}$ og $z = \frac{gc}{a}$
 $-\frac{gc}{ax} = \frac{gc}{a} \left(1 - e^{-\frac{ax}{c}} \right)$.

I det andet derimod faaes $e^{\frac{ax}{c}} = \frac{gc - aC}{gc - az}$, og derfor
 $z = \frac{gc \cdot e^{\frac{ax}{c}} - gc - aC}{\frac{ax}{a}} = \frac{gc}{a} \left(1 - (gc + aC) e^{-\frac{ax}{c}} \right)$.

§. 292.

Man seer deraf videre, at i det første Tilfælde, naar Faldet be-
 gynder i A uden Hastighed, da 1) om $x = \infty$, maa $L. \frac{gc}{gc - az}$ vorer her ikke
 blive ∞ . Følgelig $gc - az = 0$ og $z = \frac{gc}{a}$. Følgelig bliver Størrelse,
 $\sqrt{\frac{gc}{a}}$ den største Hastighed, som ved Faldet kan vindes, endog igjen ligst Num er ble-
 nem et uendeligt Num. Hvilket og sees deraf, at naar et uendeligt ver igiennemlø-
 bet, og de foran-
 sorte Hastighe-
 dens Beskaffen-
 heder i den frie
 Bevægelse tabe
 sin her til største
 2) Og Deel.

Doo

2) Og ligeledes fordi, at naar $gc = ax$, $x = \text{Log. } \mathcal{U}$, saa følger, at den største Hastighed vindes ikke over skraaeliggende Planer, før end et uendeligt Rum er igiennemløbet.

3) Under adskillige Inklinations-Vinkler (g og c tagne som bestandige under dem alle) bliver derfor den største Hastighed $z = \frac{1}{a}$, følgerlig, alt som a bliver større til, bliver z mindre. Men siden §. 291. a er forkeert som Cosinus af Vinklen BAC, og derfor z Cosinus af samme Vinkel proportionert. Saa følger, at den største muelige Hastighed, som kan blive til ved Faldet, er den, som vindes ved Faldet igiennem Vertikalen. Jo meer skraaeliggende derimod at Planet er, desto mindre bliver denne Hastighed.

§. 293.

Sætter man ligeledes i Ligheden $\frac{gc}{a} (1 - (gc + ac) e^{-\frac{ax}{c}}) = z$, $x = \mathcal{U}$ bliver $z = \frac{gc}{a}$; saa Beskaffenheden af den største Hastighed bliver i dette Tilfælde den samme, som i den forrige, og den Hastighed, hvormed Legemet begyndte at bevæge sig udi A, gjør intet til Sagen.

§. 294.

Stiger et Legeme op efter BE med en vis given Hastighed, og $BG = x$, da bliver §. 288 $\left(\frac{gdx}{ds} + R\right) ds = -dx$, og naar Sekanten til Planets Inklinations-Vinkel med Horizontalen kaldes a , som før §. 290, bliver $ds = adx$. Er $R = \frac{z}{c}$, som før,

før, da bliver $gdx + z \frac{adx}{c} = -dz$. Men vores forhen fundne Lighed for Faldet ned efter §. 289, nemlig $gdx - z \frac{adx}{c} = dz$, forvandles i denne sidste ved at sætte $g = -g$. Følgelig kan man og under Betingning af denne Forandring strax betjene sig af den §. 290 fundne Integral, at nemlig, saa tidt som Tingene stige over skraa-liggende Planer op efter, bliver $x = \frac{c}{a} \text{Log.} \left(\frac{gc + aC}{gc + az} \right)$.

§. 295.

Sættes $z = 0$, da findes den største Høide, til hvilken at 3 Stigningen Legemet kan stige; nemlig $ED = \frac{c}{a} \text{Log.} \left(\frac{gc + aC}{gc} \right)$.

Ligeledes findes den største Længde, som det kan beskrive over det inklinerte Plan $CB = c \text{Log.} \left(\frac{gc + aC}{gc} \right)$, fordi $s = ax$.

op efter bestemmes den største Høide en Ting kan stige til, og den største Længde paa Planet, som den kan igiennemløbe.

§. 296.

Derfor ved Faldet ned efter AB den Hastighed b vindes, og 3 flydende Materier, som staae imod, er den vertikale Høide af Stigningen al-tid mindre end den af Faldet.

og man vil i begge Tilfælde sammenligne de vertikale Høider, da bliver Stigningen al-tid mindre end den af Faldet.

$= \frac{c}{a} \text{Log.} \left(\frac{gc}{gc - ab} \right)$, og da Stigningen skal skee med den samme Hastighed b , bliver i Ligheden §. 295, $ED = \frac{c}{a} \text{Log.} \left(\frac{gc + aC}{gc} \right)$

Men $C = b$, saa at $AC : CD = L. \left(\frac{gc}{gc - ab} \right) : \text{Log.} \left(\frac{gc + ab}{gc} \right)$, om nemlig begge Planerne BA og EB have den samme Inklination

imod Horizonten. Men disse Høider kunne ei være lige store, (hvilet man og desuden let seer) thi ellers skulde $-a^2b^2 = 0$.

Følgelig om disse to Høider skulde være de samme, maa Inklinations-Vinklerne være adskillige. Kaldes Sekanten til ABC, som før a , den derimod til EBD, A. Da bliver $AC = ED$, naar

$$\sqrt{\frac{gc}{gc-ab}} = \sqrt{\frac{gc+Ab}{gc}}.$$

§. 297.

Vil man, at Længderne, som igiennemløbes over de under adskillige Vinkler inklinerte Planer AB og BE skulde være lige store; da om Sekanterne kaldes som før a , og A: Forholde sig $EB : BA = \text{Log.} \frac{gc+Ab}{gc} : \text{Log.} \frac{gc}{gc-ab}$, og naar $EB = BA$, bliver $\frac{gc+Ab}{gc} = \frac{gc}{gc-ab}$, hvoraf videre faaes $a = \frac{Agc}{gc+Ab}$, saa at der for Stigningen maa skee under en mindre Vinkel end Faldet.

§. 298.

Tiden af den retlinede Bevægelse bestemmes.

Tiden af Faldet er i Almindelighed, om Hastigheden $= \sqrt{z}$,

$\frac{adx}{\sqrt{z}}$ og $dx = \frac{cdz}{gc-az}$, §. 290. Følgelig om Tiden $= T$, bli-

ver $dT = \frac{acd}{(gc-az)\sqrt{z}}$. Sættes $\sqrt{z} = t$, bliver $dT = \frac{2acd}{gc-at^2}$

$$= \frac{2cdz}{\frac{gc}{a} - t^2} = \frac{\sqrt{\frac{ac}{g}} dt}{t + \sqrt{\frac{gc}{a}}} - \frac{\sqrt{\frac{ac}{g}} dt}{t - \sqrt{\frac{gc}{a}}}$$

$$\begin{aligned} \text{og } T &= \sqrt{\frac{ac}{g}} (\text{Log. } t + \sqrt{\frac{gc}{a}} - \text{Log. } t - \sqrt{\frac{gc}{a}}) \\ &= \sqrt{\frac{ac}{g}} \text{Log. } \frac{t + \sqrt{\frac{gc}{a}}}{t - \sqrt{\frac{gc}{a}}}, \text{ og naar i Steden for } t \text{ sættes dens Værdi} \end{aligned}$$

die $\sqrt{z}$, faaes $T = \sqrt{\frac{ac}{g}} \text{Log.} \left(\frac{\sqrt{az} + \sqrt{\frac{gc}{a}}}{\sqrt{az} - \sqrt{\frac{gc}{a}}} \right)$, som er Tiden for Faldet ned efter AB, naar Hastigheden udi $A = 0$. Gieres Integralet fuldstændigt, ved at legge den bestandige Størrelse til, faaes $T = \sqrt{\frac{ac}{g}} \text{Log.} \left(\frac{\sqrt{az} + \sqrt{\frac{gc}{a}}}{-\sqrt{az} + \sqrt{\frac{gc}{a}}} \right)$.

§. 299.

Tiden for Stigningen op efter BA bestemmes derimod saaledes.

$$dT = - \frac{acdz}{(gc + az)\sqrt{z}} = - \frac{2acdz}{gc + az^2} = \frac{-2cdz}{\frac{gc}{a} + z^2}, \text{ om lige}$$

som før $\sqrt{z} = t$. Integrerer man derfor dT paa samme Maade,

$$\text{som forhen §. 233, da faaar man } T = \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{g}} \cdot \text{B. T.} \sqrt{\frac{az}{gc}}.$$

Vil man derfor sammenligne Tiden af Faldet med Tiden af Stigningen over Planer af samme Inklination, og Hastigheden, som vindes ved Faldet ned efter $AB = b$, da om Stigningen skeer med samme Hastighed igien op over BE, da forholde Tiderne af Bevægelsen sig

$$\text{som } \text{Log.} \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{gc}{a}}}{-\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{gc}{a}}} \right) : 2 \text{B. T.} \sqrt{\frac{ab}{gc}}.$$

§. 300.

Bewægelsens
almindelige Be-
stemmelse i sam-
me Hypothese,
naar Faldet sker
over andre
krumme Linier.

Den Hypothese, da Modstanden sættes at være som Quadra-
ten af Distancen, fører den Fordeel med sig frem for de andre, at Bewæ-
gelsen i de krumme Linier lader sig i Almindelighed bestemme, fordi de
ubekjendte kunde stilles ad i den Lighed, som fastsætter Hastigheden.

Hi vil man i Linien AB (Taf. XII. Fig. 1.) undersøge Hastigheden
af Bewægelsen ned efter, alle Benævninger giorte, som i §. 288, da
bliver $dz = gdx - Rds$. Og fordi $R = \frac{z}{c}$, bliver $dz = gdx$
 $-\frac{z}{c}ds$. Behandles denne Lighed paa samme Maade som den for-

hen integrerte, stient almindeligere, §. 250, da bliver her $e^{\int \frac{dx}{F}}$

$= e^{\frac{\int ds}{c}} = e^{\frac{s}{c}}$, og man faaer $z = \frac{\int Pdx \cdot e^{\frac{s}{c}} + B}{e^{\frac{s}{c}}}$, og fordi vi

her antage P som en bestandig Størrelse $= g$, bliver $e^{\frac{s}{c}} z$
 $= \int gdx e^{\frac{s}{c}} + B$.

J Henseende til B er en dobbelt Anmerkning at giøre. 1) Er

Hastigheden i Begyndelsen af Faldet udi A $= 0$, da maa $\int gdx \cdot e^{\frac{s}{c}}$
blive $= 0$, naar $s = 0$. 2) Er Hastigheden i A derimod givet,
og dens Heide $= C$, maa B være det, hvad Integralen bliver, naar
 $s = 0$ og $z = C$, saaledes, som vi bestandig have iagttaget det
overalt i det foregaaende.

§. 301.

Den største Hastighed findes ved at differentiere z . Da derfor z flydende Materier, som staae
 §. 299 $dz = gdx - \frac{z}{c}ds$, saa bliver $gdx = \frac{z}{c}ds$ og $z = \frac{cgdx}{ds}$, imod, saaes ikke
 eller $ds : dx = g : \frac{z}{c}$, saa den største Hastighed falder ikke her, ved Falder den
 i Bevægelsen uden Modstand i det Punkt, hvor Tangenten til den største Hastig-
 krumme Linie er horizontal; men i et hvert andet, hvor Sinus tot. af Linien, hvor
 forholder sig til Cosinus af den Vinkel, hvilken Tangenten i det Punkt er
 med Vertikalen, som Tyngden til Modstanden udi samme Punkt. horizontal, om
 end samme er
 det laveste.

§. 302.

Tiden af Faldet igiennem AB, naar $AE = x$ bliver

$$= \int \frac{ds \cdot e^{-\frac{s}{2c}}}{\sqrt{\int gdx \cdot e^{\frac{s}{c}} + B}}$$

§. 303.

Støer Bevægelsen fra B op efter imod A, og BH kaldes x , BG, s ; da blive saavel g som R negtende Størrelser, og man
 faaer §. 288. $gdx + \frac{z}{c}ds = -dz$. Følgelig, naar i Steden
 for g sættes $-g$, forandres de forhen fundne Integraler til de, som
 passe sig paa dette Tilfælde. Man faaer nemlig

$$1) \quad e^{\frac{s}{c}} z = \int -gdx \cdot e^{\frac{s}{c}} + B, \text{ hvoraf Hastigheden bestemmes.}$$

2) Naar

$$2) \text{ Naar Tiden } = t, \text{ bliver } t = \int \frac{\frac{s}{e^{2c}} ds}{\sqrt{f - g dx \cdot e^{\frac{s}{c}} + B}}$$

3) Sættes $z = 0$, findes det Punkt i Linien BA, hvor Bevægelsen hører op.

§. 304.

Derfor i Bevægelsen ned efter fra A til B, BH kaldes x og BG s . Da bliver $\left(\frac{gdx}{ds} - \frac{z}{c}\right) - ds = dv$, fordi baade x og s tage af, alt som Hastigheden tager til. Saa man faaer $-gdx + \frac{z}{c}ds = dv$, hvilket og lader sig strax bestemme af Ligheden §. 299, ved at sætte i den x og s negative eller negtende Størrelser. Men denne Lighed lader sig ligeledes strax ulede af den sidst givne §. 302, ved at sætte $c = -c$. Følgelig faaer man og ved samme Forandring udi dette Tilfælde

$$1) e^{\frac{-s}{c}} z = f - g dx \cdot e^{\frac{-s}{c}} + B.$$

$$2) t = \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2c}} \left(\sqrt{f - g dx \cdot e^{\frac{-s}{c}} + B} \right)}.$$

§. 305.

Bevægelsen i
Cykloiden un-
dersøges.

Saaledes. Om den krumme Linie AB er en omvendt Cykloide, og man vil bestemme Hastigheden af Faldet til et hvert givet Punkt E i denne Linie, naar BH $= x$, BG $= s$, og Diameteren til

tilden Cirkel, som beskriver Cycloiden, $= \frac{1}{2}a$. Da fordi at i denne Linie $s = 2\sqrt{\frac{1}{2}ax} = \sqrt{2ax}$, bliver $dx = \frac{s ds}{a}$ og §. 303, Hastigheden $z = \frac{\int -g dx \cdot e^{-\frac{s}{c}} + B}{e^{-\frac{s}{c}}} = \frac{\int -\frac{g}{a} \cdot e^{-\frac{s}{c}} ds + B}{e^{-\frac{s}{c}}}$.

Men i Følge det, som vi have sagt §. 252, er $\int s \cdot e^{-\frac{s}{c}} ds = (-cs - c^2) e^{-\frac{s}{c}}$; og naar man legger det til, hvad Integralet bliver, naar $s=0$, faaes $\int s \cdot e^{-\frac{s}{c}} ds = (-cs - c^2) \cdot e^{-\frac{s}{c}} + c^2$. Følgelig bliver Hastigheden

$$z = \frac{\left(\frac{csg + c^2g}{a}\right) \cdot e^{-\frac{s}{c}} - \frac{c^2g}{a} + B}{e^{-\frac{s}{c}}} = \frac{csg + c^2g - c^2g \cdot e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}.$$

I hvilken Lighed B fore-

stiller det, som z bliver, naar $s=0$, og følgelig den Hastighed, der er vundet udi B ved at falde igiennem den hele Bue AB.

§. 306.

Deraf bestemmes videre det Punkt L, udi hvilket at Hastigheden er størst. Thi §. 300 bliver Høiden, som svarer til Hastigheden

P p

heden

heden udi dette Punkt $= \frac{cgdx}{ds}$, og derfor $\frac{cgdx}{ds} = \frac{cgs}{a}$

$$= \frac{csg + c^2g - c^2g \cdot e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}. \quad \text{Følgelig bliver}$$

$$c^2g + (aB - c^2g)e^{\frac{s}{c}} = 0 \text{ og } e^{\frac{s}{c}} = \frac{c^2g}{c^2g - aB}, \text{ følgelig}$$

$$s = c \text{ Log. } \frac{c^2g}{c^2g - aB} = BL.$$

§. 307.

I faldende Ma-
terier, som staae
imod, er Bevæ-
gelsen over Cy-
kloiden ikke iso-
tron, med min-
dre at de igien-
nemløbne Buer
ere overmaade
smaa.

Undersøger man videre Tiden af Faldet i Cykloiden i denne
Modstandens Hypothese, da seer man strax, at den forhen beviiste
prægtige Egenskab, som denne Linie havde i den frie og uhindrede Be-
vægelse, at nemlig Tiden af Faldet, igiennem alle dens Buer, hvad
nemløbne Buer heller de vare store eller smaa, blev den samme, taber sig her ganske,

$$\text{Thi da §. 305. } z = \frac{csg + c^2g - c^2g \cdot e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}, \text{ saa bliver}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{V_{ads}}{\sqrt{csg + c^2g - c^2g e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}}. \quad \text{Men}$$

$$e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2c^2} + \frac{s^3}{3c^3} + + \text{o. s. v.} \quad \text{Sættes denne}$$

Værdi i Steden for $e^{\frac{s}{c}}$ i Værdien af dt , da følger, at Integralen
altid bliver en Sterckelse, som beroer paa s eller paa den igiennemløbne
Bue,

Bue, og at derfor langt fra ikke Faldet igiennem store og smaa Buer
skeer udi den samme Tid.

Ere derimod Buerne overmaade smaa, igiennem hvilke Faldet
skeer, saa det kan være nok, at beholde de tre første Leed af den uen-

delige Følge, i hvilken $e^{\frac{s}{c}}$ opleses. Da faaes

$$dt = \frac{Vads}{\sqrt{aB + \frac{aBs}{c} + \frac{aBs^2}{2c^2} - \frac{gs^2}{2}}} \quad \text{Hvorved kan agtes, at siden,}$$

saa tidt som s bliver en overmaade liden Størrelse, B er ligeledes over-
maade liden, fordi den forestiller den Hastighed, som er vundet ved
Faldet igiennem s . Saa forsvinde $\frac{aBs}{c} + \frac{aBs^2}{2c^2}$ imod aB og gs^2 , i
sær om c er en anseelig stor Størrelse, saaledes, som den bør at
være det udi Faldet i Luften. Derfor bliver i denne Hypothese

$$dt = \frac{Vads}{\sqrt{aB - \frac{gs^2}{2}}}, \text{ som er, naar } ds \text{ sættes} = -ds \text{ (hvilket}$$

man her altid kan giere, fordi s formindskes idelig) det selvsamme Dif-
ferential, hvilket vi forhen have fundet i den frie Bevægelse udi Cy-
kloiden §. 38, fordi B er her, hvad vi der have kaldet gb , thi b
kan i denne Hypothese ansees som den Høide, ved at falde igiennem
hvilken Hastigheden B vindes. Deraf følger, at saa tidt som Buer-
ne ere overmaade smaa, ere Tiderne af Faldet i den af Modstanden
hindrede Bevægelse de samme. Saa snart derimod, som Buerne
blive af anseelig Størrelse, taber sig denne smukke Egenskab i den af
en Modstand, som Quadraten af Hastigheden hindrede Bevægelse.

§. 308.

Jeg sagde, at b burde ansees som den Hæide, der svarer til B , saa lange som Bevægelsen er meget langsom. Dette forstaaer sig selv, ei alene udi det Tilfælde, da Modstanden er som Quadraten af Hastigheden, men endog i alle de, udi hvilke den er endnu som en større Hæide af samme. Thi er Modstanden i Almindelighed $\frac{z^n}{c^n}$, og z meget liden, da bliver $\frac{z^n}{c^n}$ endnu meget mindre, og jo større n er, desto mindre; i sær om Bevægelsen skeer udi Luften, hvor c er en anseelig stor Størrelse. Er derimod n en Brøk, da formindskes z^n i ulige mindre Forhold imod c^n end før. Saa man i dette sidste Tilfælde ikke saa tilforladelig kan ansee Modstanden for intet, som i de første, ogsaa meget mindre, som n selv er mindre til. Man kan ligeledes bestemme Bevægelsen udi andre Tilfælde, men da det allerede sagte er blevet vidtløftigt, ville vi ei derved opholde os.

Femtende Forelæsning.

Om de levende Kræfter.

§. 260.

Sblant de vigtige mekaniske Afhandlinger er den om de Kræfternes at-
saa kaldte levende Kræfter en med af de vigtigste, hvad mindelige For-
heller at man seer paa Nytten i Theorien, eller paa Nytten i skiel forklares.
Brugen. Kræfternes sande Maal er unegtelig altid af stor
Betydendhed. Men før vi indlade os i denne tildeels vanske-
lige Materie, er det maaskee ikke utienligt, at vi igien gaae
kortelig tilbage til de allersørste Grunde af Mekanik, for med
et eneste Diekast, saa at sige, at oversee Adskilligheden af alt
det, som i Mekanik kaldes Kræfter. Vi have da allerede
§. 16. 2. benævnet alle Kræfterne under et med det Navn af
bevægende Kræfter, ikke fordi de alle altid virkelig bevæge,
men fordi de altid i og af deres Natur søge at bevæge, og vi
ikke kunne giøre os noget Begreb om det, hvad de ere, uden
ved Bevægelsen. Disse bevægende Kræfter ere atter igien
§. 16. enten Pressioner og døde eller levende Kræfter.
Pressionerne kunde betragtes i to Tilfælde; enten, naar de
for et Dieblis virke paa en Inertie, betragtet i og for sig,
for at sætte den i Bevægelse, som de elementære Pressioner
af Tyngden i alle de Ting, hvilke først begynde at falde, uden

Sammenhæng med andre Ting; eller og, naar de virke paa Inertier, der have en ufrie Bevægelse, fordi de finde Modstand, saaledes, som vi have betragtet Pressionerne udi Bøgtstangen.

I den første Art Bevægelse er Pressionen den hastiggjørende Kraft multiplicert med Inertien, med et Ord den hastiggjørende Krafts elementære Virkning. Den hastiggjørende Kraft er igien den, som virker ensdan paa alle de enkelte og mindste Dele af Materien, betragtede som aldeles ensdanne under sig. Pressionen saaledes betragtet er egentlig, hvad man kalder den absolute Kraft eller Pression. I den ufrie Bevægelse over Bøgtstanger derimod dømmes Pressionernes eller de døde Kræfters Størrelse, ei alene af den hastiggjørende Kraft multiplicert med Inertien, saaledes, som i den frie Bevægelse; men af Inertiens eller Materiens Mængde i Hastigheden, fordi en Materie, som virker imod, gjør unegtelig en Virkning, saavel proportionert dens Størrelse, som dens Hastighed; efter hvad udsørligere er blevet beviist §. 23 og 24. Disse Pressioner kaldes derfor relative, fordi man i dem ei kan see paa den virkelige Drift, hvilken de hastiggjørende Kræfter sætte Materien i, men alene paa den, som i et sammenhængende System, Delenes og Modstandens Beskaffenheder tillade at kunde ioverksættes.

§. 261.

De levende
Kræfter bør an-
sees som noget

Imidlertid kaldes alle Pressionerne døde Kræfter, for-
di man i dem ei seer paa andet, end den elementære Virk-
ning,

ning, hvilken forarsages i en uendelig liden Tid af de ha- uendelig stort
 stiggjorende Kræfter; af hvilken Virkning aldrig kan følge ^{imod de Press-}
 uden en uendelig liden og ukiendelig Bevægelse, hvilken naar ^{sioner, som til-}
 derfor ansees som slet intet, kaldes Virkningen ukiendelig eller ^{veiebringe dem.}
 død. Saaledes gjør en eneste elementær Pression af
 Tyngden ingen kiendelig Bevægelse, men den giver Mate-
 rierne eller Inertierne alene deres bestemte Vægt. Men no-
 get langt andet er det, om de elementære Pressioner af Tyng-
 den blive uophorlig ved at virke paa en og den samme Mate-
 rie. I enhver given endelig Tid bliver deres igientagne
 Mængde da virkelig uendelig. Denne uendelige Mængde af
 Pressioner tilveiebringer i en endelig Tid en endelig Hastig-
 hed. For saa vidt som en Ting besidder denne sidste, besid-
 der den virkelig det, som først bør kunde tabe sig ved ligesaa
 mange imodsatte Kræfter, som de før vare, hvorved at Ha-
 stigheden blev tilveiebragt. Følgelig kan en saadan Ting ved
 sin Hastighed tilintetgjøre en uendelig Mængde Pressioner af
 Tyngden. Den maa derfor have en Kraft, som er noget
 uendelig stort imod de elementære Pressioner af Tyngden at
 regne. Følgelig bliver denne Kraft af en ganske anden Art
 end Pressionerne, og da den Kraft, som de Ting besidde,
 der bevæges med en endelig Hastighed, kaldes den levende
 Kraft, saa er nødvendig den levende Kraft af en langt anden
 Væbskaffenhed end Pressionerne eller de døde Kræfter, hvor-
 for man og strax burde have formodet, at den havde et an-
 det Maaal end disse sidste.

§. 262.

Kraften til
Krafternes uli-
ge Vurdering.

Saa klart, som dette synes at være, naar man fra den ene Side af betragter Forskiellen imellem de døde og levende Kræfter, saa mange Vanskeligheder haver man dog derimod forefundet, naar man fra andre Sider af betragtede disse adskillige Kræfters Maal; saa det ikke er at undre, om de største Mestere i Videnskaben have været uentge under sig i at bestemme disse Kræfter. Iøstigheden desangaaende er og virkelig blevet ført med en Slags Hefstighed imellem de Engelske Geometrer, som fulgte den store Newton paa den ene, og de fleste andre europæiske, som fulgte den berømmelige Leibniz paa den anden Side. Denne sidste var den første, som paastod, at de levende Kræfter vare som Massen eller Materiens Mængde i Hastighedens Quadrat, imod at Newtonianerne bleve ved at maale døde og levende Kræfter paa en og den selvsamme Maade, hvilket i Begyndelsen kom i sær deraf, at man fandt stor Vanskelighed i at troe, at en Ting's Kræfter kunde beroe paa noget andet end paa Hastigheden simpel hen betragtet og paa Materiens Mængde.

§. 263.

Men dette var virkelig at betragte denne Sag alt for løslig og oven hen. Fordi, saa længe Pressionen er elementær, er det alene tydelig sandt, at den hele Kraft er som Massen i Hastigheden, thi da er dette sidste nødvendig den virkende Krafts hele Virkning. §. 23. 26. Men saasnart som Hastigheden blev endelig, var det ikke længere lige saa klart, at Hastigheden

stigheden var de Kræfters hele Virkning, ved hvilke at de var bleven tilveiebragt. Da nu Kræfterne ikke kunde dømmes uden af deres hele Virkninger, saa havde man altid Ret til at fordre Beviis for, om og Hastigheden burde ansees som de Kræfters hele Virkning, der havde tilveiebragt den, med hvilke de billig syntes at maatte være lige store, som i Legemet skulde tilintetgiøre denne Hastighed, følgelig og de, som Legemet med sin levende Kraft kunde staae imod.

§. 264.

For at undersøge dette sidste, havde man i sær to Veie ^{hvad man maa} at gaae. Den ene; noiere at overlegge Maaden, hvorefter ^{see paa, naar} des Hastighederne ved Pressionerne bleve til. Den anden; at ^{man vil bestemme} undersøge, hvad Erfaring beviiste, angaaende de Virkninger, ^{af me Maalet for} i hvilke at ioverskaffe de levende Kræfter ganske tabte sig ^{de levende Kræfter.} og forgik; siden man ei kunde tvivle paa, at de jo maatte være disse sidste proportionerte. Hvad det sidste angaaer, Erfaringerne nemlig, da bleve de giorte paa mange adskillige Maader, og beviiste idelig, at de hele Virkninger af de levende Kræfter vare som Massen multiplicert med Hastighedens Quadrant. Vi kunde her ikke opholde os ved at forklare alle disse Erfaringer (*), hvilke egentlig henhøre til den experimentale Physik. Vi ville alene for et Dieblis opholde os ved at tale

(*) Desangaaende kan udferlig og frem for andre sees S. Gravers sande Physik Tom. I. Lib. II. Cap. 3.

tale om de iblant dem, som uden stor Forberedelse og Møie strax kunne forstaaes. Disse bestaae deri, at man haver ladet Tyngder af bestemt Figur saaledes falde ned i fuldkommen bløde Materier, som blødt Leer for Ex. at de, i det de rørte Overfladen af disse bløde Materier bevægedes med visse bekiendte Hastigheder, som altid kunde bestemmes efter §. 57. Man haver siden med stor Flid udmaalt de Hulheders Størrelser, som disse saaledes nedfaldne Ting havde udhulet i disse Materier; Da man altid og uimodsigelig haver erfaret, at de hele Virkninger af Stødet i bløde Materier, hvis Dele fuldkommen let og uden Møie kunde vige ud, bestandig vare i sammensat Forhold af de faldende Tings Masser multiplicerte med deres Hastigheders Quadrater.

Disse Erfaringer gjorde, at man blev snart enig i at antage Virkningerne af de Legemer, der bevægede sig med en virkelig Hastighed, som proportionerte med Massen i Hastighedens Quadrat. Tvistigheden blev dog ligesuldt ved om Maaden at vurdere Kræfterne. Alt ret overlagt bliver denne sidste ikke uden en Strid udi Ord, fordi man ved det Navn af Kræfter ikke haver forstaaet et og det samme (*).

§. 265.

(*) At den hele Strid bestaaer i det ovensagte kan iblant andet sees deraf. Newtonianerne paastode, at Kræfterne (*Vires Impressæ*) burde slutes af Massen, multiplicert med Hastigheden, om Tiden var den samme. Var derimod denne sidste adskillig, burde de slutes af Massen multiplicert med Hastig-

§. 265.

For derfor fuldkommen at kunne indsee, hvad heller at Dette Maal findes paa ingen anden Maade
 de saa kaldte levende Kræfter af Theorien, uden at man hol-
 der

Hastigheden, og dividert med Tiden. See iblant andre Desagulierss *Physik Tome 2. 6te Forelæsning*. At dette er i Almindelighed rigtigt om alle Kræfters elementære Pressioner, sees strax af §. 4. Da $\frac{p dt}{m} = dv$ og $p = \frac{mdv}{dt}$.

Men det er ikke mindre sandt, naar Hastigheden er endelig, om Pressionen p er en bestandig Størrelse; Thi da bliver $pt = mv$. Følgelig om t er bestandig, bliver $p = \frac{mv}{t}$.

Er t foranderlig, bliver $p = \frac{mv}{t}$ fuldkommen, som man efter det nylig sagte bestemte Kræfterne. Saa at Newtonianernes Paaastand er unegtelig rigtig, men de tale ikke uden om Pressioner, thi p betyder i de foregaaende Formuler en Pression, efter hvad vi udsærlig have viist i Tillæggene §. 1 = 4.

Leibnizianerne tale om noget langt andet. Deres Sag er at bestemme Summen af alle Pressionerne, som anvendes fra Begyndelsen til Enden af Kræfternes Virkning, saa længe til at Hastigheden er bleven meddeelt. Betiener man sig i denne Henseende af den samme Formel som før $\frac{p dt}{m} = dv$ eller $p dt = m dv$, da fordi at $dt = \frac{dx}{v}$, bliver $\frac{p dx}{v} = m dv$ og $p dx = m v dv$. Fremdeles bliver $\int p dx = \frac{1}{2} m v^2$. Men $\int p dx$ er, hvad Leibnizianerne kalde

bedre, end ved at der sig til Erfaring, bør siges at være som Massen i Hastig-
undersøge, hvor- heden, eller om de ikke meget meer bør siges at være som
ledes Hastighe- Massen i Hastighedens Quadrat, kan man intet bedre Partie
derne ved Pres- sionerne blive
til, vælge end det, at undersøge, hvorledes saavel Hastighederne
som de levende Kræfter blive tilveiebragte af Pressionerne.
Thi enhver seer let, at det ikke er uden paa en uegentlig Maade
at Kræfternes Storrelse vurderes af Hastighederne. Den
rette Kræfternes Unitet er unegtelig en anden Kraft, enten
den Pression, hvormed de levende Kræfter kunde blive til,
paa en ret Maade anvendt; eller og den Sum af Pressioner,
hvorved deslige Kræfter kunde forgaae. At Hastighederne
siden ansees som Maalet kommer alene deraf, at deres For-
hold er den samme under sig, som Kræfternes.

§. 266.

Vanskelighe-
der, som herved
møde.

Men i at gaae frem paa denne Maade, tager man Sa-
gen paa den allersimpleste og lettest forstaaelige Fod, naar
man i disse Henseende ikke betragter andre Pressioner end de
af Tyngden, da ved dem alle muelige endelige Hastighe-
der

levende Kræfter, selgelig er det og i den Mening, som de
tage Kræfterne, unegteligt, at $spdx$ eller de levende Kræfter
ere proportionerte mv^2 , eller Massen i Hastighedens Qua-
drat: Det derimod, hvorefter Neutonianerne tale, og som
de kalde Kræfter, er $spdt$. Selgelig tales af begge Partier
om ganske adskillige Ting. Det eneste, som bliver derpaa
betinde-

der (*), følgelig og alle muelige levende Kræfter kunde blive tilveiebragte. Men naar man endog gjør dette, synes strax i første Diekast anseelige Vanskeligheder at møde, hvilke kunne gjøre det betænkeligt, hvad heller at man skal domme Kræfterne af Massen i Hastigheden, eller af Massen i Hastighedens Quadrant, og det af følgende Aarsag.

De hele Virkninger af Kræfterne kunne betragtes paa en dobbelt Maade, enten i Henseende til den Hastighed, som de tilveiebringe i Tingene, eller i Henseende til det Rum, hvilket, saa længe som Kræfternes Virkning staaer paa og varer ved, igiennemløbes af den Modstand, der bevæges. For at gjøre Sagen desto forstaaeligere, ville vi efter det nylig sagte forestille os det Tilfælde, da Tingene drives af Tyngden, saa følger af de uimodsigelig forhen beviiste Tyngdens Love; at naar en Ting falder (Taf. XII. Fig. 3.) igiennem et Rum AB, saa i A ingen Hastighed er, men alene en elementær Pression af Tyngden, da virker Tyngden i Henseende til Tiden saaledes, at Hastighedens Tilvæxt er i lige Tider lige stor §. 45. saafremt derfor at Tingen i at bevæge sig fra A til B ingen andre Kræfter faaer under Bevægelsen, end de alene, der foraarsage Hastigheden, er det uimodsigelig sandt, at

Qq 3

alle

betydeligt i denne Tvistighed, er; hvad heller at de Kræfter, hvilke de Ting ytre, der bevæges med en virkelig Hastighed, hvad heller at de bør vurderes af $spdt$ eller af $spdx$, og derom skal siden blive handlet i en Anmerkning, som denne.

(*) See §. 26. i Tillæggene.

alle Tingens Kræfter, som ere bundne ved at falde fra A til B, bør alene vurderes af den elementære Tyngdens Pression i Tiden af Faldet, eller af Bevægelsens Størrelse efter §. 22, nemlig af Materiens Mængde multipliceret med Hastigheden. Dette er tildeels det store Fundament, hvorpaa de kunde stytte sig, som paastaar, at uden Forskiel alle Kræfter, alle med hinanden, enten de ere døde eller levende, Pressioner simpel hen, eller de en Ting besidder, der er i virkelig Bevægelse; at, siger jeg, alle disse Kræfter, de ene, som de andre, bør dommes af Hastigheden multipliceret med Materiens Mængde, eller den saa kaldte Tingenes Masse.

§. 267.

Forklæres vi:
dere.

Betragter man derimod de af Pressionerne tilveiebragte Kræfter fra en anden Side, synes følgende Betragtninger at være uimodsigelige. Saa tidt som, kan man sige, en Ting falder fra A til B, dreven af Tyngden igiennem AB, da siden det er unegteligt, at i alle Distancer fra Jordens Center, i hvilke Tingene hos os sædvanlig falde, Tyngdens Kraft er den samme, saa maa en Ting nødvendig, hvilke falder fra A til B, drives i alle Punkter af AB lige stærk af Tyngden. Men da de Kræfter, som den virkende Tyngdens Kraft tager, imidlertid dette Fald skeer, ere just de, hvilke den faldende Ting bør vinde hele Faldet igiennem, saa er det klart, at den hele Kraft, der vindes ved Faldet igiennem AB, er, om Materiens Mængde kaldes M, proportionert M. AB. Men man veed §. 47. at AB er som Quadraten af Hastigheden i B.

Følge-

Følgelig bliver Summen af alle Kræfterne vundne ved Faldet igiennem AB, som Materiens Mængde multiplicert med Quadraten af Hastigheden.

§. 268.

Saaledes faaer man to høist adskillige Maal paa en og den selvsamme Ting, og det, som er det besynderligste, Maal, der ere sluttede, eftersom det synes, paa begge Sider af plat uimodsigelige Grunde: Begge anlagte paa de første Tyngdens Love, imidlertid, som det synes, begge stridige, og saa stridige, at det sidste synes at kuldkafe alt, hvad vi før have sagt om Tyngden. Imidlertid kan man endnu forestille sig det §. 267 brugte Beviis noget tydeligere saaledes. Naar Pressionen (Taf. XII. Fig. 4.) i A er AC, og siden bestandig hele Linien AB ned efter den samme, da er den og i alle Punkter *a* af denne Linie, som *ac* eller AC, og følgelig Summen af alle Pressionerne i B, som Parallelogrammet ABDC, i E som Parallelogrammet AEFC. Men da i disse Parallelogrammer Grund-Linierne ere de samme, ere de i E og B ved Faldet vundne Kræfter som AE og AB, imidlertid at de ved samme vundne Hastigheder ere som $\sqrt{AB} : \sqrt{AE}$.

§. 269.

Følgelig kommer Hoved-Vanskeligheden an paa, om Kræfternes Virkning i Tingenes Fald bør dommes deraf, at Tyngden virker i alle Punkter af AB ligestærk, eller om samme deraf bør sluttes, at Tyngdens Virkning er i alle lige store Sider

Hvorpaa Hoved-Vanskeligheden i denne Sag beroer.

Lider lige stor. Sættes det sidste, da bestaae siensynlig alle de forhen omtalte Regler for Tingenes Fald, at nemlig Tidene ere som Hastighederne, og de igiennemløbne Rum som Quadraterne af Hastighederne. Sættes derimod det første, at nemlig den hastiggjørende Kraft retter sig efter alle Punkterne i Linien AB, og at den i enhver af disse Punkter virker lige stærk, da synes ingen af de forrige Love at kunde bestaae. Folgelig, da disse vare uimodsigelig beviiste, fandt man for godt at erklære dette sidste Maal for Tingene falskt og som stridigt med de første de tunge Tings Bevægelses Love.

§. 270.

Samme op-
løses.

Jeg mener, at det er nu fuldkommen vel bleven viist, hvori at Vanskeligheden bestaaer, jeg vil stræbe at vise, hvori den Stridighed ligger, som lader til at være i disse Slutninger, uden at den dog virkelig er. To Slutninger, som ere giorte af saa rene og af saa uimodsigelig sande Grunde, som disse, naar de synes at være stridige under sig, maa det være, fordi man ei haver noie nok overlagt Beskaffenheden af begge, saa Sandhederne synes alene at være hverandre imod, uden dog virkelig at være det. Til den Ende maa agtes, at saa tidt som en Kraft forarsager en Bevægelse, maa man forestille sig, som om den blev tilintetgjort af den Tings Inertie, som bevæges, og gif imidlertid, naar Bevægelsen og Virkningen begge vare fuldkommen frie, heel og hulden over i den Ting, som blev bevæget. Vi ville her alene betragte det Tilfælde, da Inertien af Materiens Mængde staaer imod, og
noiere

noiere overlegge, hvad i det Dieblif ſkeer, da Bevægelsen meddees den lidende Materie af den bevægende Kraft.

Inertien, i det den ſtaaer imod, er da virkelig ikke andet, ſaa at ſige, end et Middel, hvorved Kraften gjør ſig løs fra det Bevægende, for at gaae over i det Lidende: Man kan i dette ſidſte, efter at Omverlingen er ſkeet, betragte Kraften ſom at være endnu det ſamme i denne ſidſte Ting, hvad den for var i den bevægende, og ſom at have alene ſiſtet Sted og Sæde, uden at have forandret ſig ſelv.

§. 271.

Dette er uimodſigelig ſandt i al frie Bevægelse, i den forſtaaer, hvor intet hindrer hverken den bevægende Ting i at yttre ſin Kraft, ei heller den lidende i at tage imod den. En anden Anmerkning, ſom i det nærværende er ikke mindre rigtig og man her ikke mindre behøver, er den, at i al frie Bevægelse intet af den virkende Kraft tabes, men alt gaaer over fra den virkende Ting i det lidende (*).

§. 272.

(*) At der alene lader at være, men at dog virkelig i ſig ingen ſand Stridighed er imellem Slutningerne af §. 266 til 271 ſeer man, ſom jeg mener, overmaade tydelig, og tillige forteſt paa denne Maade. I de tunge Tings Fald maa unegtelig Tyngdens Preſſion ſiges at være den ſamme i alle Punkter af den Linie AB (Taf. XII. Fig. 4.) igiennem hvilken en Inertie, drevet af denne Kraft, fra A til B falder. Dette

K r r

forudſat,

§. 272.

Dette er alt, hvad man behøver til at have den Stridighed, der forhen syntes at være imellem Sætningerne §. 269, hvilken, eftersom de forstaaes til, og enten virkelig er eller ikke. Det er unegteligt, at i alle Punkter af Linien AB under

forudsat, bliver uimodsigelig Tyngdens hele Virkning i alle enkelte Punkter af AB $= \frac{Pdx}{m}$, naar ved P forstaaes Pressionen af Tyngden, ved dx et Element aa af AB §. 24; og de hele Virkninger af P i et hvert Punkt af AB antages at være lige store. Thi da er ingen Tvivl, at jo den hele Virkning er som den hastiggjørende Kraft betragtet 1) i fig. 2) I Henseende til det igiennemløbne elementære Rum: Thi i samme Forhold som en af disse vorer, vorer og Virkningen. Og da saaledes Elementet af Rummet fuldkommen bestemmer den hele Virkning af P over dx , behøves ingenlunde Betragtningen af Tiden.

Den hele Sum af Pressionerne over AB er derfor $= \int Pdx = Px$, naar P er en bestandig Pression, som den af Tyngden; saa det er unegteligt, at den hele Sum af Pressionerne er proportionert x , eller AB: Og da i Tingenes Fald x er som v^2 , saa er der heller ikke Tvivl paa, at jo det Tab, som Krafterne i Naturen giere, for at bringe ved Faldet af Tyngden Hastighederne til Veie, bliver som disse Hastighedsers Quadrat.

Imidler:

under Faldet Tyngdens Pression er paa den faldende Ting den samme, men man maa vel agte, at den hele Pression ei anvendes paa at formere Hastigheden, en Deel af den anvendes paa at følge Tingen, saasnart den nemlig allerede

haber

Imidlertid er det tillige uimodsigelig sandt, at alle Tyngdens Love hermed bestaaer, alene at man vel iagttager; at endsskient den virkelige Pression af Tyngden er i alle Punkter af AB lige stor, saa er dog den Deel af Pressionen, hvilken foraarsager Hastigheden, derfor ikke i alle disse Punkter lige stor, og det er egentlig i denne Forskiel imellem Pressionerne og de hastiggjørende Kræfter, som man ikke nok tog sig vare for, at de feromtalte Stridigheder sandt deres sande Oprindelse. Thi at Summen af de hele Kræfter, hvilke Driften af Tyngden anvender over AB, jo er $\int Pdx$ uden videre Hensigt til Tiden er unegteligt, fordi Pressionen antages at være i alle Punkter af AB den samme. Saafermt derimod, som man vil vide, hvad Hastigheden bliver, der foraarsages af Pressionerne over AB, da kommer det ei alene an paa at vide, hvad den absolute Pression er i et hvert Element aa , men tillige hvad Deel af den at der i det Element aa foraarsager Hastigheden. Denne sidste, seer man let, kommer an paa, hvor lange eller hvor kort at en Ting i at falde igiennem aa , holder sig oppe i dette Element, saa man i denne Undersegning nødvendig maa tage Tiden i Betragtning. Men den Tid en Ting opholder sig i et hvert af disse Element-

haver en Hastighed; eller saa at sige, for at give den hastiggjørende Kraft først det, der behøves til at passere ind i den Ting, som bevæges, for siden, naar den er kommen ind i samme, da at drive den endnu længer fort.

§. 273.

ter, seer man let, er i forkeert Forhold af Hastigheden, hvormed den løber ind i dette Element: Thi naar Elementerne dx ansees som lige store, bliver Tiden igiennem et hvert af dem, som $\frac{1}{v}$, om Hastigheden kaldes v . Men da Virkningen af den elementære Pression Pdx maa, i Henseende til Hastigheden, som den kan frembringe meer i et Element end i et andet, være den Tid proportionert, udi hvilken den i dette Element kan virke paa den Inertie, som igiennemløber den, saa bliver af den hele Pression Pdx den hastiggjørende Kraft ikke uden den Deel $\frac{1}{v}$, og den er derfor $= \frac{Pdx}{mv}$: Denne

igien er proportionert sin fulde Virkning eller Elementet af Hastigheden, som i det Element af Rummet tilveiebringes, derfor bliver $\frac{Pdx}{mv} = dv$; men $\frac{dx}{v} = dt$. Følgelig bliver $\frac{P}{m} dt = dv$.

Hvoraf alle Tyngdens Love flyde, efter hvad der i det andet Tillæg er blevet beviist, alene at P er en bestandig Pression. Følgelig, ere disse Naturens Love saa langt fra ikke stridige med hverandre, at meget meer, som man seer, den ene af dem flyder ganske og aldeles af den anden.

Dette viser, at den feromtalte Stridighed i de første Grunde ikke er virkelig. Men deraf synes endnu ikke ganske tydelig

§. 273.

Altsaa maa den hele hastiggjorende Kraft af Tingen be-
 trages som inddeelt i to Dele; i en, hvorved denne Kraft, En Hoved-Mærkning i Hen-
 saa at sige, faaer en Beqvæmhed til at passere ind i Tingen, seende til at fore-
staae Maaden,
hvorpaa af

Arr 3

for

tydelig at selge, at Summen af de levende Kræfter er som
 Hastighedens Quadrat, eller som $\int p dx$. Man kunde maa-

ske meget meer falde paa at slutte saaledes; at siden, naar
 det første Øieblik i A er forbi, da den hastiggjorende Kraft

$$\frac{P dx}{mv} = \frac{P dx}{m dv} = \frac{P dx}{m dx} \text{ (see første Tillæg) } = \frac{P}{m}, \text{ ikke uden en}$$

Deel af Tyngdens Pression driver Inertien videre fort, heller
 ikke uden en ligesaadan Deel af Tyngden gik over i Inertien,

for at udgiøre den Sum af Pressioner, udaf hvilke de leven-

de Kræfter bestaae, og at derfor ei $\int P dx$, men $\int P dt$ maatte
 være Maalet af disse Kræfter: Thi de hastiggjorende Kræ-

fter ere altid som $\int P dt$. Men at ei alene den Deel af Pres-

sionen, der forarsager Hastigheden, men endog i alle Punkter
 af AB den hele Pression meddeler sig Inertien, sees uimod-

sigelig deraf, at de hastiggjorende Pressioner i alle Punk-

ter af AB ere døde Kræfter, og maa ikke alene vurderes af
 dem selv simpel hen, men af deres Moment. Selgelig og af

Hastigheden af Bevælgelsen i det Punkt, som de bevæge.
 Derfor da den hastiggjorende Kraft i ethvert Element aa , er

$$\frac{P dx}{mv}, \text{ bliver dog desuagtet den hele Pression paa Inertien, i}$$

$$\text{det Hastigheden meddeles, eller det hele Moment} = \frac{P dx}{mv} v$$

$$= P dx$$

Presſionerne de for heel og hulden at blive den iboende, om jeg ſaa ſkal ſige,
 haſtiggjørende eller for at bringe det dertil, at Preſſionen kan ſkee. Den
 Kræfter blive til. anden Deel er den, hvorved den driver Tingen videre fort.
 Denne ſiſte udgjør alene og forvolder Haſtighedens Tilvæxt,
 men begge med hinanden, ere og blive i Tingen, fordi i den
 frie Bevægelse aldrig noget af Kræften tabes; ſaa de begge
 tillige udgøre Tingenes ſamtlige og levende Kræfter.

§. 274.

Al Maanden, Følgelig vore de levende Kræfter hvert Dieblif, ei alene
 hvorpaa de le- efter Forhold af Haſtighedens eller Tidens Tilvæxt, men des-
 vende Kræfter uden

= Pdx , og $\int Pdx$ ſaaledes den hele Sum af de Preſſioner,
 hvilke imidlertid, at Haſtigheden meddeles, gaae over i
 Inertien.

Saaledes er det ſaa langt fra, at de Principſ, der an-
 gaae Preſſionerne eller de døde Kræfter, ſtride med de for de
 levende Kræfter, naar diſſe ſiſte anſees at være Quadraten
 af Haſtigheden proportionert, at meget meer de levende
 Kræfter og dette deres Maal er en ſimpel Følge af Levene for
 Preſſionerne. Derfor nemlig, fordi de døde Kræfter ere
 ſom Maſſen multiplicert med Haſtigheden, derfor ere de le-
 vende, efter hvad man ſeer af det nylig beviiſte, ſom Maſſen
 i Haſtighedens Quadrat. Thi den hele Preſſion paa Iner-
 tien maa ei alene dæmmes af den Hindring, ſom Preſſionen
 umiddelbar forefinder i Haſtighedens Meddeeling, men af
 den hele Hindring, ſom Preſſionen forefinder i at meddele
 Haſtigheden, formedelt en foregaaende Haſtighed.

uden efter Forhold af den hele Hastighed, som Diebliffet for-
 ud var i Tingen. Og følger, da Hastigheden multiplicert ^{Preffionerne,}
 med de uendelig smaa Tider er Rummet, saa formeres de le- ^{bevises, at de ere}
 vende Kræfter, efter Hoiden AB, hvorigiennem Tingen fal- ^{som Massen}
 der, imidlertid at ifkuns en vis Deel af de Kræfter, som ^{multiplicere}
 passere over i Tingen, forbolde Hastighedens Tilvæxt, der ^{med Hastighe-}
 er simpel hen som Quadraten af det igienemløbne Rum. ^{dens Quadr.}

§. 275.

Man seer deraf, at Preffionen altid er Hastigheden ^{Stuening af}
 proportionert eller Tiden fra Begyndelsen af Faldet, og hvor- ^{det foregaaende.}
 for, fordi den i alle Punkter af det Rum, hvorigiennem fal-
 des, er lige stor. Man seer videre, at der aldeles ingen
 Stridighed er imellem de store Grund-Sandheder, at Tyng-
 den virker lige stærk i alle Punkter af Linien AB, og at dog
 Hastighedernes Formerelse ikke retter sig efter disse Punkter,
 men alene efter de lige store Tider. Følger det klart, at det
 forhen giorte Beviis §. 267. altid gielder; saa de Kræf-
 ter, hvilke ere i de Ting, der gaae fort med en virkelig Be-
 vægelse, nødvendig bør dommes af Materiens Mængde mul-
 tiplicert med Hastighedens Quadraten; og at derfor

- 1) Dersom Ting i Bevægelse gaae fort med ulige Mate-
 ries Mængder, men med lige store Hastigheder, ere
 Virkningerne som Mængderne af Materien.
- 2) Dersom Materierne eller Masserne ere de samme, ere
 deres Kræfter under sig som Quadraterne af Hastig-
 hederne.

3) At

3) At disse levende Kræfter ere altid under sig, som de hele Virkninger, ved hvilke de blive til; og deraf sees atter igien, at de Kræfter, som udfordres til at forstaae en Ting adskillige Hastigheder, ere altid som Quadraterne af disse Hastigheder.

Saaledes behøves til at give en Ting en Hastighed som 1, ikke uden en Kraft, som 1; til at meddele en Hastighed som 2, en Kraft som 4; til at meddele en Hastighed som 3, en Kraft som 9.

4) Og derfor kan unegtelig paa en vis Maade, nemlig paa den her forklarte, siges: At Tingene altid ulige vanskelige drives fort med en større Hastighed end med en mindre; saa en hver nye Grad af Tilvæxt i Hastighed udfordrer altid i Forhold større Kræfter end den nest forrige, for at blive til.

§. 276.

Deraf forstaaes nu overmaade let, hvorfor de Ting, som ere i en virkelig Bevægelse, kunne flyde hindrende Materier fort af Størrelser under sig som Quadraterne af de Hastigheder, hvormed de bevæges. Fordi nemlig, naar hindrende Ting møde, som tilintetgiøre deres hele Hastighed, ei alene de af deres Kræfter virke, som have forarsaget Hastigheden, hvormed de bevæges, men og de andre, hvilke samtlig de, saa at sige, Tingene iboende Kræfter have anvendt for at følge den i dennem forud varende Bevægelse; forud nemlig for det Dieblis, da de, saa at sige, passerede ind i Tingene.

§. 277.

§. 277.

Vi ville endnu i denne Forelæsning til Slutning vise, ^{Forhiellen imellem de levende} hvori Hoved-Forhiellen bestaaer imellem de saa kaldte døde og ^{Kræfter og} levende Kræfter. ^{Pressionerne} Næmlig ^{vises omstændel-}

I) Pressionerne doe i det Dieblif ud, da de fødes og virke; de doe ud, saa at sige, paa det Sted de ere. De levende Kræfter blive bestandig ved i en virkelig Bevægelse saa længe de ere til, og doe ei altid ud med et, men kunne tabes Stykkevis, eftersom de treffe større eller mindre Hindringer til.

Saaledes om et Lod ligger og trykker paa et ubevægeligt Bret, da doe alle Dieblif Pressionerne eller Trykningerne ud; deres Virkning er altid bestemt af en vis Storrelse og til et vist Sted, bevæge de ei i første Dieblif, bevæge de aldrig.

En Ting derimod, som er sat i Bevægelse, en Kugle for Ex., dens Virkning er ei bunden til et vist Sted, men bestaaer i en Streben fra Sted til Sted. Etersom den støder an paa en større eller mindre Ting til, virker den og meer eller mindre, saa dens Virkning tabes ei i en uendelig liden Tid saa plat som Pressionens, men kan tabes meer eller mindre, eftersom Hindringen er til, saa den altid er ubestemt. Et Slag, som ei første Gang bevæger, bevæger, naar det ofte igientages, saa Forhiellen imellem Pressionerne og de levende Kræfter er i alle Henseende overmaade stor.

§. 278.

Videre vore Pressionerne alle Dieblif med samme Kraft til igien, og fornye sig saa at sige i at forgaae. De levende

Kræfter derimod ere de engang tabte, da ere de for bestandig tabte. Vi skulle i det følgende faae en anden endnu betydeligere Forskiel imellem disse to Slags Kræfter at see, men som vi endnu ikke kunde bevise af de hidtil lagte Grunde, hvorfor vi og ville udelade saavel denne som andre herhid hørende Betragtninger, saa længe til de naturlig viis flyde af vore forudgaaende Beviser.

§. 279.

Maae at op-
løse de levende
Kræfter udi
andre.

Men et kunde vi ikke undlade at melde om. Alt nemlig de levende Kræfter altid kunde opløses ved Kræfternes Parallelogram i to andre, som staae til rette Vinkler paa hinanden, og at ligeledes af to retvinklede Side-Kræfter faaes en sammensat Kraft efter Diagonalen saa stor som Diagonalen. Saaledes, om (Taf. XII. Fig. 7.) ved BE og BD forestilles to levende Kræfter i Størrelse og Direktion som BE og BD, hvilke begge tillige antages at være i et og det samme Legeme, da er efter den sædvanlige og foranførte Theorie af Kræfternes Parallelogram BC den sammensatte Krafts Direktion, og i Følge Theorien af de levende Kræfter er BC den af BD og BE tilveiebragte Diagonal-Kraft. Thi $BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + BE^2$, hvilket og bør være, fordi to deslige Kræfter, som BE og BD, hverken hielpe eller hindre hverandre, saa at derfor den af BC tilveiebragte Kraft maa være saa stor som de den tilveiebringende.

Ligeledes sees, at en levende Kraft, som BC, altid kan ansees for en Diagonal-Kraft, og opløses i to andre

Side-

Side-Kræfter BE og BD, som staae paa hverandre til en ret Vinkel. Da den levende Kraft efter BE bliver som BE^2 , og den efter BD som BD^2 (*).

Ser=

- (*) Dette Tilfælde af de levende Kræfters Opløsning er af det i §. 275 For. allerede sagte overmaade klart. Det eneste, som en eftertænkfuld Læser kunde falde paa at spørge, bliver: Hvorfor man ikke kan slutte ligeledes i Kræfternes Parallelogram, at nemlig (Taf. 12. Fig. 7.) Kræften i Diagonalen BC, naar der handles om døde Kræfter eller Pressioner, maa være saa stor som Side-Kræfterne BD og BE, hvilket den dog ikke er? Thi den hele sammensatte Kraft er som BC, Side-Kræfterne som BE og BD, men BC er mindre end BD og BE, fordi to Sider i Trianglet ere altid større end den tredje. Saa at i Kræfternes Parallelogram to Kræfter, uagtet at de ei hindre hverandre, saaledes synes at giøre en Virkning, mindre end den de selv ere. Hvilket ikke uden Marsag synes at være en anseelig Paradoxie i den Lærdom om Kræfterne; en Paradoxie, som synes at være uadskillelig fra Kræfternes Parallelogram.

Hr. Bilsfinger haver meget vel besvart denne Vanskelighed i *Actis Petropolitanis Tom. I. de Viribus Corpori moto insitis*. Og da man aldrig kan giøre sig Umage nok, saa længe noget paatrivielseligt eller stridigt synes at hæfte ved de første Grunde, for aldeles at udrydde det, saa kan jeg ikke forbi-gaae at anføre ganske kortelig hans skarpsindige Anmerkninger.

Sextende Forelæsning.

Om

Tingenes Sammenstød, som besidde
levende Kræfter, saavel som om deres adskilli-
ge Beskaffenheder under sig.

§. 280.

Hvad de faste
Ting ere og de-
res almindelige
Inddeeling.

Før vi gaae til Forklaringen af Reglerne, hvorefter Tin-
gene retter sig i deres Sammenstød, saa tidt som de
enten begge, eller en af dem alene haver en virkelig Bevægelse,
bliver det nødvendigt, med saa Ord at tale om disse Ting, for
saa vidt, som de ere adskillige under sig. I denne Henseen-
de maa allerførst agtes, at vi i det nærværende ikke handle
om

- 1) Naar man siger, at de Kræfter, hvilke staae paa hverandre
under en ret Vinkel, ikke hindre hverandre, da maa man ei
see paa Bevægelsen, for saa vidt som den skeer ndi ret Linie;
thi da kan ingen Tvivl være paa, at jo Bevægelsen efter DB
hindrer den efter BE, og den efter BE den efter DB, saa
at den ikke skeer i nogen af disse Linier; Men man maa see
paa Bevægelsen, for saa vidt at den skeer over et Plan, da det
i Henseende til Situationen af det Bevægede paa Planet,
altid

om andre end de faste Ting, det er at sige om de, hvis Dele ingen Bequemhed have til at bevæge sig efter alle Direktioner og uden Hindring, de ene imellem de andre, og hvis Dele desuden henge sammen med en kiendelig Kraft. De flyden-

§ 33 3

de

altid kommer paa et ud, hvad heller den Ting B drives af en eneste Kraft, som BC, eller af to andre, hvilke virke hver for sig som BE og BD. Er EBD en ret Vinkel, hindre disse Bevægelser ikke hverandre i Henseende til det Punkts C Situation og Legemets B Bevægelse paa Planet.

- n. 2) Bevægelsen over Linien BE kan derfor ansees som en Bevægelse af en Dimension; Den sammensatte over Planet efter BC derimod, som en Bevægelse af to Dimensioner. Thi det er eienlydligt, at Bevægelsen i Linien BE skeer immer lige frem efter dens Elementer, saa i den intet andet end den rette Linie selv behøver at tages udi Betragtning, hvorimod Bevægelsen paa Planet henføres til denne anden, da Legemet B bevæger sig immerfort, som før, efter Linien BE, imidlertid at denne sidste idelig med en Hastighed som DB synker ned efter Direktion af DB, saa at det saaledes igienneimeløbne Rum paa Planet er et Parallelogram, eller af to Dimensioner.

- n. 3) Derfor kan man paa en vis Maade sige, at endog udi Pressionerne selv Kraften efter BC er saa stor som den efter BE og BD, skient Diagonalen BC, ved hvilken den forestilles, ei er saa stor som Siderne BE og BD. Thi da
Pressio-

de Ting ere deres imodfatte, fordi disses Dele vige for den mindste Pression, og bevæges uden Hinder frit under hverandre efter alle Direktioner. De flydende Tings Stød eller rettere Pression skal blive undersøgt i Hydraulik. Vi iagttage

Pressionen efter BC bør dømmes af, hvad den selv er og af dens Hastighed, eller af det Rum, som den i en vis given Tid i ensdan Bevægelse igiennemløber, men baade Pressionen selv og den Vel, den igiennemløber, begge forestilles ved BC, saa bliver Pressionens Moment efter BC som BC^2 , imidlertid at de efter DB og BE ere som BD^2 og BE^2 , fordi Tiderne igiennem BD, BE og BC ere de samme. Og derfor $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ligesaa vel i Kræfternes Parallelogram, som udi Oplesningen af de levende Kræfter, naar EBD er en ret Vinkel.

- n. 4) Man kan ydermere agte, at i Felge §. 59 er det ei alene en Pression efter Diagonalen BC, som kan opløses i de to med den ligegyldige Side-Pressioner BE og BD, men at endog enhver Hastighed, som BC, kan og bør anses som ligegyldig med BE og BD. Dette forstaaes ligeledes let af Anmerkningerne udi No. 2. Deraf nemlig, at Hastigheden efter BE er alene af en Dimension, naar den betragtes simpel hen, som at skee efter den rette Linie; af to Dimensioner derimod, naar den betragtes som at skee hen over Plagnet. Saa man derfor i dette Tilfælde forklarer sig fast bedre, naar man siger, at Bevægelsen efter BC er ligegyldig med

tage her alene i Henseende til de faste Ting, at de inddeles i de haarde og bløde. De fuldkommen haarde ere de, hvis Dele ei vige ind efter i Legemet, saa det derfor brykkes, naar de bevæges. Bløde kaldes derimod alle de Ting, hvis Dele ved Kræfternes Trykning eller Slag kunde bevæge sig ind ad
i de

de to andre over BD og BE, end naar dette siges om Hastigheden. Thi i den ensdanne Bevægelse bør Rummet altid dømmes af Hastigheden i Tiden, saa at BC er i denne Henseende af to Dimensioner, saavel som BE og BD, men da Tiden er i alle to Bevægelser den samme, kommer det paa et ud, hvad heller at man taler om Bevægelsen selv, eller om dens Hastighed alene. Men er Bevægelsen efter BC af to Dimensioner, da bør ikke sees paa, om BC er saa stor som BE og BD. Men om Stillingen af det Punkt C imod B paa Planet er den samme ved Bevægelsen efter BC alene, som ved de to Bevægelser efter BE og BD. Hvilket saa altid at være, let sees.

- n. 5) Kræfternes Parallelogram fører i Almindelighed med sig, saa tidt som Side-Kræfterne virke under en spits Vinkel, at Quadraten af Diagonalen ab (Taf. XII. Fig. 8.) er saa stor som Quadraten af Summen $ac + cb$ af de Linier, som tilkændegever de efter samme Direktion bevægende Kræfter og af Quadraten af Linien ae , hvilken tilkændegever den Kraft, som ei hindrer de forrige, men alene forandrer Direktionen; hvilket strax sees, naar den ene Side-Kraft ac opløses i de to andre
perpen-

i de Legemer, som Kræfterne virke paa. De kaldes i egentlig Mening blode, om Delene ei kunde give sig ud igien, ei heller efter at Kræfternes Virkning er forbie, enten ganske eller tildeels igientage deres forrige Sted. Derimod kaldes de blode Ting Elastiske, naar deres Dele, efter at have viget ud

perpendikulær paa hinanden; i ec , der virker efter samme Direktion som ad , og i ae , som alene forandrer Direktionen.

Da nu de levende Kræfter ere hver for sig tagne som Quadraterne ad^2 , ac^2 , ab^2 , saa er under alle stier Direktioner den levende Kraft efter ab større end de to levende Kræfter efter ac og ad om det Parallelogram $2ec. cb$. Thi $ab^2 = ae^2 + eb^2 = ae^2 + ec^2 (= ac^2) + cb^2 + 2ec. cb$.

Ikke desto mindre maae dog altid den levende Kraft over ab kunde opløses i de to andre Side-Kræfter ac og ad . Og ligeledes maa to levende Kræfter efter ac og ad altid kunde tilveiebringe en tredie levende Kraft, saa stor som Diagonalen. Thi den levende Kraft efter ac er som ac^2 . Følgelig, Hastigheden som ac , men Hastigheden ac kan opløses i de to ae og ec , og det dog saaledes, at ved denne nye Oplosning de levende Kræfter endnu blive de samme; Thi efter §. 279 er i de levende Kræfter altid $ac^2 = ae^2 + ec^2$. Følgelig bliver den hele Hastighed efter ad , som $ec + cb$. Den dertil svarende levende Kraft er derfor $ec^2 + 2. ec. cb + cb^2$, og den levende Kraft efter ae er ae^2 : Da nu de Kræfter efter ac og ab ikke forhindre hverandre, saa er den af ad

ud for Kræfternes Virkning, igientage enten ganske eller tildeels deres forrige Sted og Orden, saa snart som at Kræfternes Virkning er forbie. I øvrigt indlade vi os her ikke i at undersøge, hvad Kræfter i Naturen der forvolde Delenes Sammenhang i de faste Ting, dette henhører til Physik, og ikke til Mechanik.

§. 281.

og ac under den spitse Vinkel dac tilveiebragte levende Kraft saa stor som ab^2 , fordi $ab^2 = ac^2 + cb^2$. Saa man seer, at saa tidt som levende Kræfter efter adskillige Direktioner antages tillige at være udi en og den samme Ting, da om deres Direktioner støde sammen under en spits Vinkel, tilveiebringe de en levende Kraft, større end de selv ere. Men disse Kræfter kunde dog altid opløses efter Kræfternes Parallelogram, ikke i lige store, men i ligegyldige.

n. 6) Denne Paradoxie er paa sit største, naar Vinklen dac er mindst eller $= 0$. Thi da bliver $ab^2 = (ad + ac)^2$. Saa at, om to Kræfter der ere i en og den samme Ting, og som virke efter den samme Direktion, forarsage hver for sig en Hastighed som 1. Da er den levende Kraft, de tilveiebringe, $= 4$. Ere de af dem tilveiebragte Hastigheder som 2 og 1. Da bliver den levende Kraft $= 9$. o. s. v.

n. 7) Ligeledes, saa tidt som Kræfterne støde sammen under en stump Vinkel dac (Taf. XII. Fig. 15.), er i Følge Parallelogrammets geometriske Egenskaber, Quadraten af Diagonalen alene saa stor som Quadraten af den Linie, der tilkiende-

Et

giver

§. 281.

Fuldkommen haarde Ting kaldes derfor de, som i deres Dele ere aldeles ubøielige. Da nu intet Stød kan forstaaes at skee, saa at Bevægelsen ved det skulde af en Deel kunde meddeles den anden, med mindre at begge Tingene

fulle

giver Forskiellen af de imodsatte Kræfter, og som Quadraten af den Kraft, der alene forandrer Direktionen, eller $ab^2 = cb^2 + ac^2 = (ad - af)^2 + ac^2 = ad^2 + af^2 + ac^2 - 2ad.af$.

Følgelig, om dette atter igien anvendes til ac , ab og ad , betragtede som levende Kræfter, da siden den efter ac er ac^2 , og dens Hastighed ac , men baade den levende Kraft og Hastigheden kunde opløses i de to af og fe , saa alt er endnu ligegyldigt, saa bliver den virkelige Hastighed under denne de levende Kræfters Direktion af stump Vinkel ikke uden $ad = fa$, den hele levende Kraft efter ad bliver derfor ikke uden $(ad - af)^2$, og da den efter ac er ac^2 , men disse to Kræfter ere lige store med den levende Kraft efter ab . Saa tilveiebringe de levende Kræfter i dette Tilfælde en mindre levende Kraft, end hvad de selv ere, men den levende Kraft efter Diagonalen bliver dog altid ligegyldig med de levende Kræfter efter Parallelogrammets Sider.

I alt dette maa vel agtes, at her ikke handles om de Kræfters Stød, som virke uden fra paa Legemet, men alene om adskillige levende Kræfter, hvilke tillige ere Tingene indvendige.

skulle kunne lide Forandring af hverandre, og dette kan ikke skee i de fuldkommen haarde Ting, fordi deres Dele ei give efter, saa ere samtlig de saa kaldte fuldkommen haarde Ting uskiftede til al den Slags Bevægelse, som kommer af Tingenes

nes

n. 8) En Tvivl kan desuagtet her falde eftertænksumme Læsere ind, som ganske vist er af Betydning. Denne nemlig: At endskient det forrige Beviis No. 5 og 7 synes at være uimodsigelig klart, saa synes det dog ikke mindre rigtigt og upaatvivleligt, at, endskient i Folge Reglerne for Parallelogrammet, hvoraf vi have udført vore Slutninger i No. 5 og 7, unegtelig følger, at den hele Hastighed efter ad bliver eb (Taf. XII. Fig. 8.), og den hele levende Kraft efter ad derfor som eb^2 , saa bliver dog desuagtet den levende Kraft efter ad ved den Krafts ac Oplesning ikke uden $ec^2 + ad^2$, siden $ac^2 = ae^2 + ec^2$, og det synes at maatte være en Sandhed, at Kræfterne ikke kunne meddele meer efter en Direktion, end hvad de selv efter samme Direktion ere.

Men man maa agte, at endskient ved Oplesningen af ac efter ad unegtelig ikke faaes meer end en levende Kraft ec^2 , naar samme henføres til et Legeme, som ikke haver en allerede forudgaaende Bevægelse efter den Direktion ad , saa er dog Sagen her en langt anden. Kraften efter ec skal giere, at Legemet bevæger sig fort med en Hastighed som ec , efter den Direktion ad , da det allerede forud haver en Hastighed efter ad som cb . Følgelig er det klart, at den nye Kraft efter ac ,

nes Sammenstød. De findes og, saa vidt al Erfaring lærer, heller ikke i Verden. De synes heller ikke at kunne være til stor Nytte, om de fandtes. Derimod findes en Mængde Ting, som antage ikke uden en meget liden Forandrung

som kommer til ved Oplosningen af ac udi Side-Kræfterne, maa betragtes ei alene for saa vidt, den virkelig bevæger Inertien a over et Rum som ec , men tillige for saa vidt den, for at kunde giere dette, bevæger sig selv over cb , og den Kraft, der allerede er i a efter ad ligeledes over ec . Men da den nye Kraft, som faaes ved Oplosningen af ac efter ad , for saa vidt den bevæger Inertien a igiennem ec , er $a. ec$; saa bliver den

1) For saavidt den bevæger denne Inertie og med den sig selv igiennem $ec = a. ec$, $ec = a. ec^2$. Thi den bør her ansees som sin egen Modstand, og derfor at være i denne Henseende saa stor som hvad den selv er, multiplicert med Rummet, den igiennemløber.

2) For saa vidt den, for at giere denne Virkning, maa og bevæge sig selv igiennem det Rum cb , i samme Tid, som den bevæger sig selv og hele Inertien a igiennem ec , bliver den af denne anden Aarsag $= a. ec. cb$. §. 23.

3) For saa vidt, som den maa bevæge den Kraft efter ad , hvormed a allerede drives igiennem ec , bliver den atter igien $a. cb. ec$. Thi Kraften i a driver i samme Tid Inertien igiennem cb , og er derfor som $a. cb$; Men da den betragtet

dring af Stødet, fordi deres Dele i det Dieblis, det staaer paa, ikke uden overmaade lidet bevæges. Forarsager da denne ringe Bevægelse, at de springe eller revne; med et Ord, at Delene fuldkommen gaae ud af hverandre, uden at henge sammen, da kaldes de sædvanlig haarde Ting, skiont al Erfaring viser, at de henhøre til de elastiske. Thi derfor give alle disse Ting, i det de springe, en Lyd fra sig, som beviser, at deres Dele zittre under Slaget og bevæges. En Marmor-Kugle, som falder paa et Marmor-Bord, belagt med tyndt Bly, efterlader ikke efter Slaget i Blyet et ukiendelig Punkt, men en kiendelig Plet.

Ett 3

§. 282.

tragtet som Modstand bevæges igiennem ec , saa bliver den bevægende Kraft, som dertil maa anvendes, $a. ec. cb.$ §. 23.

4) Saaledes bliver den hele Virkning af den nye Kraft efter ec , som faaes ved Oplesningen af $ce = 2a. cb. ce + a. ec^2$. Og da Kræfterne ere deres hele Virkning proportionerte, saa bliver saaledes den hele levende Kraft efter ac , som faaes ved Oplesningen af ac udi ac og $ec = a. ec^2 + 2a. cb. ce.$ §. 23. 17.

5) Men desuden bliver den levende Kraft, som var udi a for Oplesningen $= a. ad^2$. Altsaa ere de virkelige levende Kræfter efter ac og ad , naar deres fulde Virkning betragtes, $= a. ec^2 + 2a. cb. ce + a. ad^2 = a. ab^2$. Hvoraf sees, at Bevæger, tagne af de physiske Aarsager, træffe fuldkommen ind med de forhen givne i No. 5 og 7.

§. 282.

Forstikket in-
lem de fuldkom-
men bløde og
fuldkommen
haarde Ting.

Bløde kaldes i egentlig Mening alle de Ting, hvis Dele vige efter Slagets Direktion, uden igien at gaae tilbage, eller sætte den slagne Ting i sin forrige Figur igien, efter at Slaget er forbie, §. 280. Bløde Ting forandres saaledes under Slaget aldeles udi Figuren, deres Dele vige og indtage en anden Orden i Henseende til hverandre indbyrdes, og det er heri alene, at de ere, i Henseende til Stødet, de fuldkommen haarde Ting imodsatte, hvis Dele ei vige, og hvis Figur hverken i Slaget eller efter Slaget af det, som af sin Aarsag, have antaget nogen Forandring. Derimod ere begge disse Slags af Ting fuldkommen de samme i den Henseende, som her fortæner særdeles at overlegges, deri nemlig, at i ingen af dem Delene igien efter Slaget gaae tilbage, for at igientage deres forrige Figur, hvilken de under Slaget havde tabt. Det er i denne Henseende, at vi i det nærværende ville henføre dem begge til en Klasse, og at vi ansee dem som de samme, uagtet at de i den forstømtalte Henseende vare hverandre fuldkommen imodsatte.

§. 283.

De elastiske
Tings Forstik
fra begge de to
forrige Slags af
Ting.

Elastiske Ting derimod ere i denne Henseende de forrige begge fuldkommen imodsatte, thi ved dem forstaae vi alle de faste Ting, hvis Dele under Slaget antage en Forandring, og efter Slaget sætter sig igien i deres forrige Tilstand, §. 280. det er, de antage igien deres forrige Figur. Vi undersøge her atter igien ikke, hvorved dette skeer, eller hvad det er for Kræfter,

Kræfter i Naturen, som forårsage Elasticiteten. Saavel dette, som de øvrige de elastiske Tings merkelige Egenskaber, overlade vi til de physiske Betragtninger, iblant hvilke de egentlig henhøre.

Men da vi ikke en gang i vores Mechanik, hvor vi dog dertil paa en vis Maade kunde være berettigede, ville lade det komme an paa blotte Hypotheser, men som vi allerede i det forrige have gjort, bestandig ville stadfæste de vigtige Hoved-Poster ved en sikker Erfaring, saa ville vi og her, skiont ikkuns ved et Exempel, vise, hvorledes det gaaer til i de Elastiske Tings Forandring af Stødet; overladende ligeledes Mængden af disse Beviser til de physiske Afhandlinger.

§. 284.

Er da (T. XII. §. 5.) ABCG en Ring af Jern eller af en anden Metal, ophængt i en Traad udi A. Inden for Cirklen eller Ringen i 3 til 4 Liniers Afstand fra A, sættes udi L en liden Træ-Kugle, saasnart da som man slaaer med Magt paa Ringen i C, springer Kuglen udi L med en stærk Bevægelse hen imod C, hvoraf man seer, at i det Øieblik, da Slaget skeer, bevæger sig det Punkt A henimod E. En elastisk Ring eller Cirkel maa derfor i Slaget antage Figuren af en Oval, og blive plattere, fordi den bevæges hen efter Direktionen AC, siden Kuglen i L ellers ikke kunde bevæges henimod C. Følgelig er det ikke alene de Dele, som af Slaget umiddelbar røres, hvilke i de elastiske Tings Sammenstød forandres, men det er det hele Legeme.

Thi forestiller man sig videre det hele Rum ABCG som opfyldt med lutter deslige koncentriske Ringe, da maa samtlig deres Bevægelse endnu være den samme. Saa man deraf seer, at de elastiske Ring, i det Stødet meddeles, forandres i Henseende til deres hele Indhold og antage, saa længe Slaget staaer paa, en anden Figur.

§. 285.

I hvad Henseende at de elastiske Ring kun: de siges at være de haarde og bløde imodfætte, men disse sidste derimod at være af et Slags.

Erfaring viser, at naar Slaget er forbi, tage en Mængde Ring uden Forandring deres forrige Figur igien, disse er det, som man kalder fuldkommen elastiske. De, som ikke igientage efter Slaget deres, uden tildeels, ere ei heller, uden efter visse Grader, elastiske. Det er de første, som vi her ville tage under Betragtning, for af deres Bevægelse efter Slaget at slutte os til de Materiers Bevægelse, som ei ere elastiske, men enten haarde eller bløde; hvilket saa meget lettere kan skee, som disse sidste efter det allerede sagte udgiøre et eneste Slags, hvis Bevægelse bør være i visse Henseende, som vi nærmere skulde forklare, fuldkommen det imodfætte af de elastiske Rings Bevægelse.

§. 286.

Hoved-Reglen for Ringenes Sammenstød forklæres.

Til den Ende maa ydermere agtes, at saa tidt som en Ring støder an paa en anden, da staae begge hinanden imod, indtil de have faaet en lige stor og fælles Bevægelse: Saa fremt da efter Slaget Ringene ei giøre en nye Bevægelse, for at igientage deres forrige Figur, det er, om de ei ere elastiske,

ffe, er den hele Virkning af Slaget dermed til Ende, og Tingene bevæge sig efter det altid med en fælles Hastighed, i hvorledes end at deres Bevægelse før Slaget haver været beskaffen. Saafermt derimod at de i og ved Slaget sammentrykte Ting bemoie sig, efterat den fælles Hastighed er bleven meddeelt, at igientage deres forrige Figur, da er det klart, at derved begynder igien et nyt Sammenstød, hvorved nødvendig de to før sammenføiede Ting søge at skille sig fra hverandre efter stridige eller imodsatte Direktioner; da de ellers, saa tidt dette ikke skeer, forenes, henge sammen og bevæges efter Slaget saavel i samme Direktion, som med samme Hastighed.

§. 287.

Derved maa endnu videre agtes, at saa tidt som Tingene lade sig sammentrykke eller i Slaget forandre, uden at igientage deres forrige Figur, lige saa tidt tabes al den Kraft som det Bevægende under Slaget maa anvende paa at forandre Figuren; Følgelig bliver i de bløde Tings Bevægelse altid nogen Kraft tabt. I de elastiske derimod, om de fuldkommen sætte sig efter Slaget til den Figur, de havde før Slaget, tabes intet: Fordi den samme Kraft behøves til fuldkommen at igienbringe Figuren, som der forhen udfordredes til at forandre den.

§. 288.

Dette forudsat, ere alle de Grunde forklaret, som behøves til at gjøre en almindelig Udregning for de faste Tings

Uu u

Bevæ-

I hvad Tilfælde at Kraften ved Sammenstødet tabes, og i hvad Tilfælde at ingen tabes.

For Kiøffen imellem det lige og fievte Sammenstød forklares.

Bevægelse, for saa vidt som disse sidste ansees at være enten fuldkommen elastiske, eller fuldkommen haarde og bløde. Imidlertid maa dog endnu agtes, at Stødet er to Slags; enten det, som skeer lige, og vi ville kalde det lige Stød; eller det, som skeer skiev, hvilket vi ville kalde det skieve.

Ved det lige Stød forstaaes, at Direktionen af Bevægelsen i Sammenstødet gaaer igiennem begge de Ting, som støde sammen, deres Tyngdes Center, og at denne Linie desuden er perpendicular paa den Deel af begge Tings Superficie, ved hvilken de støde paa hverandre.

I alle andre Tilfælde kaldes Stødet skiev. Vi tage her for det første ikke i Betragtning uden alene det lige Stød.

§. 289.

Opløsningen
af det lige Sam-
menstød foreta-
ges.

For at forekomme med et alt, hvad der kunde foraaresage nogen Vanskelighed i Henseende til Oplosningen, ville vi forestille os de Ting, der bevæges, for at støde hverandre, som to Kugler; da det er klart, at saa tidt som Ting af denne Figur bevæges imod hverandre over den rette Linie, i hvilken deres Centrer ligge, bliver Slaget altid lige, §. 288. Ere da (Taf. XII. Fig. 6.) A og B to deslige Kugler, saa ville vi ansee al den Bevægelse, hvilken gaaer fra A til D, som positiv; den, som gaaer i den imodsatte Direktion fra D til A, som nægtende eller negativ, og antage; at den Ting A bevæger sig fra A henimod B efter Direktion AD; Den Ting B ligeledes efter samme Direktion fra c imod E, da man desuden forud kortelig kan agte.

§. 290.

§. 290.

Alt saa tidt som to deslige Ting bevæge sig hen over en og den samme Linie, da maa deres Bevægelse til eller fra hverandre, som man kalder den relative Bevægelse altid vel skilles fra disse Ting deres virkelige Bevægelse. Thi det er klart, at den relative Bevægelse bliver aldrig andet, end enten Summen af eller Forskiellen imellem deres virkelige Bevægelser; saa at, om af deres virkelige Hastigheder, den i A kaldes H og den i B, h , da bliver, om begge Tingene gaae fra hverandre i samme Linie efter imodsatte Direktioner, denne deres relative Hastighed $= H + h$; saafremt derimod, at de bevæges efter hverandre, bliver deres relative Hastighed $= H - h$, dette er saa klart og simpelt, saa det behøver ingen videre Oplysning.

§. 291.

Men man kan endnu ansee deres Hastighed i Bevægelsen som relativ paa en anden Maade, hvilken gjør Oplosningen af det foresatte Spørgsmaal uendelig let. Man kan betragte begge Tingene A og B, som om de laae paa et horizontalt Bret uden Tyngde, som om dette Bret bevægede sig fort med en vis Hastighed, hvilken derfor blev tilfælles for begge disse Ting A og B, imidlertid at de selv med ingen anden Hastighed gik efter imodsatte Direktioner imod hverandre, end med de alene, som i begge Tingene vare deres Materies Mængder eller Størrelser forkeert Viis proportionerte. Alt dette altid er mueligt, at kunne oplose enhver given Bevægelse i de to

Beskaffenheden af den relative Bevægelse i Tingenes Sammenstød.

Den letteste Maade forklarer, hvorpaa man kan betragte sig af den relative Bevægelse i de elastiske Tinges Sammenstød.

Ting A og B, saa Hastighederne dog blive uforandrede og i begge Tilfælde de samme, skulde vi ved Udbegningerne selv paa Diebliffet gotgiøre (*).

§. 292.

Den fælles Hastighed bestemmes, hvormed de Legemer, som stæde sammen, bevæge sig.

Bemærkes da, efter hvad forhen er bleven sagt §. 289, at baade A og B henefter den positive Direktion CD, da om Materiens Mængde udi A kaldes M, i B, m. Hastigheden udi A, H; i B, h, og den fælles Hastighed f, den derimod, som

(*) Hvad vi her have sagt, kan i første Diekast give Anledning til at finde i den Lærdom om de levende Kræfter en Art Paradoxie, siden de her uuegtelig synes at føre det Beshnderlige med sig, at ulige store levende Kræfter giøre dog lige store Virkninger. For Ex. Om to Masser ere som 4 og 1, deres Hastigheder som 1 og 4, da ere Masserne Hastighederne proportionerte saaledes, som vi i §. 291. F. have antaget det, selgelig og de døde Kræfter eller Pressionerne lige store; de Virkninger nemlig, som yttre sig for et Diebliff: Men de levende Kræfter selv ere eienshyntlig ulige; I den Masse som 4, ere de som 4, i den Masse som 1, ere de som 16, og selgelig anseelig ulige.

En eftertanksom Læser kan derfor med Ret spørge, hvoreledes Egeuægtten kan stæe med ulige Kræfter. Man kunde simpel hen svare, at dette er i Kræfternes Theorie intet usædvanligt, siden det samme idelig kommer for i Kræfternes Parallel-

som er i forkeert Forhold af Materien udi $A = y$, saa bliver den, der er Materien forkeert Viis proportionert udi $B = \frac{My}{m}$, og da B antages at gaae med samme Hastighed imod A, bliver den derfor $= -\frac{My}{m}$: Følgelig faaes

Uuu 3

1)f

rallelogram. Men man behøver ingen Udflugt, man seer den direkte Marsag lige frem, alene ved at iagttage, hvorledes Stødet meddeles i dette Tilfælde, da Hastighederne ere som Materiernes Mængder forkeert. I det Øieblik, da Stødet skeer, virke alle Materiernes Dele imod hverandre saaledes, at de i det ene Legeme søge at standse Bevægelsen i det andet, om mueligt, aldeles. I B virker enhver Deel imod Delene i A med en Hastighed som 4. Virkningen begynder som en Pression; selgelig maa i Stødets første Begyndelse en Pression af Massa som 1, og Hastighed som 4 i det ene Legeme holde Vægbægt i det andet med en Massa som 4, og med en Hastighed som 1, siden alle Pressioner ere lige store, naar Massen i Hastigheden er lige stor. Betragter man nu det hele Stød, som at forrettes ved lutter deslige Pressioner, der i begge Legemerne udi lige store Tider selge paa hverandre, saa er det, som jeg mener, meer end klart nok, at da enhver af disse Pressioner i det ene Legeme for et hvert enkelt Øieblik tilintetgjør de dertil hørende Pressioner i det andet Legeme, saa maa og i alle de Øieblæk, Stødet staaer paa, de paa hinanden selgende Pressioner tilintetgiøre hverandre,

$$1) f + y = H. \quad 2) f - \frac{My}{m} = h, \text{ hvoraf faaes, naar}$$

$$\text{Storrelsen } f \text{ i begge Lighederne søges, } H - y = h + \frac{My}{m},$$

$$\text{og folgelig er } y = \frac{m \cdot (H - h)}{M + m},$$

som er Værdien af den Hastighed udi A, der er Materiens Storrelse forkeert Wiis proportionert.

Sættes

dre, og at saaledes under det hele Stød maa blive en fuldkommen Egevegt inellem Delenes Virkninger og Igienvirkinger udi begge Legemerne. Saa i denne Anvendelse af de levende Kræfter aldeles ikke noget findes, som er stridigt dermed, at de bestandig ere som Quadraterne af Hastighederne, og den formeente Paradoxie falder bort af sig selv.

Vi have antaget, at i Tingenes Stød Presionerne fulgte en efter den anden, saa at Slaget ei gik til Ende in Instanti, eller i en uendelig liden Tid; At dette er overensstemmende med Naturen, kan man let overbevise sig om, deels af Tingenes Klang under Stødet, deels deraf, at ingen Forandring skeer i Naturen med et Spring, men al Tilvæxt og Afstagselse skeer efter de mindste Differencer, som i et Tilfælde hastigere, i et andet langsommere følge paa hverandre.

Med den Anledning kan jeg ikke undlade at anføre en Anmerkning, som her er af nogen Betydning. At nemlig den Lærdom om de døde Kræfter staaer paa alle Sider og i alle Henseender i saa nøie Forening med den om de levende Kræfter, at den ene af dem langt fra at være den anden imod, bestandig

Sættes Værdien af y i Ligheden $f = H - y$, da findes derved $f = \frac{HM + mb}{M + m}$, hvilket er Værdien af den Hastighed, vi forhen have antaget, som tilføjes for begge Tingene udi Bevægelse A og B, eller for Hastigheden af Brettet, som

standig flyder af den anden, og sætter den saa at sige forud. Saaledes have vi i næstforegaaende Anmerkning til §. 271. beviist, at just fordi Loven for de døde Kræfter var den, den var, blev den for de Levende, den den er; og man beviser ligesaa let, at af Loven for de levende Kræfter flyder den for Pressionerne eller, de døde. Thi det er viensynligt af hvad vi have sagt §. 261. F., at Pressionerne ere intet andet end levende Kræfter udi deres Mindste. Saafermt da, at man antager i to Masser M og m Hastighederne at være v og V , men $M : m = V : v$, saa $V = \frac{Mv}{m}$. Da bliver og $dV = \frac{M}{m}dv$, følgelig dV proportionert dv . Er nu i Følge de levende Kræfters Love $Mvv = mVV$, og man deraf søger Lovene for Pressionerne, og $\frac{M}{m} = a$, saa bliver $2Mvdv = 2mVdV$ og $2Mvdv = 2amVdv$, følgelig $Mv = amV$, eller Mv proportionert mV . Hvilket er det samme, som at Pressionerne forholde sig under sig som Massen i Hastigheden. Og da man i hvad for nogle de to Hastigheder end ere, altid kan sætte $dV = adv$, saa sees at dette maa gælde for alle Pressioner i Følge Lovene for de levende Kræfter.

der skiod sig fort med begge disse Ting, imidlertid at de paa det selv ingen anden Bevægelse havde, end den, der var deres Materies Mængder forkeert Viis proportionert.

§. 293.

Den afvindinge
lige Formel for:
klares ved Exem-
pler.

Endskiont der da ingen Tvivl kan være paa, at naaar Udbegningen giver for de søgte Storrelser lutter oploselige og altid oploselige Tilfælde, vores antagne da jo bør ansees for at være altid mueligt, at Hastighederne af Bevægelsen nemlig i alle Tilfælde kunne saaledes oploses, som sagt er udi andre; saa er det maaskee dog tienligt at vise i Exempler, hvorledes de ene af disse Hastigheder treffe fuldkommen rigtig ind med de andre. Er Hastigheden i $A = H = 6$, Materien $M = 8$, Hastigheden i $B = 4$, Materien i $B = 10$. Da er den fælles Hastighed $f = \frac{HM + mb}{M + m} = \frac{48 + 40}{18} = 4\frac{8}{9}$, og $y = \frac{m \cdot (H - h)}{M + m} = \frac{20}{18} = 1\frac{1}{9}$; folgelig bliver $f + y = 4\frac{8}{9} + 1\frac{1}{9} = 6$, hvilket just er den Hastighed, som vi tillagde A. Saa man seer, at det kommer fuldkommen ud paa et, hvad heller man antager, at A bevæger sig med en fælles Hastighed som $4\frac{8}{9}$, og med en anden, der er i forkeert Forhold af dens Materie $= 1\frac{1}{9}$; eller, om man siger, at den bevæger sig fort med en eneste Hastighed hen efter $AD = 6$. Hvad B angaaer, da siden den haver samme fælles Hastighed $f = 4\frac{8}{9}$ og en negativ Hastighed desuden imod A, som er til den i A i forkeert Forhold af Materiernes Mængde, da bliver denne sidste $= -\frac{8}{9}$, saa den hele Hastighed i $B = 4\frac{8}{9} - \frac{8}{9} = 4$.

= 4. Hvilket er just den Hastighed hen efter BD, som vi have antaget for B.

Derfor A og B antages at bevæge sig imod hverandre, alt for Næsten som før, da bliver $h = -h$, og den fælles Hastighed $f = \frac{HM - mb}{M + m} = \frac{48 - 40}{18} = \frac{4}{9}$. Derimod bliver den i A, som er Materien forkeert Wiis proportionert, eller $y = \frac{m \cdot (H + h)}{M + m} = \frac{100}{18} = 5\frac{5}{9}$, hvoraf sees; at den hele Hastighed i A eller $y + f = \frac{4}{9} + 5\frac{5}{9} = 6 = H$, fuldkommen som vi have antaget denne Hastighed at være. Hvad nu B angaaer, da haver den ligeledes først den fælles Hastighed $f = \frac{4}{9}$, og desuden en anden, som er Materien forkeert Wiis proportionert $= -\frac{50}{9} \cdot \frac{8}{10} = -4\frac{4}{9}$, saa at saaledes bliver den hele Hastighed udi B $= -4\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = -4$, fuldkommen, som vi i Begyndelsen sagde, at den skulde være; thi man agter, at her faaes -4 , fordi Bevægelsen skeer efter DC, og vi have antaget den positive Bevægelse hen efter CD.

§. 294.

Efter at dette er blevet beviist og forklart, kan der nu ingen Vanskelighed meer være i at forstaae Reglerne for Bevægelsen i de elastiske Rings Sammenstød. Thi da de, for saa vidt de gaae med den fælles Hastighed, ei forandre hverandre, hverken nemlig virke paa eller lide af hinanden; saa skeer hele Forandringen i Sammenstødet af de Hastigheder, der ere i forkeert Forhold af Materien.

Hastighederne
efter Slaget be-
stemmes i begge
de sammenstø-
dende Ting, saa-
velsom Direk-
tionen.

Efter

Men

Men i Henseende til disse sidste gaaer det saaledes til i Sammenstødet, at de anvendes ganske og aldeles paa at sammentrykke Delene af Materien, og at de derfor bør anses paa samme Fod som simple Pressioner. Følgelig meddele Tingene hinanden disse Kræfter igien, saa snart som Slaget er forbi, derved; at de igien sætte sig i forrige Figur, saa at alt bliver som før, alene at Direktionen i Hastighederne forandres. Dette iagttaget, bliver Hastigheden i A efter Slaget 1) den fælles Hastighed f , 2) den, hvormed A gik imod B, med forandret Direktion, og følgelig

1) Efter Slaget den hele Hastighed i

$$A = \frac{HM + mb}{M + m} - \frac{m \cdot (H - b)}{M + m},$$

$$\text{følgelig} = \frac{H \cdot (M - m) + 2mb}{M + m}.$$

2) Efter Slaget den hele Hastighed udi

$$B = \frac{HM + mb}{M + m} + \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{H - b}{M + m} \right) m,$$

$$\text{følgelig} = \frac{2MH + (m - M)b}{M + m}.$$

Hvoraf alle Reglerne for det lige Sammenstød kunde udledes, som vi nærmere skulle vise i den følgende Forelæsning.

Ellevte Tillæg.

Om den relative Bevægelse.

§. 309.

Saa vi i den forrige Forelæsning have havt nødig at tale om den relative Bevægelse, og man ikke uden Feie anseer samme, som at henhøre iblant de første Grunde af Bevægelsen. Saa haver jeg ikke villet undlade i Henseende til den at anfere følgende.

Hvorledes den relative Bevægelse over den samme rette Linie kan betragtes.

Man kan da agte, at saa tidt som to Ting (Taf. XII. Fig. 6.) A og B, begge bevæge sig efter en og den samme Direktion fra c til D, hvilken vi paa samme Maade, som før, ville kalde den positive Bevægelse; er det klart, at naar man alene seer paa, om hvor meget den ene i en given Tid nærmer sig den anden, eller gaaer længere bort fra den, da haver man alene nødig at ansee den ene af dem som hvilende, f. Ex. B, og at i den Tilfælde, da de nærme sig hverandre, som om A alene bevægede sig imod B antaget som ubevægelig, med Hastighedernes Forskiel udi begge, i A nemlig og B. Saafermt derimod, at de gaar fra hverandre, den ene hen efter cE , den anden hen efter cD , da var det i Grunden det samme i Henseende til Længden af Bevægelsen, som om B atter igien hvilede, og A bevægede sig hen imod E med Summen af begges Hastigheder. Paa samme Maade kan man i al relativ Bevægelse altid betragte den ene Ting, som om den virkelig hvilede.

§. 310.

I dette Tilfælde at bestemme Rummet og Tiden, saavel som og naar og hvor Sammenstødet skeer.

Dette forudsat; er intet lettere i den retslinede relative Bevægelse, end at bestemme, hvad Rum Tingene igiennemløber i en vis given Tid, saavel som af Rummet Tiden, naar det er bleven bestemt, tilsligemed det Sted, hvor Tingene støde sammen, og efter hvad Tids-Forløb at Sammenstødet skeer.

Thi kaldes Hastigheden i A, a , den i B, b ; og Bevægelsen antages at skee, som før er sagt, i begge Tingene, saavel i A som i B efter den positive Direktion AD, da bliver den relative Hastighed $= a - b$. §. 309. Følgelig, om den Distance AB, om hvilken A og B i Begyndelsen af Bevægelsen ere borte fra hverandre, kaldes d , da fordi det igiennemløbne Rum altid bør dømmes af Hastigheden, multiplicert med Tiden, (Bevægelsen antages i alt dette bestandig at være ensdan) saa bliver, om Tiden kaldes t ,

$$(a - b)t = d, \text{ og } t = \frac{d}{a - b}, \text{ hvoraf sees:}$$

- 1) At om $d = 0$, eller, om Distancen imellem Tingene i Begyndelsen af Bevægelsen er ingen; det er, om de røre hverandre, da bliver $t = 0$, og til at igiennemløbe d , behøves ingen Tid.
- 2) Dersom $a = b$ bliver $t = \frac{d}{0}$, og altsaa uendelig stor; saa at Tingene da aldrig kunde støde sammen.
- 3) Er $b = 0$, bliver Tiden til B treffes af A $= \frac{d}{a}$.
- 4) Er $a = 0$, det er, om A hviler; bliver Tiden $= \frac{d}{-b}$ negativ, og altsaa er Sammenkomsten meer end umuelig, saa at sige.

§. 311.

§. 311.

Men da vi hidtil have antaget B som hvilende; vil man da vide det Punkt D, hvori A og B virkelig stede sammen, ders Distance fra A, saa bliver, om AD kaldes x , $x = AD = \frac{ad}{a-b}$. Thi da Hastigheden i A betragtes nu som virkelig, og ei som relativ, maa det igiennemleebne Num være saa stor som den virkelige Hastighed i A, multiplicert med Tiden, og vi have seet §. 310, at Tiden, som Forleeb til Sammenstødet stede, var $\frac{d}{a-b}$. Søger man x i Henseende til B, faaes ligeledes $x = \frac{bd}{a-b}$.

§. 312.

Saaftremt derimod, at B bevæger sig henimod A; da forandres b til $-b$, fordi vi have antaget Bevægelsen hen efter CE negativ, og man faaer, efter at denne Forandring alene er gjort i de forrige Ligheder,

$$1) t = \frac{d}{a+b}, \quad 2) x = \frac{ad}{a+b}.$$

§. 313.

Løbe Tingene med imodsatte Direktioner fra hverandre, A hen efter CD, og B hen efter cD, da bliver $a = -a$, og man faaer i Ligheden §. 310. $t = \frac{-d}{a+b}$, saa Tiden af Sammenstødet bliver umuelig.

§. 314.

Vil man vide, i hvad Tid de to Ting A og B, om de med Den relative Bevægelse bestemmes ligeledes ubhindret kunde gaae hverandre forbie, (som om de bevægede sig

Xxx 3

fig

bed i det Tilfælde sig en over den anden efter to parallelle Linier) Skulde være borte fra de, da to Ting bevæge sig imod hverandre om det Rum R ; da er det klart, at i de almindelige Tilfælde af §. 310 løber A ind paa B efter den Tid $\frac{d}{a-b}$. For at A endnu videre skal kunde komme bort fra B om den givne Distance R ,

da behøves dertil den Tid $\frac{R}{a-b}$. Saa den hele Tid, som udfordres til at A og B kunde komme fra hinanden om den Distance R i relativ Bevægelse, beleber $\frac{R+d}{a-b}$.

Men vil man fremdeles vide, i hvad Distance fra det Punkt, hvor A var i Begyndelsen af Bevægelsen, A efter sin virkelige Bevægelse virkelig er borte i det Øieblik, da A er gaaet forbi B om den Distance R ; saa haver man alene nødig, for at bestemme denne Distance fra det Punkt, hvor Bevægelsen begyndte, at multiplicere Hastigheden med Tiden, og derfor, da Hastigheden udi $A = a$, bliver det hele søgte Rum, som vi ville kalde x ,

$$1) \text{ om } A \text{ og } B \text{ begge gaae efter en Direktion } x = \frac{(R+d)a}{a-b}.$$

$$2) \text{ Om } A \text{ og } B \text{ gaae imod hverandre } x = \frac{(R+d)a}{a+b}.$$

§. 315.

Ligeledes, naar
Bevægelsen
sker udi koncen-
triske Cirkler.

Dersom (Taf. XII. Fig. 9.) to Ting A og B bevæges udi Cirkler BDG og AFH med en ensdan Bevægelse; da kan man paa samme Maade og efter de forhen givne Ligheder ligeledes giøre Udrengningen for dem. Thi det er altid let, om de end bevæges i adskillige Cirkler, siden man seer her alene paa Vinkel-Bevægelsen, eller paa de i samme Tid igiennemløbne Grader i Cirklerne, for deraf at demme deres

deres Hastigheder. Ansees derfor Buen given i Grader, som det igiennemløbne Rum; da fordi Hastigheden er i al ensdan Bevægelse som det igiennemløbne Rum divideret ved Tiden, om Buen kaldes B, Tiden T, bliver Hastigheden af Vinkel-Bevægelsen $= \frac{B}{T}$.

Og deraf sees 1) at om B bliver bestandig, bliver Hastigheden i al Vinkel-Bevægelse som $\frac{1}{T}$, det er; de Hastigheder, hvormed to Ting igiennemløbe Buer af lige Grader, ere altid som Tiderne, hvori disse Buer igiennemløbes, forkeert tagne.

Og da de hele Peripherier forholde sig som ligedanne Buer, saa blive altid Hastighederne i al Vinkel-Bevægelse forkeert som de Tider, i hvilke de hele Cirkler igiennemløbes. Det er, forkeert som Tiderne af det hele Omløb, eller som man pleier at tale i forkeert Forhold af de periodiske Tider.

2) Sees let, at Hastighederne i Vinkel-Bevægelsen bliver altid de virkelige Hastigheder proportionerte; saa at i samme Forhold som de ene vore, vore og de andre, alt for Resten lige: Men da de med samme Hastighed igiennemløbne Buer maa i samme Forhold vore i Grader, som Halv-Diametern tager af, da om den virkelige Hastighed kaldes H, og Halv-Diametern R, bliver altid Vinkel Hastigheden $= \frac{H}{R}$.

§. 316.

Da derfor Bevægelsen kommer alene an paa, hvad Grader der i samme Tid igiennemløbes, kan man altid antage, om to Ting A og B i Begyndelsen af Bevægelsen vare i adskillige Cirkler, som

AFH

AFH og BDG, ligesom de bevægedes i den samme Cirkel AFH, og i Begyndelsen af Bevægelsen vare borte fra hverandre om den Bue $AF = d$. Kaldes da, som før §. 310, Hastigheden af Vinkel-Bevægelsen udi A, α , den samme udi B $= b$. Da bliver, som før,

(A) om begge gaae efter en Direktion.

$$1) t = \frac{d}{a-b} \quad 2) x = \frac{ad}{a-b}, \text{ af hvilken Lighed bestemmes}$$

Punkterne D og E af begge Tingenes Sammenkomst i den samme Halv Diameter.

3) Tiden, da de i første Omleeb skulle være fra hverandre om den Distance R, beløber $\frac{R+d}{a-b}$; og Distancen fra Punktet A bliver

$$= x = \frac{(R+d)a}{a-b}.$$

(B) Om begge gaae imod hverandre, sættes i de forrige Formuler alene i Steden for $-b$, $+b$.

(C) Løbe begge fra hverandre, da er denne Tilfælde adskillig fra den forrige i ret Linie, og henhører til den sidstnævnte Tilfælde, fordi Tingene da løbe imod hverandre, for at samles efter den Kant H.

§. 317.

Saa og, naar

Bevægelsen

sker udi sam-

menløbende Li-

nier, og begge

Tingene paa en

Tid gaae ud fra

et og det samme

Punkt.

Derfor de to Ting A og B (Taf. XII. Fig. 10.) bevæges i sammenløbende Linier, og gaae begge paa en Tid ud fra A, B efter AB, og A efter AC; men man vil vide den relative Bevægelse i Henseende til B, betragtet som ubevægelig. Da, om den virkelige Tid gaae ud fra A henester $AB = b$, den i A henester $AC = a$, og $AB:AC = b:a$, saa bliver BC den relative Distance; men om B antages at hvile udi A, bliver samme AD; om AD er parallel

og = BC. Man maa agte, at efter AE bliver den relative Bevægelse altid ensdan, fordi AB:BC, og AC:BC ere altid i den samme bestandige Forhold, saa deraf følger: At siden Bevægelsen efter AB og AC altid er efter vores antagne en ensdan Bevægelse, maa den relative efter AE ligeledes blive det.

§. 318.

Man haver derfor alene nødig for at finde den relative Distance efter AE, at søge Forholden imellem den relative Hastighed og Hastigheden i den Ting A. Er Vinklen ϕ given, da er Vinklen ABC og bekiendt, som vi ville kalde p , og $\text{Sinus } p : \text{Sin. } \phi = a : \frac{a \cdot \text{Sin. } \phi}{\text{Sin. } p}$, hvilket er Sterrelsen af den relative Hastighed, som derfor altid er given. Men multipliceres denne Hastighed med Tiden, da faaes derved det i samme Tid igiennemløbne relative Rum, hvilket, om Tiden kaldes t , bliver $= \frac{ra \cdot \text{Sin. } \phi}{\text{Sin. } p} = AE$.

Vil man af det fundne relative Rum finde de Ting A og B deres virkelige Steder; haver man alene nødig, om a er det Rum, der igiennemløbes i den Tid = 1, at tage $Ae = at$, da $Ee = Af$ deraf bestemmes. Eller og af den Forhold $\text{Sin. } \phi : \text{Sin. } p$, og den givne relative Distance AE at søge Ae, og fra e at trekke ef parallel AE.

§. 319.

Bevæge sig A og B ei begge paa en Tid ud fra det Punkt F, Ligeledes, naar begge Tingene ei (Taf. XII. Fig. 11.) men saa Begyndelsen af Bevægelsen skeer fra paa en Tid bevæge sig ud fra det de Punkter A og B, der ligge fra hverandre om den Distance AB, samme Punkt.

Ynq

da

da bliver endnu alt som før; thi man seer, at om B kommer til G, imidlertid at A kommer til D, da bliver GD den relative Distance, hvilken, fordi B antages at hvile, forandres til BC, om BC er parallel og saa stor som GD. Følgelig synes A i relativ Bevægelse at have igiengnemlebet AC, og man maa agte, som før, at i ACH bliver den relative Bevægelse altid ensdan, om de virkelige Bevægelser efter AE og BQ ere ensdanne Bevægelser. Thi da $0 = 0$ og Forholden af AD til DC er bestandig, maa og den af AD:AC blive bestandig.

Kaldes fremdeles den Vinkel ACD som før p ; da bliver atter igjen $\text{Sin. } p : \text{Sin. } 0 = a : \frac{a \cdot \text{Sin. } 0}{\text{Sin. } p} = AC$ eller den relative Bevægelse efter AH; af hvilken man altid kan finde den Distance, som i en given Tid A og B i relativ Bevægelse ere komne bort fra hverandre, alene ved at multiplicere, som før, den givne relative Hastighed med Tiden.

Pigledes seer man let, hvorledes af den givne relative Distance de virkelige Steder kunde findes, om af den paa samme Maade, som før, bestemmes AE, og af den igjen EQ. Man seer og hvorledes, om Distancerne ere givne i den virkelige eller relative Bevægelse, Tiden af samme kan findes ved at dividere den givne Distance med Hastigheden.

§. 320.

Oplosning af de foregaaende Tilfælde i den relative Bevægelse. Man kan og, uden at antage den ene af de Ting, der bevæges, som hvilende, umiddelbar oplosse alt hvad der henhører til den relative Bevægelse, paa denne Maade (Taf. 12. Fig. 12.).

Ere AC og BC de to sammenløbende Linier, over hvilke de to gælle, uden at antage det ene af de to Ting, der bevæges som hvilende.

Ting A og B i A og B begynde at bevæges med Hastigheder som a og b , for at komme hen til det Punkt C. Tages AC til CD som $a : b$, treffes fra B BE hen til den Linie AD efter Behag hen paa AD, fra E EF parallel BC, og fremdeles FG parallel EB; da blive AF og BG de i samme Tid igiennemløbne Rum; F og G de Punkter af Linierne AC og BC, i hvilke Tingene A og B paa samme Tid findes: Eller, om man antager dem at være Kugler, blive F og G de Punkter, hvori Centra af A og B henge; Ligeledes bliver og FG den relative Distance.

Thi da efter vores forudsatte $AC : CD = a : b$, men de ere og $= AF : FE$, saa er det let at see, at AF og FE ere igiennemløbne i samme Tid, hvoraf videre alt det øvrige let forstaaes.

§. 321.

Man seer deraf, at om den relative Distance FG er given, findes let de virkelige Steder; thi man har alene nødig fra B af at tage BE saa stor som denne Distance, og at treffe FG parallel EB, saa ere de virkelige Steder i F og G: Men da, om Perpendiklen BH kastes ned, paa begge Sider af samme kan tages $BE = BI$, saa faaes endnu de to Punkter K og T, hvilke, efter at det Punkt C er passert, enten af et eller af begge de to Ting A og B, opløse det foresatte Spørgsmaal.

Man kan ligeledes af den givne virkelige Distance AF finde den relative, ved at treffe fra F en Linie FE parallel CB, og siden EB, da denne sidste bliver den forlangte relative Distance.

§. 322.

Man seer af det allerede sagte, hvorledes de Punkter kunne findes, udi hvilke at Centra af A og B betragtede som Ringler ere i den korteste Distance fra hverandre; man haver alene nødig at kaste fra B Perpendiklen BH ned paa AD, og siden paa før sagte Maade at trekke LH parallel BD og LS parallel HB, da LS bliver den søgte korteste Distance derfor, fordi den er $= HB$, og man veed af Geometrien, at af alle Linier, som fra B af kastes ned paa AD, bliver Perpendiklen BH den korteste.

Følgelig, om BH forlænges til M, da er Vinklen LMH $= MAH + BHD$, altsaa BMC en stump Vinkel, hvoraf sees; at Perpendiklen fra B paa den Linie AC, i hvilken den Ting er, som bevæger sig hastigst, falder bedre ind ad imod A, end det Punkt L, i hvilket Centra af A og B ere i den korteste Distance fra hverandre.

§. 323.

Man seer ydermere, at siden de to Linier BE og BI falde begge ensdan paa begge Sider af Perpendiklen BH, saa blive de to Punkter F og K begge paa hver sin Side lige langt borte fra det Punkt L. Det er; de Punkter, hvori A og B ere i samme Distancer fra hverandre, ligge begge hver paa sin Side lige langt fra det Punkt L, i hvilket de staae i den korteste Distance fra hverandre.

§. 324.

Endelig sees, at A og B ei tillige kunde paa en Tid passere det Punkt C, med mindre at Hastighederne i A og B ere Distancerne AC og CB proportionerte.

§. 325.

§. 325.

Vil man ei alene finde alt det foresagte ved en geometrisk Beskrivning, men søge Liniernes virkelige Størrelser; da siden AC, BC og Vinklen ACD ere bekiendte, findes overmaade let det øvrige. Thi af AC findes CD, fordi Forholden af Hastighederne er givne. Sælgelig og BD. Af AC, CD og Vinklen ved C findes AD og Vinklen ADC. Sælgelig og Vinklen HDB. Af den igien, af BD og den rette Vinkel ved H findes den korteste Distance BH og HD, sælgelig AH, og da $AD : DC = AH : HL$ findes HL. Videre af AH, HL og Vinklen ved A, AL.

Antages BE efter Behag, da findes ligeledes, fordi BH er given, EH; videre AE eller AD—EH—HD; siden EF og AF paa den nylig sagte Maade.

§. 326.

Dette er det fornemmeste, som man behøver at vide om den relative Bevægelse, da en eftertænkssom Læser i forekommende Tilfælde siden let slutter sig deraf videre frem, hvorfor vi heller ikke vidtløftigere vilde opholde os ved denne her giorte Afvigning fra vores egentlige Materie, men erindre, at vi have at tale om Reglerne for Bevægelsen efter Sammenstedet.

Eyttende Forelæsning.

Slutninger af de før fundne Regler for Tingenes lige Sammenstød.

§. 295.

Alf de sidste giv-
ne Regler trekkes
to andre Hoved-
Formularer.

Vi sluttede vores sidste Forelæsning med to Formuler eller Sætninger for Bevægelsen, som vi her maa igientage. Den ene var, at Hastigheden i A efter Slaget var $= \frac{H(M-m) + 2mb}{M+m}$. Den anden, at Hastigheden i B blev efter Slaget $= \frac{2MH + (m-M)b}{M+m}$, og vi saae, at disse Regler bestemte Bevægelsen, saa tidt som de elastiske Ting A og B før Slaget gik efter den samme positive Direktion AD.

Man seer deraf let, hvorledes Hastighederne kunde bestemmes i det Tilfælde, da B bevæger sig imod A. L. XII. §. 6. Man haver i det alene at agte, at Hastigheden i B bliver negativ $= -h$, saa at om i de forrige Hastighedernes Værdier sættes i Steden for $+h$ $-h$, faaes de Størrelser af Hastigheder, som passe til denne Tilfælde, nemlig

- 1) Hastigheden i A bliver efter Slaget $\frac{H(M-m) - 2mb}{M+m}$.
- 2) Hastigheden i B bliver efter Slaget $\frac{2MH - (m-M)b}{M+m}$.

§. 296.

§. 296.

Disse to Tilfælde ere alene de, som man har nodig
noiere at overlegge; Thi bevæges saavel A som B efter den
negative Direktion BAE før Slaget, da blive baade H' og
 h negtende Størrelser; de negative Hastigheder efter Slaget
derfor fuldkommen de samme, som de positive i den første
Tilfælde af §. 295, saa at i Henseende til Bevægelsen efter
Slaget disse to Tilfælde ere i intet adskillige, uden deri, at
alt skeer nu paa den negative Side fuldkommen saaledes som
før paa den positive.

Gaae derimod før Slaget A hen efter AE, og B efter
BD, kan intet Sammenstød skee.

§. 297.

Dette forudsat, ville vi foretage de fornemmeste enkelte De fornem-
ste enkelte Til-
fælde af Sam-
menstødet for-
klares.
Tilfælde af Sammenstødet, og undersøge, hvad Hastighe-
derne blive, naar det ene Legeme f. Ex. B hviler. I denne Tilfælde
de faaes, fordi $h = 0$,

$$1) \text{ Hastigheden i B efter Slaget } = \frac{2MH}{M+m}.$$

$$2) \text{ Hastigheden i A efter Slaget } = \frac{H.(M-m)}{M+m}, \text{ hvoraf}$$

videre sees,

- 3) At saafremt begge de sammenstødende Ting ere af lige-
stor Materies Mængde, da bliver Hastigheden i B
efter Slaget $= H$, fordi $M=m$, og $M+m=2M$.
I A derimod bliver Hastigheden $= 0$, fordi $M-m$
 $= 0$, folgelig; saa tidt som et elastisk Legeme i lige
Sam-

Sammenstød træffer an paa et andet ligeledes elastisk og lige stort med sig selv, da hviler efter Slaget det som bevægedes for Slaget, og det, som hvilede for, bevæger sig siden med samme Hastighed, som den, det andet for Slaget havde.

- 4) Man kan deraf videre slutte, at om en Mængde lige store Kugler, saa mange som man vil, laae i Række efter hverandre og røre hinanden, imidlertid at en anden, saa stor som en af dem, med en vis Hastighed stødte an paa den yderste i Radden, da kom alle Kuglerne til at hvile, den ene undtagen, som laae yderst i Radden, og længst fra Slaget; hvilken sidste derimod bevægede sig, efter at Slaget var forbi, fort med den Hastighed, hvormed den for Slaget bevægede stødte paa de andre.

§. 298.

Efter at have betragtet det Tilfælde, i hvilket Hastigheden i den ene af de bevægede Ting var $= 0$, ville vi foretage den, i hvilken at Hastigheden for Slaget baade udi A og B er lige stor, eller $H = h$. I den kunde to Tilfælde stilles fra hinanden; den ene, naar A og B før Slaget gaae efter en Direktion; den anden, naar de gaae imod hverandre.

- 1) I den første holde vi os til de første Værdier af Hastighederne i §. 295, da man faaer, fordi $H = h$, Hastigheden i A $= \frac{H(M+m)}{M+m} = H$, saa Hastigheden for og efter Slaget

Slaget bliver den samme. I Henseende til B faaes ligeledes $\frac{MH + mH}{M + m} = H$, saa man seer, at Hastigheden i B bliver i denne Tilfælde efter Slaget usforandret i begge Tingene. Hvilket man, uden at betiene sig af disse Regler, og strax kunde have seet, som vi og alene anfore det her, for at vise Reglernes Rigtighed i alle de Tilfælde, i hvilke strax kan vides, hvad Hastighederne blive.

2) Dette Tilfælde var saaledes høist simpelt; Gaar man derimod til det andet, da A og B før Slaget løbe imod hverandre, og man til den Ende betiener sig af de sidste Værdier af Hastighederne, som findes i §. 295, hvilke blive

$$1) \text{ for } A, \frac{H(M - m) - 2mH}{M + m}. \quad 2) \text{ For } B = \frac{2MH - (m - M)H}{M + m},$$

som ere de for dette Tilfælde almindelige Værdier efter Slaget.

Sættes nu fremdeles $M = m$, da faaes videre,

$$1) \text{ For } A, \frac{-2mH}{2m} = -H. \quad 2) \text{ For } B, \frac{2MH}{2M} = H.$$

Hvoraf sees.

Alt saa tidt som to elastiske Ting, der ere lige store, løbe imod hverandre med lige store Hastigheder, da gaar de efter Slaget fra hverandre med de selsamme Hastigheder i forandret Direktion, hvormed de før Slaget gik imod hverandre.

§. 299.

Dersom to elastiske Ting derimod, i hvilke Materiens Mængde er den samme, men Hastighederne ulige, før Slaget bevæge sig imod hverandre. Da bliver, i Følge det an-

tagne, $M = m$, og i Følge de sidste Værdier af Hastighederne udi §. 295, 1) Hastigheden i A efter Slaget $= -h$, 2) Hastigheden i B efter Slaget $= H$, følgelig

bytte de elastiske Legemer i dette Tilfælde Hastigheder med hverandre, og gaae fra hinanden efter imodsatte Direktioner af de, de før gik til hverandre med.

§. 300.

Saafermt derimod, at de før Slaget gaae begge efter en og den samme Direktion, og Materiernes Mængde antages som før i begge den samme. Da faaer man, i Følge de første Værdier for Hastighederne i §. 295,

1) For A efter Slaget Hastigheden $= h$. 2) For B efter Slaget Hastigheden $= H$, saa man seer; at de i dette Tilfælde ligeledes bytte Hastigheder om med hverandre, men gaae efter Slaget fremdeles fort efter de samme Direktioner, efter hvilke de gik før Slaget.

§. 301.

De forhen givne Regler anvendes til at udfinde de Værdier af de haarde og bløde Ting's Sammenstød.

Disse ere de letteste og simpleste Tilfælde, som forekomme i de elastiske Ting's Sammenstød. Vil man ligeledes finde Reglerne for de haarde og bløde Ting's Bevægelse efter Slaget, da maa i Henseende til dem agtes (om ellers de haarde Ting kunde tage imod den Forandring af Stødet, man her forudsætter) at de efter Slaget ikke beholde anden Hastighed at bevæges med, end den, som var fælles baade for A og B før Slaget. Thi de Hastigheder, hvilke ere Materiernes

Mængde

der forkeert proportionerte, tabe sig under Slaget i Delenes Sammentrykning saavel i de haarde som bløde Ting, siden de ei igientage deres forrige Figur. Følgelig bliver saavel for de haarde som bløde Ting efter Slaget alene en fælles Hastighed, hvilken, i Følge §. 289, $= f = \frac{HM + mb}{M + m}$.

Hvoraf sees, at i hvorledes end de haarde og bløde Ting bevæge sig med eller imod hverandre før Slaget, gaae de dog altid efter Slaget med en og den samme Hastighed, og efter en Direktion eller Drive-Linie.

§. 302.

Deraf kunne alle Reglerne for de haarde og bløde Ting deres Bevægelse udledes, hvilket vi her ville vise i de fornemmeste Tilfælde.

1) Dersom de før Slaget gaae efter en Direktion, da bliver Hastigheden efter Slaget saa stor som Summen af Bevægelsernes Størrelser for Slaget, dividert med Materiens Mængde i begge de Ting, som støde sammen.

2) Gaae de før Slaget imod hverandre, da bliver $\frac{1}{2}$ forandret til $-h$, og man faaer $f = \frac{HM - mb}{M + m}$, saa at Hastigheden efter Slaget faaes ved at dividere Forskiellen imellem Bevægelsernes Størrelser for Slaget, med disse samme Materiers Mængder.

3) Og deraf sees endnu videre, at Bevægelsens Størrelse efter Slaget bliver

a) Om de for Slaget gaae efter samme Direktion begge, $(HM + mh) \frac{M+m}{M+m} = HM + mh$. Men for Slaget vare Bevægelsernes Størrelser og $= HM + mh$, altsaa sees deraf, at saa tidt som to haarde eller bløde Ting for Slaget bevæges efter en Direktion, da bliver Bevægelsens Størrelse i begge for og efter Slaget den samme.

b) Og ligeledes sees, at om de for Slaget bevæge sig imod hverandre, da bliver Forskiellen af Bevægelsens Størrelse i begge for og efter Slaget den samme.

c) Dersom $M = m$ og $H = h$, da bliver Hastigheden i de haarde og bløde Ting efter Slaget $= \frac{HM - HM}{M + m} = 0$, folgelig naar to deslige lige store Ting løbe imod hverandre for Slaget, da hvile de begge efter Slaget.

d) Hviler den ene af disse Ting for Slaget, da bliver $h = 0$, og man faaer $f = \frac{HM}{M + m}$, da nu Hastigheden ubi A, før Slaget gik an, var $= H$, saa sees, at Hastigheden efter Slaget i dette Tilfælde altid er til Hastigheden for Slaget, som Materien i A til Summen af Materiens Mængde i de Ting, der stode sammen.

e) Er i dette Tilfælde, da nemlig den ene hviler; Materiens Mængde desuden ubi begge Tingene den samme, saa bliver $f = \frac{HM}{2M} = \frac{1}{2}H$, hvoraf man seer, at de da hver faaer Halvdelen af den Hastighed, hvilken den Ting, som stoder an paa den anden havde før Slaget.

f) Er

f) Er simpel hen Materiernes Mængde lige stor eller $M = m$, Hastighederne ulige. Da

1. I den Tilfælde, naar begge Tingene gaae efter en Direktion, bliver $f = \frac{HM + mb}{M + m} = \frac{M(H + b)}{2M} = \frac{H + b}{2}$.

Allsaa bevæges saavel A som B efter Slaget med den halve Sum af det, hvad Hastighederne vare for Slaget.

2. Gaae de under samme Betingning imod hverandre, da bliver $f = \frac{HM - mb}{M + m} = \frac{M(H - b)}{2M} = \frac{1}{2}(H - b)$ det er;

A' og B bevæge sig begge efter Slaget med den halve Forskiel af hvad Hastighederne vare for Slaget.

Og da Værdierne af begge disse Hastigheder ere positive, saa seer man, at i denne saavel som i alle de forrige Tilfælde af de haarde og bløde Tings Sammenstød, bliver Direktionen efter Slaget altid Direktionen af den Ting A, som haver den største Hastighed, og med den løber ind paa den anden.

8) Dersom Hastigheden er den samme, men Materiernes Mængde i begge adskillige, da er det klart; at om de for Slaget gaae efter den samme Direktion, kunne de ei støde sammen, men løbe de imod hverandre, da bliver $f = \frac{H(M - m)}{M + m}$,

det er, Hastigheden efter Slaget bliver den tredie i Proportion til Summen af Materiernes Mængder i begge, til Forskiellen imellem samme, og til Hastigheden for Slaget.

9) Og endelig, saafremt at de løbe imod hverandre med Hastigheder, hvilke ere deres Materiers Mængder forkeert Viis proportionerte, da bliver i $f = \frac{HM - mb}{M + m}$, $HM = mb$, altsaa $f = 0$, folgelig hvile de i dette Tilfælde begge efter Slaget.

§. 303.

Bevægelsens Størrelse bliver før og efter Sammenstødet ikke den samme i de haarde og bløde Tings Sammenstød, med mindre at de bevæges før Slaget efter samme Direction.

Den Mængde Regler, som vi her allerede have viist for Bevægelsen af Sammenstødet, flyde alle med hinanden saalet af de givne almindelige Værdier over Hastighederne, saa man seer, at det fast ikke er uden et Diebliks Sag, at de udelede alle disse enkelte Tilfælde af de før givne almindelige. Vi ville gaae videre fort til andre Betragtninger Bevægelsen angaaende, da man nu tydelig nok seer, hvorledes Reglerne af Bevægelsen efter Stødet i alle muelige enkelte Tilfælde kan findes.

Det, vi her særdeles ville være opmerksomme over, er, hvad der i Bevægelsen bliver bestandigt før og efter Slaget, og til den Ende slutte vi strax af §. 302 at Bevægelsens Størrelse ei bliver den samme før og efter Slaget i de haarde Tings Sammenstød, uden alene i den Tilfælde, da begge de i Bevægelse værende Ting gaae før Slaget efter den samme Drive-Linie. Løbe de imod hverandre, er alene Forskiellen før og siden af Bevægelsens Størrelse den samme.

§. 304.

I de elastiske Tings Sammenstød vor in-

Men da i de haarde og bløde Tings Sammenstød en Deel af Kræfterne tabes, den nemlig, som anvendes paa at sammen-

sammmentrykke en Figur, der ei igien sætter sig i sin forrige Stand, saa burde man vente sig, at Kræfterne før og efter Slaget ei kunde eller burde være og blive de samme. Saa fremt derimod, at Tingenes virkelige Kræfter bør dømmes af Hastigheden i Materiens Mængde, da siden i de fuldkomne elastiske Tings Sammenstød aldeles ingen Kræfter tabes, bliver de nødvendig, om disse Kræfter ellers vare de rette og sande, Bevægelsens Størrelse baade før og efter Slaget være den samme. For derfor at see, om Tingenes sande Kræfter heraf kunde dømmes, ville vi overlegge, hvad Bevægelsens Størrelse bliver før og efter de elastiske Tings Sammenstød i alle Hoved-Tilfælde.

den Kræfter tabes, følgelig da her heller ikke Bevægelsens Størrelse før og efter Slaget bliver altid den samme, saa kan af den de levende Kræfter ikke dømmes. Thi Bevægelsens Størrelse bliver i det elastiske Stød alene den samme, naar Tingene baade før og efter Slaget bevæge sig efter de samme Direktioner.

Første Tilfælde. Dersom A og B bevæge sig begge før Slaget efter den samme Direktion, da blive Størrelserne af Bevægelserne før samme $MH + mh$.

Derimod blive disse samme Størrelser efter Slaget, naar man betiener sig af de første Værdier for Hastighederne i §. 295.

$$\begin{aligned} & \frac{(HMM - HMm + 2mMb) + bmm + 2MmH - mMb}{M + m} \\ &= \frac{HM(M+m) + bm(m+M)}{M+m} = HM + bm. \end{aligned}$$

Hvorved atter igien er at agte, at heri indbefattes to Hoved-Tilfælde.

a) Saa fremt nemlig, at baade før og efter Slaget de to Ting A og B gaar efter den samme Drive-Linie, da seer man, at $HM + bm$ bliver saavel før som efter Slaget positive eller bekræftende Størrelser, følgelig og, at saa tidt som de

de to Ting baade før og efter Slaget bevæge sig efter den samme Direktion, da bliver Bevægelsens Størrelse, saavel før som efter Slaget den samme, og følgelig i denne Tilfælde aldeles uforandret.

b) Saafermt derimod, at A og B før Slaget gaae efter en Direktion, men efter Slaget fra hverandre efter imodsatte Direktioner, da tilkiendegiver $HM + hm$ Summen af Bevægelsernes Størrelse før Slaget, men fordi efter Slaget Hastigheden i A er negativ, eller negtende, tilkiendegiver $HM + hm$ Forskiellen imellem Bevægelsens Størrelser i A og B efter Slaget, hvoraf man seer, at saa tidt som to Ting gaae før Slaget efter en Drive-Linie, men efter Slaget udi imodsatte, da bliver Forskiellen af Bevægelsernes Størrelser efter Slaget lige saa stor som hele Summen af dem før.

§. 305.

Det andet Tilfælde indeholder de Inddeelsninger, som kunne gøres af den 12te Sammenstød, naar A og B bevæge sig før Slaget imod hverandre; da man faaer i at betiene sig af de sidste Vardier i §. 295, at Bevægelsernes Størrelser efter Slaget blive

$$\begin{aligned} \frac{HM^2 - HMm - 2mMb}{M + m} &= \frac{HM^2 - m^2b + mMH - mMb}{M + m} \\ &= \frac{HM(M + m) - hm(M + m)}{M + m} = HM - hm. \end{aligned}$$

Hvorved atter igien to adskillige Tilfælde maa noie stilles fra hverandre.

a) Den

a) Den ene, naar de to Ting A og B gaae efter Slaget begge efter en Direktion, da $HM - hm$ tilkiendegiver Summen af Bevægelsens Størrelse i begge efter Slaget. Saa man seer; at saa tidt som de to Ting bevæge sig for Slaget imod hverandre, men efter det med hinanden, da bliver Summen af Bevægelsernes Størrelser efter Slaget lige saa stor som Forskiellen af samme Bevægelses Størrelser før Slaget.

b) Den anden er, naar de to Ting A og B bevæge sig efter Slaget i imodsatte Direktioner fra hverandre; da, fordi Hastigheden i A bliver negtende, er det klart, at den fundne Størrelse $HM - hm$ bliver Forskiellen imellem Bevægelsernes Størrelser efter Slaget. Hvoraf videre sees.

At saa tidt som to Ting før Slaget bevæge sig imod hverandre i imodsatte Direktioner, og efter Slaget i ligedanne Direktioner fra hverandre, da bliver Forskiellen af Bevægelsernes Størrelser før og efter Slaget den samme.

§. 306.

Deraf maa videre sluttes.

1) At Bevægelsens Størrelse formeres i de elastiske Tings Sammenstød, saa tidt som de før Slaget gaae efter hverandre i samme Direktioner, og efter Slaget gaae fra hverandre i imodsatte.

2) At derimod Bevægelsens Størrelse formindskes ved Slaget, saa tidt som de elastiske Legemer før Slaget gaae imod hverandre, men følge hinanden efter samme Drive-Linie efter Slaget.

Al a a

3) At

3) At i den Tilfælde alene tilforladelig kan siges, at Bevægelsens Størrelse før og efter Slaget uforandret bliver den samme, naar de sammenstødende elastiske Ting baade før og efter Slaget følge hverandre efter samme Drive-Linie.

4) Saa at deraf uimodsigelig bevises; da disse Regler aldeles ingen Tvivl er underkastede, men man i Henseende til dem, af hvad adskillige Grunde de end udledes, altid finder et og det samme, og er derfor dem angaaende fuldkommen enig: At, siger jeg, de Kræfter, som dommes af Bevægelsens Størrelse, umuelig ikke kunne være de rette, siden de forandres og blive ei de samme i de fuldkomne elastiske Tings Sammenstød, og vi derimod have seet, at i det Kræfterne bør fuldkommen uforandret blive de samme. §. 294.

§. 307.

Det eneste, som man endnu kunde tvivle om, bliver, om og de almindelige foransforte Hoved-Tilfælde alle ere muelige i de elastiske Tings Sammenstød; men denne Tvivl taber sig let, saasnart som man iagttager, at i alle Verdierne af Hastighederne foresalde baade negtende og bekræftende Størrelser, saavelsom at baade Materiernes og Hastigheder- nes Størrelser kunde lempes efter hverandre efter Behag.

§. 308.

3 de elastiske
Tings Sam-
menstød blive de
levende Kræfter

Saafermt derimod, at man vil giøre denne samme Undersøgning i Henseende til de levende Kræfter, eller de, hvilke dommes af Hastighedens Quadrat; da om man foretager

først

først de to første Værdier af Hastighederne i §. 295, som ere ^{før og efter Slaget} for A, $\frac{H \cdot (M - m) + 2mb}{M + m}$, og for B, $\frac{2MH + (m - M)b}{M + m}$, ^{get altid de samme.} hvor:

af Quadraterne multiplicerede med Materiernes Størrelser ere, om man sætter $M - m = a$,

$$\begin{aligned} & M \cdot (a^2 H^2 + 4mabH + 4m^2 b^2) + (4M^2 H^2 - 4aMHb + a^2 b^2) m \\ & \quad (M + m)^2 \\ & = \frac{(M - m)^2 MH^2 + (M - m)^2 mb^2 + 4m^2 b^2 M + 4M^2 H^2 m}{(M + m)^2}, \text{ og da} \\ & \text{de negative Stykker i Quadraterne} - 2mM^2 H^2 \text{ og} \\ & - 2Mm^2 b^2 \text{ falde bort i de positive, saa faaes} \\ & \frac{M^3 H^2 + m^2 MH^2 + M^2 mb^2 + m^3 b^2 + 2m^2 Mb^2 + 2M^2 mH^2}{(M + m)^2} \\ & = \frac{MH^2 \cdot (M^2 + 2mM + m^2) + mb^2 (M^2 + 2mM + m^2)}{(M + m)^2} = MH^2 + mb^2. \end{aligned}$$

Hvoraf sees; at efter Slaget de levende Kræfter blive endnu de samme saavel før som efter Slaget, hvad heller at A og B gaae baade før og siden efter samme Drive-Linie, eller om de før Slaget gaae efter et Slags Direktioner og efter Slaget derimod med imodsatte; thi om Hastigheden her bliver negativ, forandres dog derved ikke Størrelsen af Hastighedens Quadrater.

§. 309.

Derfor man ligeledes foretager sig de to sidste Værdier af Hastighederne i §. 295, de nemlig, som vi have fundet for den Tilfælde, naar de to Ting A og B før Slaget gik imod hverandre, da faaer man, at de levende Kræfter efter Slaget blive, alt giort som før:

$$Aa \text{ aa } 2$$

$$(H^2 a^2$$

$$\frac{(H^2 a^2 - 4mbHa + 4m^2 b^2) M + (4M^2 H^2 + a^2 b^2 + 4MbHa) m}{(M + m)^2},$$

som giver net op det i forrige Tilfælde fundne

$$\frac{Ma^2 H^2 + 4m^2 Mb^2 + 4mM^2 H^2 + a^2 mb^2}{(M + m)^2} = MH^2 + mb^2.$$

Hvoraf forstaaes, naar man fremdeles slutter sig frem, ligesom i §. 308, at de levende Kræfter efter Slaget altid i al de elastiske Ting's Sammenstød blive det selsamme, hvad de vare før Slaget; saa de, naar ingen Kraft tabes i Figurens Forandring, uforandret blive, det de vare.

§. 310.

De levende
Kræfter tilintet-
giøre ikke hver-
andre, men de
tilintetgiøres af
Pressionerne.

Vi giøre deraf to vigtige Anmerkninger.

1) At de levende Kræfter, saa tidt som de virke imod hverandre indbyrdes, tvertimod Pressionernes Natur aldrig tilintetgiøre den ene den anden; men forandre hverandre simpel hen uden Tab i det Substantielle.

2) At Pressionerne derimod kunne tilintetgiøre de levende Kræfter, ligesom de af dem kunne blive til. Men det, som her maa videre agtes, er; at de levende Kræfter selv, naar de virke imod de saa kaldte døde eller simple Pressioner, tabe de sig paa samme Maade som simple Pressioner: Og at derfor den Deel af dem, hvilken anvendes til at sammentrykke Figuren, ei kan ansees paa anden Fod, end den af en simpel Pression.

Atten-

Attende Forelæsning.

Slutningen af Reglerne for Bevægelsen i Tingenes Sammenstød.

§. 311.

Vi ere, Hoistarede! ved Slutningen af det, som vi have ^{Tyngdens fælles} at sige om de Hoved-Regler, hvilke Naturen altid iagt- ^{Centers Bevæ-} tager udi Tingenes Sammenstød. Vi have seet to Poster, ^{gelse forandres} som altid blive uforanderlige; Den ene, de levende Kræfter ^{ikke ved Tingenes} selv; den anden, den fælles Hastighed, hvormed begge Tingene bevægedes for Slaget. Af dette sidste følger,

1) At om man kalder det Punkt F, (L. XII. §. 6.) fra hvilket af at regne Materiens Mængde i A er til den i B, som $Fc : FC$, Tyngdens eller rettere Inertiens Center; da skal den ensdanne Bevægelse af dette Center saavel for som efter Stødet være den samme.

Thi dersom man eftertænker det forhen sagte §. 293, er det klart; at for saa vidt som de to Ting udi Bevægelse have en fælles Hastighed, forandres derved ikke Bevægelsen af Inertiens Center F. For saavidt at de gaae imod hverandre med de Hastigheder, der ere Materiens Mængde i begge forkeert Viis proportionerte, da siden Hastighederne efter Slaget af de

Al aa 3

fuldkom-

fuldkommen elastiske Ting atter igien blive de samme, skiont med forandrede Direktioner; saa sees strax, at de i denne Henseende maa paa selsamme Maade gaae fra hverandre efter Slaget, som de, før det skede, gik imod hverandre. Men da al Bevægelsen i de to Ting, som stode sammen A og B, hertil henhører, saa følger, at da ved ingen af Delene Tynghdens Centers Bevægelse i Sammenstødet forandres, saa forandres den aldeles ikke. Man kan forestille sig dette lettere saaledes.

Tænker man de to Ting, der stode sammen, som om de laae paa et og det samme Bret, og at dette Bret bevægedes med den Hastighed, der er begge tilfælles; da er det klart, at Tynghdens Center gik fort med den samme Hastighed som Brettet, folgelig, da ved Sammenstødet Brettets Bevægelse ei forandres, saa følger,

a) At dette Center hviler paa Brettet, for saa vidt som Tingene gaae efter Slaget igien fra hverandre med Hastigheder, hvilke ere som Materiernes Mængde i begge forkeert tagne.

b) Og folgelig, at den ensdanne Bevægelse af dette Center er den samme som Brettets Bevægelse baade før og efter Slaget, saa den er saavel i Henseende til Direktion som Størrelse aldeles uforandret, hvoraf igien fñder.

c) At Bevægelsens Størrelse i Henseende til dette Center er baade før og efter Slaget den samme, det er, Materiernes Størrelser i A og B multiplicerte med deres Tynghdens Centers Bevægelse ere altid baade før og efter Slaget i alle Henseende de samme.

§. 312.

2) Maa man agte, at den relative Hastighed ved Slaget heller ikke forandres. Man slutter dette let ved at sammenligne dette Slags Hastigheder før og efter Slaget med de forhen givne Værdier for Hastighederne §. 294.

Den relative Hastighed heller ikke.

Men for at forestille sig Sagen paa den allerletteste Maade, haver man alene nødig at forestille sig Bevægelsen paa den nylig omtalte Fod, da strax sees, at efter Slaget beroer den relative Bevægelse ikke paa Brettets, eller om man vil heller det, paa Tyngdens Centers Bevægelse, siden begge Tingene udi denne Henseende bør ansees, som om de hvilede: Deres Bevægelse fra hverandre beroer alene paa de Hastigheder, med hvilke de bevæge sig paa Brettet; det er paa de, hvilke ere forkeert Viis proportionerte Materiernes Mængder. Og da disse efter Slaget blive de samme som før i de elastiske Tings Sammenstød, saa følger

a) At disse Ting bevæge sig fra hverandre efter Slaget fuldkommen saaledes, som de bevægede sig imod hverandre før Slaget, saa at de derfor i lige Tider før og efter Slaget befinde sig i lige store Distancer fra hverandre.

b) Følgelig bliver og deres relative Bevægelse før og efter Slaget aldeles den samme uden Forandring.

c) Videre sees; at Stødets Størrelse altid beroer paa Materiens Størrelse i den Ting, som stoder an, multiplicert med den respektive Hastighed.

d) Følgelig kan deraf sluttes, hvor stærk de elastiske sammenstødende Ting under sig sammentrykkes og spændes.

S. 313.

Bestaaenheben
af Hastigheder-
nes Forandring
ved Sammen-
stødet.

Med Hastighederne selv er det derimod noget langt andet. Thi dersom man bliver alt ved at betragte Bevægelsen paa den nylig omtalte Maade, og kalder den fælles Bevægelse i begge Ting f , den som er Materiens Mængde forkeert Viis proportionert udi A , a , i B , b , da maa

1) Om $f = 0$, det er, om de to Ting A og B bevæge sig imod hinanden, alene med de Hastigheder a og b , hvilke ere deres Materiers Mængder forkeert Viis proportionerte, siden i Sammenstødet, ved det at Figuren igientages, disse Hastigheder paa nye meddeles; saa at i dette Tilfælde, som og før er bleven sagt, gaae de sammenstødende Ting efter Slaget fra hverandre med de samme Hastigheder, hvormed de før Slaget gik imod hverandre.

2) Men saafremt som de baade før og efter Slaget bevæge sig efter den samme Kant, saa Direktionen af Bevægelsen ved Slaget ikke forandres; da seer man, at før Slaget bliver Hastigheden i $A = a + f$, i $B = f - b$, saa Forskiellen imellem begge er $a + b$. Efter Slaget derimod er Hastigheden i $A = f - a$ positiv, udi B er den $f + b$. Følgelig Forskiellen imellem begge atter igien $a + b$, hvoraf man seer, at i dette Tilfælde ei Hastighederne selv, men Forskiellen imellem Hastighederne før og efter Slaget bliver den samme.

3) Saafermt at de to sammenstødende Ting A og B bevæge sig før Slaget efter samme Direktion, men efter Slaget efter imodsatte, da bliver, som før, Forskiellen af Hastighederne før Slaget $= a + b$. Men da de efter Slaget gaaer

med

med imodsatte Direktioner, bliver Hastigheden efter Slaget i A negativ $= -f + a$, og den i B som før $f + b$, hvilke om sammenlægges, faaes $a + b$, hvoraf sees.

At i dette Tilfælde bliver Forskiellen af Hastighederne før Slaget den samme, som Summen af Hastighederne efter Slaget.

4) Dersom de to Ting i Bevægelse A og B gaae før Slaget imod hverandre, men efter Slaget i en Direktion, da bliver, som før, Forskiellen af Hastighederne efter Slaget $a + b$, men da Bevægelsen i B nu bør ansees som negativ, bliver Hastigheden i A før Slaget, som før, $f + a$, men den i B $-f + b$, som tilsammenlagte giøre $a + b$, hvorefter af sees.

At i dette Tilfælde er Summen af Hastighederne før Slaget saa stor som Forskiellen af Hastighederne efter Slaget.

5) Og ligeledes bevises, at saa tidt som to elastiske Ting bevæge sig saavel før som efter Slaget udi imodsatte Direktioner imod hverandre, da bliver Summen af Hastighederne før og efter Sammenstødet det samme.

§. 314.

* Vil man sammenligne Hastighederne efter Slaget med Hastighederne før det i Almindelighed; da bliver, naar A og B gaae før Sammenstødet efter de samme Direktioner, Hastigheden i A §. 259 $= \frac{H.(M-m) + 2mb}{M+m}$, som fører til denne Proportion.

Bb bb

M+m

$M + m : 2m = H - b : \frac{2m \cdot (H - b)}{M + m}$, hvilket om trekkes fra H , da faaes $H - \frac{2m \cdot (H - b)}{M + m} = \frac{H \cdot (M - m) + 2mb}{M + m}$, hvoraf sees, at om man søger den fjerde proportionelle til Summen af Materiernes Mængde i A og B, til den dobbelte Materies Mængde ubi B, og til den relative Hastighed før Slaget, og treffer det udkommende fra den anstødende Tings A Hastighed før Slaget, da faaer man sammes Hastighed efter Slaget.

Ligeledes da i Følge §. 295 Hastigheden i B bliver efter Slaget $= \frac{2MH + (m - M)b}{M + m}$, hvilket fører til denne Analogie.

$M + m : 2M = H - b : \frac{2M \cdot (H - b)}{M + m}$; Om dette legges til Hastigheden af B før Slaget, saa faaer man $b + \frac{2M \cdot (H - b)}{M + m} = \frac{2MH + (m - M)b}{M + m}$, hvoraf sees, at som sig forholder Summen af begge Materiers Mængder i A og B til Materiens dobbelte Mængde i den anstødende Ting A, saa forholder sig Forskiellen af Hastighederne før Slaget til en Hastighed, hvilken om legges til Hastigheden i B før Slaget, da faaes denne samme Tings Hastighed efter Slaget.

§. 315.

* Man kan giøre Beregningen ligeledes for det Tilfælde, da A og B før Slaget bevæge sig imod hverandre.

Siden Hastigheden nu er §. 295. efter Slaget i $A = \frac{H \cdot (M - m) - 2mb}{M + m}$, hvilken oploses i denne Analogie

$M +$

$M + m : 2m = H + h : \frac{2m(H+b)}{M+m}$, hvilket troffen fra H giver $H - \frac{2m(H+b)}{M+m} = \frac{H(M-m) - 2mb}{M+m}$, saa sees; at alt er i dette Tilfælde i Henseende til A, som i forrige, alene at man i Steden for Forskiellen af Hastighederne, betiener sig af deres Sum, og da denne atter igien er den relative Hastighed, saa følger, at alt er i Almindelighed i begge Tilfælde ens.

Ligeledes, da Hastigheden udi B efter Slaget er §. 295 $m = \frac{2MH - (m-M)b}{M+m}$, som opløser sig i følgende $M + m : 2M = H + h : \frac{2M(H+b)}{M+m}$, saa følger, at denne fjerde proportionelle findes ved Hielp af den relative Hastighed fuldkommen som før; men fra den treffes Hastigheden i B før Slaget, saa man faaer $\frac{2M(H+b)}{M+m} - h = \frac{(M-m)b + 2mH}{M+m}$, fordi den er negativ. Det er i sig derfor virkelig den samme Maade at arbeide paa, som før, og man faaer i Almindelighed for alle Tilfælde disse to Regler:

- 1) For den Ting A; som $M + m : 2m$, saa den relative Hastighed før Slaget til en fjerde proportionelle, som bor treffes fra den positive Hastighed, A gik med før Slaget, for at faae Hastigheden i samme A efter Slaget.
- 2) For den Ting B; som $M + m : 2m$, saa den relative Hastighed før Slaget til en fjerde proportionelle, hvil-

fen maa legges til Hastigheden i B før Slaget (vel iagttaget, om den er positiv eller negativ) for at faae Hastigheden af samme B efter Slaget.

§. 316.

* Man kan videre let af det forhen sagte beregne, hvad der er tabt i Sammenstødet.

Første Tilfælde. Thi er det haarde eller bløde Ting; da siden de alene bevæges efter Slaget med den fælles Hastighed, saa kan af Forskiellen imellem samme og Hastighederne i begge de i Bevægelse værende Ting A og B før Slaget let beregnes saavel hvad der er i Hastighed, som i den hele Bevægelse tabt ved Sammenstødet.

Anden Tilfælde. Ere de derimod Elastiske, da kunne utallige under sig hoist adskillige, og undertiden overmaade artige Tilfælde findes, eftersom man enten imellem Hastighederne eller Materiernes Mængder, eller imellem begge tillige sætter en eller anden efter Behag antagen Forhold. Vi ville her, for at vise Maaden, ikke opholde os uden ved et Par Exempler.

Første Exempel. Dersom Hastigheden antages at være i samme Forhold til en vis given Hastighed antagen for Unitet, som Materiernes Mængder i A og B ligeledes til Uniteten, og man tillige antager $h=0$. Da faaer man Hastighederne

$$1) \text{ i A før Slaget} = M + m.$$

$$2) \text{ i A efter Slaget} = \frac{MH - mH}{M + m} = (M - m) \frac{M + m}{M + m} = M - m.$$

3) i

$$3) \text{ i B efter Slaget} = 2M. \left(\frac{M+m}{M+m} \right) = 2M.$$

Hvoraf sees; at den Ting, som hvilede, meddeles en Hastighed større, end den A selv havde, saa stor nemlig som $2M$ eller Materiens Mængde i A dobbelt tagen. A selv derimod bevæger sig endnu efter Slaget med en positiv Hastighed $M - m$, saa stor som Forskiellen af Størrelsen i Materierne udi begge.

Hvoraf sees; at om m eller den hvilende Ting er meget liden, bliver Summen af Hastighederne efter Slaget tre Gange saa stor som Hastigheden før Slaget. Thi vi have her antaget, at det større løb ind paa det mindre.

Andet Exempel. Løber derimod det mindre ind paa det større, og man arbejder paa samme Maade som før, da findes; at om Hastigheden ligeledes antages at være som i forrige Tilfælde i den Forhold af $M + m : 1$, meddeles en Hastighed til det hvilende af det mindre, der støder an paa det, hvilken er som to gange det større selv; men det taber en Hastighed saa stor som 2 gange dets Masse, det løb ind paa.

Hvoraf sluttes; at da dette sidste ikke er mueligt, med mindre at A selv faaer en negativ Hastighed, saa er det klart, at altid, saa tidt som en mindre Ting A løber ind paa en større B, som hviler, maa A nødvendig springe tilbage efter at Sammenstødet er forbi. Men A faaer altid mindre Hastighed end B havde, og i Hastighedens Sum tabes intet og vindes heller ikke ved Sammenstødet.

§. 317.

Hastigheden kan
utroelig forstær-
res ved der mid-
delbare flere Le-
gemers Sam-
menstød.

* Vi saae i det forste af de forrige Exempler, at Hastig-
heden anseelig kunde formeres, men det er endnu intet imod
den Hastighed, som kan blive til i Naturen ved flere Tings
Sammenstød; den er saa anseelig, at man med al Joie kan
henføre den iblant de besynderlige Paradoxier, som i dette
Stykke af Mechanik falde for; imidlertid kan den af ingen
negtes, og vi ville besangaaende alene anføre følgende.

Derfor en Ting A løber ind paa en større B, og ved
dens Hielp støder an paa en Ting C større igien end B, alle
tre antagne som elastiske, og B og C som de der hvile: Da bli-
ver Hastigheden i C ved det middelbare Stød i B større end
Hastigheden ellers skulde blive ved det umiddelbare Slag af
A selv paa C.

Ehi da B antages at hvile, bliver i samme Hastigheden
efter Slaget (om Materiens Mængde i A, som for, kaldes M,
i B, $nM = \frac{2H}{1+n}$. §. 297. Støder B igien an paa C, og
Materiens Mængde i C sættes $= rM$, da faaes Hastigheden i
 $C = \frac{4nH}{(1+n)r+n}$.

Men om A stødte umiddelbar an paa C, da blev Ha-
stigheden i denne sidste $= \frac{2H}{1+r}$. Følgelig forholde sig Ha-
stighederne i disse to Tilfælde som $\frac{2H}{1+r} : \frac{4nH}{(1+n)r+n} = r+n$
 $+ rn + n^2 : 2n + 2rn$. Sættes $r = p + n$, da faaes i
Steden for den Forhold af $n^2 + r : rn + n$, denne anden af
 $p : pn$.

$p:pn$. Hvoraf sees, at da i Følge vores antagne p^n er større end p , fordi M^n er større end M , og altsaa n større end 1 , maa altid den middelbar meddeelte Hastighed være større end den umiddelbar meddeelte.

2) Man kan i at følge denne Undersøgnings: Maade ligeledes bevise, at om B bevægedes langsommere end A, alt i øvrigt som før; da blev den middelbar meddeelte Hastighed ligeledes altid større, end den umiddelbar meddeelte. Men vi ville ei opholde os ved Beviset, som enhver selv kan foretage sig efter det allerede giorte, fordi vi haste til det følgende.

3) Men estertænker man, hvad vi sagde i det første Exempel §. 316. i den anden Tilfælde; at den umiddelbar meddeelte Hastighed blev anseelig større i B, end den før Slaget var i A, naar A var større end B, hvilket man og desuden let seer deraf, at naar B hviler og er mindre end A, bliver Hastigheden i B efter Slaget $\frac{2MH}{M+m}$, i hvilken Størrelse $2M$ efter vores antagne altid er større end $M+m$, folgelig og Hastigheden i B efter Slaget altid større end den var i A før Slaget. Estertænker man, siger jeg, dette lidet noiere, da seer man let; at om man indbilder sig en Mængde Kugler, en mindre end den anden, og alle hvilende, som idelig at blive sat i Bevægelse med en middelbar ved Stødet i de foregaaende meddeelt Hastighed af den største Kugle i Rækken, som løber ind paa de andre, at da fra Kugle til Kugle Hastigheden anseelig maa formeres, og ved denne idelige Tilvæxt blive tilsidst ulige større i den mindste og sidstbevægede Kugle af dem alle, end i den første bevægende. Da

Da man af de foregaaende Regler kan, saaledes idelig i det lige Stød bestemme Hastigheden fra Kugle til Kugle, saa forstaaes Maaden, hvorpaa disse Udregninger kan gøres. Man haver udregnet Hastigheden for hundrede Kugler i Række, som efter den Forhold af 1:2 fra den mindste til den største immer tage til i Størrelse, og fremdeles antaget, at den første og største stødte ind paa den anden med en Hastighed af 1, og at saa siden Stødet gik fra Kugle til Kugle: Udregningen gjort, haver man fundet, at den sidste og mindste Kugle fik ved det igiennem alle de hvilende Kugler saaledes meddeelte Stød en Hastighed, som forholdt sig til Hastigheden i den første anstødende Kugle, der satte de andre i Bevægelse, = 233850000000 : 1 paa det nærmeste.

§. 318.

Disse ere de fornemteste Poster, som fortjene Estertanke i Ringenes Sammenstød: Da vi allerede derved længe have opholdt os, ville vi ei undersøge andre, efterdi enhver af det allerede sagte altid er i Stand til at slutte Resten: I sær da vi endnu have en Deel andet at sige, som henhører til og staaer i Forening med det vi nu have afhandlet. Vi have nemlig endnu at betragte det saa kaldte Stødets Center; De anstødende elastiske Rings Tilbagespring, eller Lovene for Reflexionen; det eccentricke Stød, naar nemlig Slaget ei gaaer igiennem Tyngdens Center, saavel som Reglerne for det skieve Stød, hvilke Poster vi igien skulle foretage i næstkommende Forelæsning.

Løbte

Tolvte Tillæg.

Om de experimentale Beviis over Kræfterne af Stødet, og om det middelbare Stød.

§. 327.

S det foregaaende er blevet talt om de Forsøg, som ere blevne ^{Udregning af} giorte over Stødet, ved at lade Kugler og andre Legemer falde ^{Stødets Virk-} ned i bløde Materier, hvis Dele uden Hinder kunde vige for Slaget ^{ninger, naar fal-} og af det blive sammentrykte. I disse Forsøg er ingen betydelig ^{dende Kugler} Vanskelighed, thi man kan af Hullernes Størrelse lige frem slutte ^{støde an paa en} til Kræfternes, som altid findes at være under sig som Massen multi- ^{Vegtskaal, be-} plicert med Hastighedens Quadrat. De ældste Forsøg derimod, som ^{lagt med blød} til de levende Kræfters Undersøgning ere blevne anstillede, have været giort ved en Vegt af lige Arme. Paa den ene af dens Skaalers lagde man Tyngder, og forsøgte, fra hvad Høide at en vis given Tyngde maatte falde ned paa den anden Vegtsskaal, før den første kunde løstes ganske lidet ved Slaget. Men da Inertiens Bevægelse i den hele Vegt her bør tages under Betragtning, for at udregne Stødets Virkning, saa kan man af de løste Tyngders Størrelse ei slutte sig umiddelbar til den hele Virkning af de anstodende Kræfter. De smaa Vanskeligheder, som heri forekomme, ville vi i det følgende kortelig opløse.

Cc cc

§. 328.

S. 328.

Instrumentet er forbedret, beskrevet og meget vel udregnet af S. Gravesande i hans *Phys. Elem. Math. Tom. I.* Beskrivningen er denne: (Taf. XIV. Fig. 1.) AB er Bøgt-Vielsen; Skaalen L er af Jern, den i M af Træ, rund og udhulet til en Tommes Dybde. I denne Hulning legges, naar Forsøgene gøres, blødt Leer, hvis Overflade skræbes af med en Kniv, saa at den bliver ganske horisontal. Distancen BM er meer end tre Fod. Foden, Bøgt-Vielsen ligger paa, sættes, som Figuren viser, paa et Bord. I Pladen D er en Krog, udi hvilken Kuglen G henges. Saa snart dette er gjort, sættes et Lod Q paa Skaalen L, saa at begge Skaaler staae i Egevegt sammen. Siden legges endnu paa L den Tyngde P, som skal løstes ved Stødet af Kuglen G, naar Traaden klippes over. Men at L ikke skal synke synnderlig ved den paalagte Tyngde P, holdes Armen, saasnart som Synkningen begynder af Jern-Armen *if*. Hvorfor og Egevegten og begge Armenes horizontale Stilning, ser Loddet z blev lagt paa, maa undersøges over en anden Fod, end den her tegnede.

Til Armen *i f* er loddet en tynd elastisk Plade *fg*, hvilken, naar den er løs, ligger, som Figuren viser, i *fg*. Ellers holdes den *i* af en anden liden Plade, som henger fast ved Armen A, den kan derfor ikke forlade den Stilning *fi*, med mindre at Armen A løstes lidt i Veiret, da den ved sin Elasticite tager strax den Stilning *fg*. Hvoraf man under Forsøget kan vide, hvad heller at Armen A er blevet løstet eller ikke, saa og om den ikke er blevet løstet formeligt, hvilket man erfarer derved, at naar Slaget om ganske lidt formindskes, Elastret *fg* da ikke springer ud fra *i*.

Alt gjort, som sagt er, bestaae S. Gravesandes Forsøg udi følgende:

1) En

og Kuglen d , hvis Masse vi ville kalde L , men Hastigheden h , seer nu Slaget, som om Sammenstødet var simpelt. Følgelig, da efter Hypotesen cAB hviler før Slaget, bliver §. 301 g. fordi $H = 0$, og her handles om bløde Legemer; den fælles Hastighed efter Slaget

$$= \frac{dh \cdot c^2}{Cc^2 + Dd^2 + dc^2}.$$

§. 331.

Man seer let, at paa samme Maade Reglerne for det direkte Stød imellem to Penduler kunde bestemmes, som slaae an paa hver andre med et direkte Stød, i hvad for et Punkt at end dette seer, og i hvor mange Tyngder at ethvert af dem end er sammensat af; siden, som nylig er blevet viist, intet andet behøves, for at bringe disse Tilfælde paa de forhen for Stødet givne Regler, end simpel hen at flytte samtlige Inertierne om til det Punkt, hvori Stødet seer, og siden der at betragte det som et direkte og simpelt Stød imellem disse to saaledes fundne Inertier.

For Ex. Om aEF er et andet Pendul, bevægeligt om det Punkt a . Ere paa samme de to Inertier F og E begge i Bevægelse, eller om paa det er en alene, thi Opøsningen er lige let: kaldes Inertien i F , f ; i E , e ; er $Fa = f$, $Ea = e$, og Stødet i den horizontale Stilling direkte. Da bliver Inertien udi F , naar E er blevet omskiftet, $= F + \frac{Ee^2}{f^2} = \frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$. Saa det direkte Stød saaledes seer imellem de to Inertier $\frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$ og $\frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$. Kaldes nu, som før, Hastighederne H og h , og i Formularerne §. 301. sættes paa vedberlig Maade, $M = \frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$, men

$m =$

$m = \frac{Ff^2 + Ec^2}{f^2}$: Eller, som naar Begiemerne ere enten haarde eller bløde, da disse samme Værdier af M og m i den sælles Hastighed $\frac{HM + mb}{M + m}$.

Saa sees, at alle Tilfælde kunde paa denne Maade opløses. Men da af det allerede sagte, det som i ethvert enkelt Tilfælde bør gøres, strax falder udi Øinene, saa ville vi ei forklare dette vidtløftigere, for at komme til Udrengningen af den Gravesandske Machine.

§. 332.

Da i den Inertien i Arlen er betydelig, kan samme ei udelades af Regningen, hvilken her bliver den samme, som om Arlen af Pendulen i de nylig omtalte Tilfælde endnu ydermere blev anseet som tung. Imidlertid kommer det i Grunden dog ud paa et og det samme, thi Omflytningen af alle Punkterne i Arlen maa nødvendig stee paa samme Maade, som før. Gravesande anseer Igienmensnittet af Arlen i sin Machine, som at bestaae (T.XIV.F.2.) af et Parallelogram $ABcD$ og af et Triangel AGD . Da i Parallelogrammet $ABcD$, FE ikke er uden af ubetydelig Størrelse, kunne Distancerne fra FE ansees som Distancerne fra E . Kaldes AB , a . Enhver Distance fra E som EH , x . ih , dx ; og $BE = Ec = b$. Bliver Elementet $kgbi = adx$, og $\int \frac{ax^2 dx}{b^2} = \frac{1}{3} \frac{ax^3}{b^2}$ bliver Momentet i alle Inertierne af $AFEB$ omflyttede til c . Følgelig bliver samme af Parallelogrammet $ABCD = \frac{2ax^3}{3b^2}$, hvilken Sum er fuldstændig, naar $x = b$. Saa at derfor hele Momentet af Inertien $ABCD$ udi c er $\frac{2}{3}ab^3$.

Angaaende Trianglet AFD , da gøres Regningen ligeledes. Thi er $FG = c$, bliver $Ag = b - x$, $gm = \frac{cb - cx}{b}$, og Elæmentet Ec cc 3 anentet

mentet $lmgh = \frac{cb - cx}{b} dx$. Hvoraf Momentet er, naar Omskytning skeer til c , $cb - cx \cdot \left(\frac{x^2}{b^3} dx\right)$, hvis Sum bliver $= \frac{\frac{1}{2}cbx^3 - \frac{1}{4}cx^4}{b^3}$, og for det hele Triangel AGF, bliver Momentet $\frac{1}{12}cb^3$, fordi da $x=b$. Følgelig er samme for hele Inertien ADG omskyttet til $C = \frac{1}{6}cb$.

I Steden for Inertien af Begstkaalerne og det de henge i, er det nok at tage deres Vegt, siden Tyngdens Centrer af dem alle kunne ansees, som at ligge udi B og A. Fig. 1. Kaldes da Tyngden eller Inertien af Begstkaalen udi M og dens Tilbehør M; Af G, G; Af P, P; Af Q, Q; Af Begstkaalen L og dens Tilbehør L, da bliver den hele udi B omskyttede Inertie, $\frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}cb + L + P + Q + M$; eller om $L + P + Q + M = l$, og $\frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}cb = f$, bliver den omskyttede Inertie $= l + f$. Er den Heide, igiennem hvilken G falder, h , og derfor Hastigheden af G i Slaget $\sqrt{b}$; da bliver den fælles Hastighed efter Slaget $\frac{GVb}{l+f+G}$ §. 301. F. hvilken derfor er og Hastigheden udi A, saaledes, som den er anført af Gravesande, og af ham er blevet beviist paa en anden Maade.

§. 333.

Saa snart som denne Hastighed er fundet, kan Heiden, igiennem hvilken C falder, sammenlignes med den bekiendte Heide op igiennem hvilken A stiger, før Elastret kan løsnes. Denne sidste Heide ville vi kalde H, og for at sammenligne begge de omtalte Heider, ville vi bestemme Bevægelsen af Svingers Center i Henseende til dem begge.

Fordi

Fordi Skaalen M holder Ligevegt med L og Q, saa tids da som Begten ansees som et svingende Pendul, bliver Pressionen i Tyngdens Center alene P, og Tyngdens Centers Moment P. Ac. Derfor bliver §. 156. 157. §. Svingets Centers Distance fra c = $\frac{(l+f+G). Bc^2}{P. BC}$
 = $\frac{(l+f+G). BC}{P}$. Men Hastighederne ere udi alle Punkter udi Bc proportionerte Distancerne fra c, selgelig bliver

$$Bc : \frac{(l+f+G). Bc}{P} = \frac{GVb}{l+f+G} : \frac{GVb. Bc}{P. Bc} = \frac{GVb}{P},$$

som er Hastigheden af Svingets Center, og da Heiderne, hvortil de adskillige Punkter udi Bc eller Ac stige, ere ligeledes Hastighederne proportionerte eller Distancerne fra c, saa bliver $\frac{GVb}{l+f+G} : \frac{GVb}{P}$
 = H : $\frac{H.(l+f+G)}{P}$, hvilket er den Heide, til hvilken Svingets Center stiger, imidlertid at A stiger til den Heide H.

Men da Svingets Centers Bevægelse er den frie Bevægelse af Tyngden, saa bliver den Heide, hvortil det kan stige, og altid proportionert Quadraten af Hastigheden. Saa man faaer $\frac{G^2 b}{P^2}$

$$= \frac{H.(l+f+G)}{P}, \text{ og derfor } b = \frac{H.P.(l+f+g)}{G^2}.$$

I den Gravesandske Machine er H = $\frac{21}{100}$ Tomme, FE : FG = 3 : 4. Den hele Vegt af Biellken 19 Unzer 2 Drachma 1 Skrupel, eller 463 Skrupler. Selgelig f = 123 $\frac{1}{2}$ Skrupl. Tyngderne af Vegtsskaalerne, naar Q og G legges til, nemlig l + G — P beløbe 1320 Skrupl. G veier 67 Skrupl. Sattes disse

$$\text{Værdier i Ligheden } b = \frac{H.P.(l+f+G)}{G^2} = \frac{1443\frac{1}{2} + 21P^2}{448900}, \text{ og}$$

iden

siden for P, først 4, siden 8, og endelig 12 Unzer. Da finder man for Høiden af Faldet i Kuglen G. 1) 6, 91. 2) 14, 68. 3) 23, 32. Hvilke Tall saa noie treffe ind med de føransførte Høider 7. $14\frac{5}{16}$. $23\frac{3}{4}$, saa den ringe Forskiel imellem begge er i dette Slags Udregninger at ansee som intet.

§. 334.

Fortsettelse om
det middelbare
Stød.

I det oventagne §. 317. F. ere endnu to Poster værd at lægge Merke til. Den ene, hvorfor man, for at meddele ved det middelbare Stød en stor Bevægelse, vælger Materiens Størrelse i en idelig fortgaaende geometrisk Forhold, heller end i en anden. Den anden, hvorledes man lettest kan komme til Udregningen af de i denne §. omtalte Tal. Vi ville først foretage det første af disse to Stykker, og undersøge, hvad Forhold tre Ting, hvilke støde an paa hverandre, skulde have i Materie, paa det at A kunde meddele C den største Bevægelse ved Anstødet af B.

Kaldes da, som før, Materiernes Mængde i de to Ting A og B, M og m; deres Hastigheder H og h; Materiens Mængde i C derimod c, da faaes, om Hastighederne søges som før, i Følge §. 295, om B hviler, og paa B A støder an; Hastigheden i $B = \frac{2MH}{M+m}$, og naar C stødes af B med denne Hastighed, faaes for Hastigheden i denne sidste $\frac{4MmH}{M(m+c)+m(m+c)}$, hvoraf, som man veed efter de Methoder, hvorefter det største søges simpel hen, at Differentialen = 0. Og fordi da m her alene ansees som foranderlig, faaes $Mc = mm$, eller $M:m = m:c$, hvoraf følger, at saa tidt som man ved et middelbar Stød vil meddele en given hvilende

Ting

Ring C den største Hastighed, som paa denne Maade kan vedbringes den af A, da maa den Ring B, som A først skal støde an paa, for at denne igien kan bevæge C, være den mindste geometrisk proportionelle imellem A og C.

§. 335.

Dette forudsat; saafremt da at man forestiller sig en heel Række af Kugler, hundrede i Tallet, som alle sættes ved middelbare Stød i Bevægelse af en eneste Kugle A, ved hvilken skeer Begyndelsen til Bevægelsen. Da om man sætter, at Materiernes Mængder i samtlig disse Kugler i Følge ved at begynde fra den mindste, ere $m, nm, n^2m, n^3m, + + + n^lm$, l tilkiendegivende det hele Antal, og at det er m , som støder an: da finder man, efter de forrige Regler, om Hastigheden i $m = 1$, Hastigheden nu i de følgende at være,

i den anden, det er i den første a støder an paa $\frac{2}{n+1}$,

$$\text{i den tredje} = \frac{4}{(n+1)n+1} = \frac{4}{(n+1)^2},$$

$$\text{i den fjerde} = \frac{8}{(n+1)n+1)n+1} = \frac{8}{(n+1)^3},$$

saar samtlig Hastighederne holde under sig denne Fortgang,

$$1. \frac{2}{(n+1)} \cdot \frac{4}{(n+1)^2} \cdot \frac{8}{(n+1)^3} \cdot \frac{16}{(n+1)^4} \text{ o. s. v.}$$

Følgelig, naar Kuglerne ere hundrede, er $l = 99$; hvorfor man let finder, efter at Fortgangs-Loven saaledes er bekendt, Hastigheden i denne sidste at være $\frac{2^{99}}{(n+1)^{99}}$. Man seer ligeledes, hvorledes Hastigheden i enhver af de mellemliggende kan findes, saa og at det er paa samme Maade, man her giere Udregningen for det Tilfælde, da Stødet begynder fra den største Kugle. Men da i alt dette er ingen Vanskelighed, og det er desuden nok at have viist Maaden at arbejde paa med den største Fordeel, ville vi derved ei opholde os.

Dd dd

Mitten-

Mittende Forelæsning.

Om

Stødets Center. Om de anstødende
Tings Tilbagespring. Om Stødets Virkning,
naar det ei gaaer igiennem Tyngdens
Center, og om det skieve Stød.

§. 319.

Beskaffenheden
af Stødets Cen-
ter forklæres, og
det bevises, at
Svingets og
Stødets Center
er et og det sam-
me Punkt.

Vi have i det forrige bestandig antaget, at Stødet gif
igiennem Materiens eller Tyngdens Center. I denne
Tilfælde, saa tidt Bevægelsen er frie, slaaer i det lige Stød
Tingen an med alle sine Kræfter. Saafermt derimod at Bevæ-
gelsen er ufrie, som naar den Ting, der slaaer an, paa Pen-
dulernes Maade svinger om et Punkt, da er Beskaffenheden en langt anden.

Er, for Exempel, AD en saadan Linie, (thi de andre
Tilfælde kunne ved Materiernes Omflytning bringes til denne)
paa hvilken (Taf. XII. Fig. 13.) i B, C, D henge Tyngder
af samme Mavn, hvilke, ved at falde igiennem Buen Dd
vinde levende Kræfter; da er det klart, at om den i at
komme til Vertikal-Linien, hvor den haver alle de ved Faldet
bundne Kræfter samlede, støder an paa en Ting F, denne
da faaer et større eller mindre Stød til, efter som at Linien

med

med det hele System af Tyngder slaar an paa den til; enten i et Punkt der ligger hoiere, eller i et der ligger lavere, fra Henge-Punktet A at regne. Thi i alle Anslag, et eneste undtagen, maa det skee, at Virkningen af Kræfterne ei gaaer heel og hulden ud paa at stode den Bevægelsen hindrende Ting F, men at en Deel af Kræfterne tillige anvendes paa at stode imod den Stift, der holder Pendulet i A; følgelig, da Kræfterne i Anstødet deels anvendes paa at skyde F fort, deels paa at stode A snart meer, snart mindre afsted, saa maa der nødvendig blive et Punkt E, i Henseende til hvilket disse imodsatte Virkninger blive saaledes beskafne, at om samme Punkt E slaar an paa F, faaer denne Ting det hele Stød af samtlig de levende Kræfter i Pendulet, saa at Modstanden imod A er ingen. Dette Punkt i Pendulet er det vi kalde Stødets Center, fordi udi det hele Kraften af Stødet er samlet.

For at bestemme dette Punkt, som vi have til videre antaget at være udi E, maa man agte, at siden det skal giøre den samme Virkning, som om det hele System kunde slaae an frit og uhindret, maa Hastigheden i det være selvsamme, som den, der kunde vindes ved det frie Fald, det er Bevægelsen af E maa kunde skee uhindret af samtlig Inertierne og Tyngderne i D, C og B svingende om A. Thi bevæges E aldeles frit, slaar det og aldeles frit an paa F, men dette Punkt E saaledes forstaaet bestemmes let ved en dobbelt Værdie af de levende Kræfter, af hvilke den ene er en Funktion af AE, som vi vilde kalde x . Til at finde denne dobbelte Værdie udfordres intet andet, end at antage, at Summen af de le-

vende Kræfter er den samme, hvad heller B, C og D bevæge sig i et sammenhængende System, eller om de bevæge sig hver for sig. §. 154.

Antager man det sidste, og Materiernes Mængder i D, C, B, kaldes D, C, B. Linierne DA, CA, BA, derimod d, c, b , da ere §. 79. I. i det frie Fald igiennem Dd, Cc, Bb , Hastighederne i $D = \sqrt{a}$, i $C = \sqrt{c}$, i $B = \sqrt{b}$, og i dette Tilfælde Summen af de levende Kræfter $= Dd + Cc + Bb$, som er deres første Værdie.

Deres anden Værdie derimod tages af den tvungne Bevægelse, naar nemlig Inertierne svinge sammen i Systeme, og i den er det, at den søgte Størrelse x maa indvikles. Thi da nu ei Hastigheden er meer i D, $\sqrt{a}$; i C ei meer $\sqrt{c}$ o. s. v. men Hastighederne ere proportionerte d, c, b . Saa, for at finde de virkelige Hastigheder, hvormed de i dette Tilfælde bevæges, bør man ansee den frie naturlige og uhindrede Hastighed i $E = \sqrt{x}$, som den Unitet, hvoraf de andres virkelige Størrelse kan bestemmes. Thi da Hastigheden i E er til den i D som $x : d$, saa bliver $x : d = \sqrt{x} : \frac{d}{\sqrt{x}}$ den virkelige Hastighed i D, naar D svinger i Sammenhæng eller i ufrie Bevægelse. Ligeledes den virkelige Hastighed i $c = \frac{c}{\sqrt{x}}$ og den i $B = \frac{b}{\sqrt{x}}$, og Summen af de levende Kræfter i dette Tilfælde $\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{x}$, derfor igjen

$$\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{x} = Dd + Cc + Bb$$

$$\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{Dd + Cc + Bb} = x$$

Følgelig er Stødets Center et med Svingets Center, og det samme Beviis gielder for dem begge, siden i begge Bevæggelsen, uagtet Hindringen af begge Delenes Sammenhæng, maa skee frie og uhindret.

§. 320.

Vi have i det foregaaende seet, at de elastiske Ting Bevægelsens springe tilbage efter Stødet i adskillige Tilfælde, men Bestaaenhed vi forklarer, naar vi forklarer, naar have hidtil ikke betragtet andre, end de, i hvilke begge Tin- Ting støde an gene kunde vige for hverandre og vare bevægelige. Vi be- paa andre, som trakte derimod i det nærværende, hvad der maa skee, naar ei kunde vige. en Ting i Bevægelse støder an paa en anden, som ei lader sig bevæge. I dette Tilfælde seer man strax,

1) At naar en haard Ting støder perpendicularer an paa en anden ligedan, men ubevægelig, horer efter Slaget al Bevægelse op. Thi Hastigheden i den Ting, som støder an, bliver da efter Slaget §. 295. $f = \frac{HM - bm}{M + m}$, og fordi $b = 0$ $= \frac{HM}{M + m}$, men da m ei kan bevæges, er den at ansee som uendelig stor imod M , altsaa er $f = \frac{1}{\infty} = 0$, dets; den Ting, som støder an, hviler efter Slaget. Det samme gielder om de bløde Ting. Støder den derimod an paa en elastisk, da stødes den af denne Modstand i samme Perpendikel og med den

Dd dd 3

samme

samme Fart tilbage; fordi de elastiske Ting tage deres Figur med den Kraft igien, hvormed de bleve sammentrykte.

2) Støder derimod en elastisk Ting perpendicularer an paa en anden elastisk, saa ingen Kræfter tabes i at sammentrykke Delene, som ei igien give sig ud, da springe de elastiske i samme Perpendikel og med samme Kraft og Hastighed tilbage. Tabes derimod af Kræfterne paa før sagte Maade, springe de alene tilbage med en Hastighed, der er som Quadrat-Roden af Forskiellen imellem de Kræfter, hvormed de stødte an, og de, som bleve tabte i Sammenstødet.

§. 321.

De uelastiske
Tings Støve
Ansæt forklæ-
res.

Saafermt derimod at en uelastisk Ting støder skiev an paa en anden ligeledes uelastisk, da om dens Hastighed efter CB opløses i to andre (Taf. XII. Fig. 14.) AC og CD saaledes, at $CD = AB$ er perpendicularer paa det Plan FG, hvorpaa den Ting C støder an, og CA derimod er parallel med Planet; da om Planet er glat, glider den efter den Direktion BF parallel AC hen ad Planet med en Hastighed som BD, efter at Slaget er forbi, og den perpendicularære Kraft efter AB tabes ganske i Slaget. Er derimod Planet ujevnt, da ruller Tingen hen efter det, fordi den i alle Punkter af Planet finder da en Modstand, som driver den paa Siden.

For at forstaae dette fuldkommen, haver man alene nodig at agte, at de levende Kræfter kunne fuldkommen, som før er bleven sagt om Pressionerne, opløses i to andre Sidekræfter, som ere perpendicularære paa hverandre; §. 279.

thi $BC^2 = AB^2 + AC^2$, og saa snart som man er forvissat paa, at denne Oplosning i Henseende til dem kan gøres, flyder alt det øvrige af sig selv.

§. 322.

Derfor (Taf. XIII. Fig. 1.) en Ting C støder an paa ^{Hvad man for-} ^{saar ved An-} ^{støds- og ved Re-} ^{flexions-Vinkel.} en anden ubevægelig i B, over den Linie FG, og springer, naar Slaget er forbi, tilbage efter den Linie BE, da, om AB er perpendicular paa FG udi B, kaldes CBA, Anstøds-Vinklen (Angulus Incidentiæ), og ABE, Reflexions-Vinklen.

§. 323.

Da den hele Kraft AB af den Ting, som støder an ^{Hvad Deel af} ^{den hele Kraft,} ^{som i det skieve} ^{Anstød giver} ^{sig.} kan opløses i de to Side-Krafter AC og GD, §. 279, og Stødet skeer alene med den Kraft som AB, naar C støder skiev an i B paa FG, men derimod med den hele Kraft som CB, naar den støder lige eller perpendicular an: Saa er det klart, at det lige eller perpendicular Stød maa i Kraft forholde sig til det skieve som $CB : AB$, som den hele Sinus til Cosinus af Anstøds-Vinklen.

§. 324.

Derfor en fuldkommen elastisk Ting C støder an paa ^{De fuldkommen} ^{elastiske Ting} en anden fuldkommen elastisk og ubevægelig, efter den Linie FBG, da springer den efter Slaget saaledes tilbage, at ^{springe under} ^{den samme Vin-} ^{kel tilbage, under} ^{hvilken de støde} Anstøds-Vinklen CBA er lige saa stor som Reflexions-Vinklen ABE.

Thi

an paa en ube-
vægelig Mod-
stand.

Thi om den hele Hastighed, hvormed C støder an paa B i B, er CB; da kan den inddeles efter §. 279 i AC og CG, men da AC bliver usorandret ved Sammenstødet, glider C med den, efter at Sammenstødet er forbie, hen efter Planet, og saaer derved en Hastighed BF i den Direktion $BF = BG$ eller AC. Den Hastighed som BA derimod, der egentlig blev tabt for et Dieblis i Sammenstødet, meddeles igien derved, at de elastiske Ting igientager deres Figur, og i at igientage den, støde tilbage med en lige saa stor Kraft, som den, de bleve sammentrykte med.

Følgelig bevæges C efter Slaget igien efter de Direktioner AB og FB med Hastigheder, som AB og $FB = AC$, følgelig saa $BE = CB$ og Vinklen $EBA = CBA$. Hvoraf følger, at om en Ting falder perpendicular ind paa en anden elastisk og ubevægelig, springer den tilbage i sig selv.

§. 325.

Under hvad
Vinkel en Ting
bør støde an, for
i Tilbageprin-
get at treffe en
anden givne
Ting, som kan
treffes.

Man bestemmer derfor overmaade let det Punkt B, i hvilket en Ting E bør støde an paa et elastisk Plan FG, for at det i at springe tilbage skal kunde treffe den Ting i H. Thi da E og H ere givne i Henseende til Linien FG, ere og $EF = D$ og $HI = d$ givne, saavelsom $FI = l$, da nu efter §. 324 EBF og HBI ere ligedanne Triangler, saa bliver, om $BI = x$, $FB = l - x$, og

$$D : l - x = d : x, \text{ følgelig } x = \frac{dl}{D + d}.$$

§. 326.

Hvoraf den
ufuldkomne Ela-
sticitet kan maa-
les.

Saafermt at af den Kraft AB noget tabes, hvilket altid skeer, om de elastiske Ting ei fuldkommen igientage deres Figur,

gur, da er det klart, at Trianglet BKL ei bliver som Trianglet ABC, naar for Ex. den Deel BK alene igien meddeles af den Kraft BA; folgelig bliver da heller ikke Reflexions-Vinklen saa stor som Anstods-Vinklen. Disse Love bestemme Bevægelsen for Reflexionen, og man kan deraf maale den ufuldkomne Elasticitet. Men al Reflexion kommer ikke af Tingenes Stød, skiont det her ei er Stedet at tale om dets andre Marsager.

§. 327.

Vi have fremdeles at tale om det skieve Stød, det nemlig, hvori Slaget vel gaaer igiennem Centra af Kuglerne, men det hele Slag ikke gaaer i Direktion af den Linie, der forener Centra, hvilken, efter hvad man veed af Geometrien, staaer perpendicular paa Kuglernes fælles Røret-Punkt. Man kan her, ligesom i det lige Sammenstød, betragte en Mængde Tilfælde, hvoraf vi ville igiennemløbe de fornemmeste. Men forud maa agtes, at det skieve Stød, naar dets Direktion gaaer igiennem et Center alene i Kuglerne, altid meget let ved Kræfternes Oplosning i to andre retvinklede Kræfter bringes paa Reglerne af det lige Sammenstød, saa man ikke behøver uden de forhen givne Regler, og den nylig omtalte Kræfternes Oplosning, for at udvikle alle Tilfælde af to Kuglers skieve Sammenstød, hvilket vi ville nærmere oplyse ved følgende Exempler.

Bestaaenheten af det skieve Stød, naar to Kugler staaer an paa hverandre, som beggére bevægelige.

§. 328.

Første Tilfælde,
naar de begge
ere elastiske, og
den ene hviler
for Slaget.

Derfor (Taf. XIII. Fig. 2.) F er en elastisk Kugle, som hviler; A en anden elastisk, som støder an paa den efter en Direktion AB, med Hastighed som AB. Da kan §. 279 den Kraft, eller om man vil, den Hastighed efter AB opløses ubi to andre med den ligegyldige AD og DB, hvoraf DB staar perpendicular paa Kuglernes Røre-Punkt, eller naar A kommer i B, gaaer igiennem deres Centrer B og F. Den gjør da et lige Sammenstød, saa man kan beregne dette Tilfælde efter de forrige Regler; bestemme af den givne Vinkel ABD og af AB, Hastigheden DB og af den igjen Hastigheden, hvormed Kuglen F skal bevægessig efter Slaget i den Linie FG.

Hvad Hastigheden AD henefter BI angaaer, da seer man, at den ved Sammenstødet ei forandres, saa A bevæger sig efter Slaget i B med en Hastighed $BI = DA$ hen efter BI.arten af Kuglen F bliver i dette Tilfælde altid efter FG.

§. 329.

3 samme skilles
tre andre Tilfæl-
de fra hinanden.

Hvad sig derimod angaaer Bevægelsen af Kuglen A efter Slaget, da kunne tre Tilfælde skilles fra hverandre.

1) Om B og F ere lige store, da bliver hele Hastigheden efter DB meddeelt den Kugle F, §. 297. 3. saa at i A denne Hastighed ved Slaget plat tabes. Den bevæger sig derfor efter Sammenstødet alene med den Hastighed BI, saa Kuglerne B og F i dette Tilfælde altid bevæge sig fra hverandre i Direktioner BG og BI, der gjøre en ret Vinkel med hinanden.

2) Ere

2) Ere derimod Materiernes Størrelser i de to sammenstødende Kugler A og F ulige, da enten springer den anstødende igten tilbage, eller gaaer fort efter samme Drive-Linie som F. Er i den første Tilfælde, da Kuglen springer tilbage, Hastigheden, som altid kan bestemmes efter §. 297, = LB, da bliver i A Hastigheden og Bevægelsen efter Slaget af Størrelse og Direktion som BK, og Kuglerne A og F løbe efter Slaget fra hinanden under den stumpe Vinkel GBK.

3) Saafermt derimod, at A efter Slaget gaaer i samme Drive-Linie, som F, og dens Hastighed antages at være som BG, da bliver Direktionen af A efter Slaget BH, saa Kuglerne A og F gaae efter at det er forbi under en spits Vinkel fra hverandre.

§. 330.

Dersom begge Kuglerne A og F bevæges imod hverandre, ^{Andet Tilfælde, naar to haarde Ting støde sammen og bevæges imod hverandre.} og ere haarde eller uelastiske, da er det klart, (§. 3. No. 1 og 2) at om A bevæger sig til Sammenstødet med den Hastighed AB, F derimod med den Hastighed Fc, da om AB inddeles i de to Side-Bevægelser AC og AD, FC ligeledes i de to FI og Fh, (til FI svarer No. 2. Fg) skeer Sammenstødet alene af de Kræfter, der ere som CB og hc, og det saaledes, at begge Tingene efter Slaget gaae, i Henseende til den i begge overblevne Hastighed, efter en Direktion i denne Perpendikel efter Bc for Exempel. Side-Bevægelserne derimod DB og hF gaae uforandrede fort efter Bf og ck. Er da den fælles Hastighed efter Slaget Bc = ce. Side-Hastighederne, som ei

Ee ee 2

lide

lide af Slaget, Bf og ck , da om Parallelogrammerne gøres over disse Hastigheder fuldstændige, bliver Bz i Henseende til Direktion, Hastighed og Kræfter, den Bevægelse, som A faaer efter Slaget, og cd ligeledes den Direktion F faaer efter Slaget, hvorved kan i Almindelighed agtes

1) At om $CB = Bh$, gaae A og C fort efter Slaget efter parallelle Direktioner Bf og ck .

2) Bevæge de sig imod hverandre før Slaget, gaae de fra hverandre, som i Fig. 3. No. 1, og den relative Hastighed, som i dette Tilfælde forårsager Slaget, er Ce .

3) Bevæge de sig før Slaget med hverandre, bliver Bevægelsen efter Stødet, som i Fig. 3. No. 2, og den relative Bevægelse, som harer forårsaget Slaget, er Ch .

4) Dersom man deler denne relative Hastighed i forkeert Forhold af Materiernes Mængder udi A og F , hvilket vi ville sætte var giort (Taf. XIII. Fig. 3. No. 2.) udi S ; da bliver BS den fælles Hastighed efter Slaget; thi kaldes CB , H ; ch , h , Materiernes Mængde udi A , M , udi F , m , og CS , x ; da faaes i den Tilfælde, naar Tingene før Slaget bevæges efter en Direktion, $m : M = x : H - h - x$, og altsaa $CS = x = \frac{mH - mb}{M + m}$, og $SB = H - \frac{mH + mb}{M + m} = \frac{HM + mb}{M + m}$, hvilket just er i Folge §. 29; den fælles Hastighed efter Slaget. Man kan paa selv samme Maade udføre Beviset for den Tilfælde, da de bevæges imod hverandre.

5) Folge-

5) Følgelig, naar denne Hastighed er givet, og ved Kræfternes Parallelogram, hvort Vinklen ABD altid bør være bekendt, BD er ligeledes givet, saa kunne Direktionerne efter Slaget, saavelsom Størrelserne af Hastighederne cd og B' altid fuldkommen bestemmes.

§. 331.

Hvad de elastiske Ting's flieve Sammenstød angaaer, da Det samme undersøges i de elastiske Ting's Bevægelse og Sammenstød. kan det bestemmes fuldkommen paa selv samme Maade, alene at man agter, at de efter Sammenstødet og kunne i Henseende til den perpendicularære Hastighed i den Linie, der gaaer igiennem deres Centra, og folgelig igiennem Sammenstøds-Punktet, springe fra hverandre.

Man kan forestille sig to almindelige Tilfælde: Den ene som (Taf. XIII. Fig. 4. No. 1.) naar de efter Slaget springe med en Hastighed efter Perpendiklen DE' fra hverandre; den anden, naar de i Henseende til den samme Hastighed efter Slaget bevæges begge med hinanden (Taf. XIII. Fig. 4. No. 2.). Man seer let, at i begge, om A og F bevæge sig imod hverandre med Hastigheder, som AB og FI, saa de kunne paa en Tid komme til I; da om AB inddeles i AC og AD, FI ligeledes i FG og FH, da flæer Stødet alene med de Kræfter, som DB og IH. Ere Hastighederne efter Slaget BE og I', fordi da Hastighederne BC og GI intet lide ved Slaget; om Bg tages $= CB$, $GI = I'$, og Parallelogrammerne $EfgB$ og $I'gK'$ gøres fuldstændige, da bliver Bf Hastigheden og Drive-Linien af A efter Slaget, IK' Hastigheden og Drive-Linien af F efter Slaget.

§. 332.

§. 332.

Vil man gøre den virkelige Bestemmelse af disse Hastigheder, da kunne Hastighederne Be og I' findes efter §. 295. Men man kan og paa samme Maade som før iagttage, at dersom den relative Hastighed efter Perpendiklen D' , som er DH , deles som før §. 330. 4. i S i forkeert Forhold af Materiernes Mængder i A og F , at da SB er den fælles Hastighed efter Perpendiklen D' i begge Tingene A og F , og folgelig om $DB = H$ og $HI = h$

$$= \frac{MH + mb}{M + m}, \text{ hvor man og videre saae at } DS \text{ var } = \frac{mH - mb}{M + m}.$$

Saa kan og altid Hastigheden i Perpendiklen D' efter Stødet udi I bestemmes ved at tage $SB - DS = BE$ og Hastigheden i F efter Stødet, ved at tage $SH + SB = I'$.

Thi gjør man Udbregningen efter disse Bestemmelser, da kommer man til de §. 295 forhen givne Værdier for Hastigheden. Vi ville her alene vise det for den Tilfælde, (Taf. XIII. Fig. 4. No. 2.) da A og F før Slaget kunne ansees i Henseende til Bevægelsen efter Perpendiklen D' at gaae efter en Direktion. Saa tidt som dette er, da bliver $SB - DS$

$$= \frac{MH + mb}{M + m} - \frac{mH - mb}{M + m} = \frac{2mb + (M - m)H}{M + m}, \text{ som efter §. 295}$$

er Hastigheden efter Perpendiklen D' efter Slaget udi A .

Ligeledes bliver Hastigheden efter Perpendiklen D' udi

$$F, \text{ naar Slaget er forbi, } SH + SB = H - h - \frac{mH - mb}{M + m} + \frac{MH + mb}{M + m} = \frac{2MH + (m - M)b}{M + m}, \text{ som efter §. 295 er Hastig-$$

heden udi F efter Slaget.

Man

Man seer let, hvorledes dette ligeledes kan vises for det Tilfælde, da A og F gaae imod hverandre for Slaget i Henseende til Bevægelsen efter Perpendiklen D/.

§. 333.

Bidere forstaaes let, at ligesom i det lige Stød Inertiens Center gik bestandig fort, Stødet uagtet, saavel før som efter det, i en lige Linie med en ensdan Bevægelse, saa maa det og gaae ligeledes fort i alle Henseende i det skiede Stød. Thi gaae de to Ting A og F (Taf. XIII. Fig. 5.) med en parallel og ensdan Bevægelse fort efter Ab og FG, saaledes at i samme Tid Hastigheden udi A er Aa, og i F, Ff, da maa og, om G antages at være Inertiens Center af A og F, saaledes, at $F:A = AG:GF$, dette Center i Henseende til denne Bevægelse bestandig gaae fort med en ensdan Bevægelse som Cc, i lige Tider; thi trekkes AF, af og bg ud til E, da bliver bestandig i lige Tider Aa: ab og Cc: cd og Ff: fg i den samme bestandige Forhold.

For saavidt derfor, (hvad heller det er i de haarde eller i de elastiske Tings Bevægelse,) de bevægede Ting gaae med en Side-Hastighed, som Aa, Ff, der ei forandres i Stødet, (Taf. XIII. Fig. 4.) for saavidt er det klart, at Tyngdens Centers Bevægelse ei forandres. Men vi have forhen seet, at denne Bevægelse heller ei forandres, for saavidt som de efter Perpendiklen D/ i lige Sammenstød slaae an paa hverandre. Følgelig forandres Tyngdens Centers Bevægelse ved ingen af Delene, men drives virkelig (Taf. XIII. Fig. 5.)

af

af to Kræfter en efter Gc , som forårsages af den forømtalte Bevægelse paa Siden, efter hvilken Tingene bevæge sig frit uden Sammenstød; en anden efter hc eller GI , som haver den forømtalte Direktion efter Perpendiklen, i hvilken det lige Stød skeer, og denne Bevægelse Gc er den i det lige Stød forømtalte fælles Bevægelse. Af disse begge Kræfter drives Tyngdens Center G efter Direktion af en ret Linie Gh , i hvilken det bestandig gaaer fort med en ensdan Bevægelse.

§. 334.

I hvor mange
Legemer at der
end under sig
støde sammen.

Og man seer fremdeles, at i hvor mange Ting der i et heelt System af sammenstødende Legemer end komme sammen, maa dog Bevægelserne alle med hinanden altid kunde bringes til de forømtalte, saa at derfor i Almindelighed, i hvor mange Ting der end støde sammen, Tyngdens eller Inertiens Centers ensdanne Bevægelse i ret Linie deraf dog aldrig forstyrres eller forandres.

§. 335.

Beskaffenheden
af det eccentricke
Stød.

Vi have endnu kortelig at betragte Virkningen af det eccentricke Stød, eller af den Tilfælde i Tingenes Sammenkomst imod hverandre og det deraf følgende Slag, naar Stødet i et heelt System af sammenhængende Legemer ei gaaer igiennem Tyngdens Center, men igiennem hvad for helst et andet Punkt man vil, og efter hvad Direktion det skal være uden for dette Center. Da vi have seet §. 155, at alle Inertier kunne efter den der givne Regel flyttes om fra alle Punkter,

ter, i hvilke de betragtes at henge rundt omkring, til hvad andre man selv lyfter og behager, saa at under de givne Betingninger Virkningen af Kræfterne paa det hele dog bliver før og siden den samme. Kan man derfor allerførst antage, at i hvad for et Legeme man end foretog sig, for i Henseende til det at anstille de foregaaende Betragtninger, da kunne (en saadan Omflytning af Inertiernes først gjort) alle de smaa Dele det hele Legeme over ansees som sammentrykte i et eneste Plan, der gik igiennem alle Inertiernes fælles Tyngders Center. Saa man da i Steden for det hele Legeme kan tage et eneste saadant Plan i Betragtning, i hvilket nemlig den samlede Inerties Modstand er den samme, som forhen i det hele foresatte Legeme.

§. 336.

Er da (Taf. XIII. Fig. 6.) ABDECK et saadant Inertiernes første Bevægelses Bestaaenhed. Plan, hvilket vi igien (om Flytningerne af Inertien betragtede at være gjort som før, eller og at være, som før er bleven sagt, simpel hen muelige, for at kunde gøres) ville betragte som umaterielt, undtagen i de Punkter A, B, D, E, C, K, hvis Tyngdes Center vi antage at være udi M, imidlertid at vi ansee dem selv som at henge fast ved de umaterielle Linier AM, DM, EM, KM, o. s. v. Forestiller HQ Direktionen af Kræften, som skal drive dette Plan, da siden dens Virkning (hvad heller den er Trykning eller Stød) ei gaaer igiennem M, er det klart, at samtlige Inertiernes faae i første Dieblit, i Henseende til deres ulige Afstand fra Q

Ff ff

ulige

ulige Anstød eller en ulige Drift til Bevægelse, saa at de staae ulige imod, og søge først at bevæge sig fra hverandre efter rette Linier; men da Systemets Sammenhæng deri er hinderlig, begynde de at bevæge sig i Cirkulær-Bevægelse, A for Ex. efter Am, D efter Df, E efter Eg, K efter Kz, o. s. v. Centret til disse Vinkel-Bevægelser kan tages som i L. Følgelig da disse Centrifugal-Kræfter i alle Punkterne (om BMC er en Diameter af Tyngden) drive BMC omkring paa begge Sider, saa er det klart, at det eccentricke Stød maa forårsage strax fra første Dieblis af, at det hele System begynder at rulle om i Cirkel-Bevægelse, og Omrulningen maa skee om Tyngdens Center, siden i Henseende til det samtlige Momenter af alle Centrifugal-Kræfterne rundt om maa staae i Ligevægt med hverandre. (*)

§. 337.

(*) For at forstaae Omvæltnings-Bevægelsen saa meget desto tydeligere, behøves ikke at betragte samtlige Inertierne som omflyttede til et Punkt, man kan betragte ethvert Element af Inertien for sig som i Bevægelse, for at see, hvad Forandring det forårsager i Henseende til Omvæltnings-Axlen; i Henseende til hvilken man i sær maa agte, at den ikke under den hele Inerties Omvæltning altid bliver uforanderlig, men at den kan forandres og ligge snart saa, snart anderledes i det omrullende Legeme, hvoraf og alle de Vanskeligheder reise sig, som i dette Slags Spørgsmaal kunde forekomme. Men for at legge her de første Grunde til denne Theorie, vilde vi alene

§. 337.

Følgelig bliver ved deslige Stød uden for Centret altid Ved det eccen-
 en Omvæltning til om Tyngdens Center og om en ubevægelig triske Stød for-
 Arel, aarsages en Om-

alene forklare, hvorpaa det i Almindelighed kommer an, at
 Bevægelsen skal kunde skee om en altid ubevægelig Arel.
 Da vi i denne Henseende agte.

- 1) At saa tidt som centrifugale Kræfter opvækkes af hvad Aarsag
 det end og er, være sig af Stødet eller andre virkende Kræfter, i et
 Legeme, hvoraf det Punkt A (T. XIII. F. 7.) kan ansees som et
 Element; da begynder altid en Bevægelse omkring en vis Linie,
 som AI, hvilken vi derfor kalde Arelen af Omvæltningen. Thi be-
 trages AI som at staae perpendicular paa et Plan, for Ex. paa
 Planet af den Tasse, Figuren er troffen paa, og i det Punkt
 C, at sfære det igiennem. Om videre fra hvad for et Punkt af
 Inertien, som man vil, betragtes, som at være kastet en Linie
 ned perpendicular paa AI, hvilken vi ville kalde p , og Hastig-
 heden i det antagne Punkt kaldes v , da er Hastigheden i Vin-
 kel-Bevægelsen $= \frac{v}{p}$, men den Centrifugal-Kraft, som foraaar-
 sages af Hastigheden $v = \frac{v^2}{p} A$, om Elementet af Inertien
 $= A$. Kaldes et andet Element af Inertien ligeledes a . Di-
 stancen i dette nye Punkt fra Omvæltnings-Arelen AI, x ; da fin-
 des let Hastigheden til a , siden i Følge Hypotesen det omvæltende
 Legeme er et fast Legeme, og alle Delenes Hastigheder ere derfor
 proportionerte Distancerne fra Arelen. Saa alene at man veed,

If ff 2

hvad

veltning i Beg- Urel, saa længe som at Centrifugal-Kræfterne bestandig staae
met omkring i Ligevegt med hverandre. Men man seer desuden let, at
Tyngdens Cen- ter. Og dette Tyngdens Center maa faae en fortgaaende Bevægelse af Sla-
Center faaer get

hvad Hastigheden er i et Punkt som A, veed man den derved
og udi alle de øvrige, naar deres Distancer fra Ureln ere givne.

Saaledes bliver $p : x = v : \frac{xv}{p}$, hvilket er Hastig-
heden udi a , hvoraf følger §. 173 Forel. at Central-Kraf-
ten bliver $\frac{xv^2}{p} a$. Men denne Kraft trykker Linien AI efter
en perpendicularer Direktion, og alle de øvrige Centrifus-
gal-Kræfter trykke den ligeledes, saa at man deraf seer, at
den Linie, omkring hvilken at Omveltningen sfeer, altid maa
bevæges enten efter den ene eller den anden Side af Planet
HD, eller i sammensat Bevægelse imod flere af dens Sider
tillige, om samtlige Momenter af disse Central Kræfter regnes
de i Henseende til et Punkt som C, ikke paa alle dens Sider
ere lige store. Ere alle disse Momenter derimod lige store i
alle Henseende, da faaer Ureln hverken en Progressiv Bevæ-
gelse, ei heller nogen Omveltning-Bevægelse.

- 2) Begge Dele sees endnu tydeligere, dersom man opløser Cen-
trifugal-Kraften af et, hvor man vil, for Ex. udi a frivillig
antager Punkt i to andre Kræfter, og til den Ende forestiller
sig paa det Plan, paa hvilket at Ureln AI staaer perpendiku-
lar, to andre Linier HD og FG saaledes, at de ere perpen-
dikulære under sig, og at Omveltning-Ureln AI staaer perpen-
dikulær

get efter en ret Linie. Thi betragtes atter igien samtlig Iner- desuden en sørt-
 tierne udi D, E, K og A, paa den foromtalte Maade at gaaende Bevæ-
 være blevene samlede udi det Punkt Q, hvorpaa HQ virker, gelse i ret Linie.

If ff 3

saa

dikulær paa dem begge udi C, saavel som paa det hele Plan, over hvilket at de ere trofne. Kastes fra a en Perpendikel aB ned paa det Plan, Arlen er perpendikulær paa. Videre, om fra B trekkes BD perpendikulær ned paa CD , da forestiller BD den Deel af ethvert Element i Inertien dets Central-Kraft, som trykker Arlen immerfort hen efter Direktionen FG ; og ligeledes CD den Deel af Centrifugal-Kraften, som trykker Arlen hen efter Direktion af HD . Saa at om disse Centrifugal-Kræfter i sig betragtede ikke have hver for sig hverandre op, da faaer Omvælnings-Arlen AI nødvendig en Progressiv-Bevægelse, enten hen efter HD , eller efter FG .

- 3) Dersom $CD = z$, $BD = y$, da er $CB = \sqrt{zz + yy} = x$, saa at den hele Centrifugal-Kraft i det Punkt

a bliver derfor $\frac{v^2 \cdot \sqrt{zz + yy}}{p^2} a$, som kan forestilles ved BC ,

hvortfor Kraften hen efter BD bliver $\frac{yv^2}{p^2} a$, og den hen

efter $CD = \frac{zv^2}{p^2} a$. Saaframt derfor at ingen Progressive

Bevægelse af Arlen hen efter ECG skal have Sted, maa

nødvendig alle Centrifugal-Kræfterne, som $\frac{yv^2}{p^2} a$ have hver-

andre op eller $\int \frac{yv^2}{pp} a = 0$, det er $\int ya = 0$, fordi $\frac{v^2}{pp}$

er her at ansee som en bestandig Størrelse.

fig:

saa sees let, at Stødet da maa gaae igiennem Tyngdens, eller hvilket her idelig er os det samme, Inertiens Center, og at man da kan betragte Forandringen af Anstødet paa samme Fod

Ligeledes sees, at om ingen Progressiv- eller fortgaaende Bevægelse i Arlen skal have Sted hen efter HCD, da maa $\sum A = 0$.

- 4) Men disse 10 Conditioner eller Betingninger finde sig ind af sig selv, naar det Punkt C er Tyngdens Center; thi de indeholde da ikke andet paa alle Sider end Momenterne af Inertierne, i Henseende til det beregnede, hvilke man veed af §. 128 F. at ere omkring dette Punkt lige store i ethvert System, hvor Tyngden er Inertien proportionert. Saa deraf sees.

Alt saa tidt som et Legeme ruller om en Arel, i Henseende paa hvilken Centrifugal-Kræfterne ingen fortgaaende Bevægelse forarsage, da gaaer denne Arel altid igiennem Systemets eller Legemets Tyngdes Center.

- 5) Men naagtet at Central-Kræfterne betragtede saaledes, som at ophæve hverandre, ikke kunne give en Arel, der gaaer igiennem Tyngdens Center, en Progressiv-Bevægelse, følger deraf dog endnu ikke, at de jo kunne bøje den ned imod Siderne af det Plan, hvorpaa vi betragtede den allerførst som at staae perpendicular. Thi til det første udfordres alene, at Kræfterne selv ere i Rigevegt, fordi at alle Punkterne have i Henseende til den fortgaaende Bevægelse en og den samme Hastighed. I Henseende til det sidste derimod, at Arlen ei

skal

Fod som før, som om nemlig i et lige Stød Anslag skede paa en Kugle, saa at Stødet gik igiennem dens Center. Følgelig blev efter Stødet nødvendig en Hastighed til, hvormed Tyngdens Center gik fort i ret Linie, hvorimod Resten af den i Stødet meddeelte Hastighed bliver anvendt til, at alle Delene rulle om Tyngdens Center med Hastigheder, som ere i lige Forhold med deres Distancer fra samme Center.

§. 338.

Skal beies, behøves desuden, at Kræfterne have hverandre op i Henseende til deres Momenter. For tydelig at see, at det sidste ikke følger af det første, behøves intet andet end at opløse det hele Moment af Centrifugal-Kraften i to andre, som før; da Momentet af denne Kraft regnet fra Tyngdens Center af de nylig anførte Årsager beløber sig til $\frac{v^2 \sqrt{zz+y^2}}{pp} ax$,

fordi $BC = x$ i Følge Konstruktionen. Derfor bliver atter igen, som før, Momentet henester $CD = \frac{v^2}{p^2} azx$ i enhver elementær Masse, og Momentet henester $BD = \frac{v^2}{p^2} ayx$.

Hvoraf man seer uden Meie, at om Årsen af Central-Kræfternes ulige Drift ikke skal boie sig ned imod Planet, da maa

$$\int \frac{v^2}{p^2} ayx \text{ være} = 0, \text{ og ligeledes } \int \frac{v^2}{p^2} azx = 0, \text{ eller}$$

fordi $\frac{v^2}{p^2}$ er her en bestandig Størrelse, maa være $sayz = 0$,

og $sazx = 0$, men det forstaaer sig af sig selv, at fordi $say = 0$, og $saz = 0$, ere ikke $sayx = 0$ og $sazx = 0$.

- 6) Dersom begge disse Betingninger have Sted, og ingen Forandrung udvortes fra videre fornuetligere Bevægelsen, bliver Omveltning

§. 338.

Disse to Bevæ-
gelser hindre
hverandre ikke.

Man seer i øvrigt, at disse to Hastigheder, den ene, hvormed Tyngdens Center gaaer bestandig fort i ensdan Bevægelse, den anden, hvormed Delene rulle om Tyngdens Center ligedan i ensdan Bevægelse, man seer, siger jeg, at disse to Hastigheder altid kunde bestaae sammen i en og den samme Ting, uden at den ene forvirres, det er, hindres eller hjælpes af den anden. Man har, for at forestille sig dette endnu klarere og uden alle foregaaende mekaniske Grunde, alene nodig at betragte den Ting, der har en omrullende Bevægelse om en Arel, der gaaer igiennem Tyngdens Center, som lagt paa et Bret, der gif fort med Tyngdens Centers Bevægelse i ret Linie, fremdeles at den paa samme Bret stod vertikal, og rullede om sin Arel uden al Hinder.

Brete

velstningen altid ved omkring den samme i alle Henseende ubevægelige Arel. Saafermt derimod at ved Stedet en Forandring skeer, kan Bevægelsen fastsættes paa den Maade, som vi nærmere skulde forklare i næstfølgende Tillæg. Saafermt derimod at hastiggierende og idelig virkende Kræfter komme til og bevæge Inertien, kan en Mængde Forandringer i Arels Bevægelse finde Sted, om man ei kan ansee Middel-Direktionen af samlig disse Kræfter som at falde over Tyngdens eller Inertiens Center, for alene at drive den fort med en fortgaaende Bevægelse. Disse sidste Tilfælde angaaende beresterlaaes *Hist. de l'Acad. de Berlin. An. 1740. p. 185. decouverte d'un Nouv. Princ. de Mekan. par Mr. Euler.*

Trettede Tillæg.

Om

Tingenes Sammenstød, betragtet for saavidt,
som Naturen i disse Handlinger altid tagttager
Reglerne for det mindste Tab af sine Kræfter.

§. 336.

Blant de adskillige Regler, som i Mechanik kunne hielpe til de vigtige og vanskelige Spørgsmaals Opøsning, haver man i adskillige Tilfælde søgt at betiene sig af en, som ikke egentlig stammer fra mekaniske, men fra metaphysiske Betragtninger, og som bestaaer deri; at Naturen i al Bevægelse og i alle sine Virkninger, saa meget som mueligt, gjer det mindste Tab af Kræfter og Virkning og alt for Næsten lige, den mindste Forandring, for at komme til sin Hensigt. At Naturen i sine Handlinger tagttager det mindste Tab af sine Kræfter er et indirekkt Princip i Mechanik, men som dog i mange Tilfælde kan bruges.

Da alle metaphysiske Grunde i Mechanik bør ansees som fremmede, saa er det heller ikke uden med stor Forsigtighed, at man deraf bør betiene sig. Imidlertid kan denne Tanke, ret brugt, i en Mængde Tilfælde hielpe til let at udvikle ellers heist vanskelige Udregninger, og vi ville vise, hvorledes Naturen refter sig efter denne Regel i alt, hvad der angaaer Sammenstødet.

§. 337.

Vi have for seet §. 287. S. og Anm. p. 527 at Stødet forrettes saaledes af Naturen, saa de Kræfter, der staae fæst for under denne Forretning, Det tagttages virkelsen i Tingenes Sammenstød.

ning at forgaae, virkelig ere de mindste. Jeg siger, som staae Fare for at forgaae, fordi de ved Figurens Sammentrykning virkelig tabe sig i de haarde og bløde Ting bestandig, men ikke uden for et Dieblis i de elastiske Tings Sammenstød. Dette mindste seer Naturen egentlig paa i Stedet, nemlig paa det mindste Tab af sine levende Kræfter, og deraf flyder, som vi før have seet, at disse Kræfter virke i Sammenstødet som Pressioner, eller at de levende Kræfter, saasnart der handles om deres Ligevegt i adskillige Ting, her vurderes efter samme Maal som de døde.

§. 338.

Ligeledes paa en vis Maade i det eccentricke Stød.

Denne samme Naturens Huusholdning altid at arbeide saa at sige med mindst Bekostning giver Anledning til at afhandle Virkningerne af det eccentricke Stød, og at bestemme dets Love paa en mangfoldig let Maade, nemlig: Vi have i Forelæsningen i Almindelighed viist, at det eccentricke Støds Opløsning kommer an paa samtlig Inertiernes Omflytning, men til denne Sags Iverksættelse finder man ved at slutte paa ovensagte Maade et overmaade let Hjelpe-Middel: Alene at man forud iagttager, at vi her betragte alene det Tilfælde af eccentricke Stød, da Inertiene antages som at være elastiske, uden Tvingde, og i hvilket, at Stødet's Direktion desuden gaaer igiennem det Plan, udi hvilket er Inertiens Center, imidlertid at det tillige selv er perpendicular paa Omveltningens Aksen; paa det at denes Stilling ved Stødet ikke skal forandres, om de anstødende Legemer enten begge eller et af dem alene velter sig om en Arel, før Stødet skeer. Thi i dette Tilfælde seer man let af vores forhen sagte i Anmerkningen til §. 336. No. 6. at Centrifugal-Kræfterne da intet Moment faae i

Henseende

Henseende til Tyngdens Center. Med et Ord, vi betragte alene det Tilfælde, da Dmveltnings-Arten ved Stødet ei forandres.

Nemlig (*), saasnart som Stødet efter HQ. (T. XIII. §. 6.) hvilket vi i første Dieblis vilde ansee som en simpel Pression, og sætte perpendicular paa den Linie BMC, der gaaer igiennem Tyngdens Center; saasnart som dette Stød begynder at virke paa det hele System, da begynde samtlige Inertierne at staae imod med Kræfter, som i et hvert Punkt af Inertien ere proportionerte med de smaae Buer Df, Eg, Kz, Am, o. s. v. som i lige Tid beskrives, nemlig i det første uendelig liden Uafstands Dieblis. Men disse Buer ere proportionerte deres Halv-Diametre, hvorpaa de ere perpendicular, og disse Halv-Diametre maa regnes fra det Punkt L, om hvilket samtlige Inertierne i første Dieblis søge at bevæge sig, saa de blive som de Linier EL, KL, DL, AL, o. s. v. Selgelig kommer alt an paa at bestemme det Punkt L, som i første Dieblis Inertien søger at rulle om, eller i Henseende til hvilket dens Drift efter QH ophæver Pressionens Drift efter HQ saaledes, at det Punkt L i det første Dieblis af Stødet med Net kan ansees som et Punkt, der hviler. Thi før dette Punkt er bekendtgiort, ere Inertiens Kræfter i at staae imod ubekendte, og før de blive bekendte, kan Materien ei flyttes om.

§. 339.

Før derfor at bestemme dette Punkt, haver man antaget, at det maatte være det, fra hvilket om den hele til det Punkt V eller Q om- Hvorledes det Punkt kan bestemmes, om flyt-

(*) See Commentar. Petropolit. Tom. IX. pag. 189. Daniel Bernoulli de Percuss. Exc.

kring hvilket i flyttede Inerties Kræfter bleve beregnede, Modstanden af Inertien imod det eccentricke Sted Inertierne først begynde at rulle.

alle andre deslige Punkter, omkring hvilke Inertien kunde søge at bevæge sig, af Marsag, at det Punkt, som ved sin Inertie ikke staaer imod, bevæges heller ikke, §. 11. F. Hvoraf det naturlig maatte falde ved, at uden Tvivl blev dette saaledes søgte Punkt L Svingets Center, fordi vi saavel i Henseende til Stedet, som Svinget, have seet, at dette Punkt var det, som bevægede sig altid med en fuldkommen Friehed. Man seer desuden let, at uagtet Felgen, efter vores forhen sagte i Anmerkningerne til § 329 maatte blive, at efter Stedet det hele Legeme maatte faae deels en fortgaaende Bevægelse, hvis Hastighed var Hastigheden af Tyngdens Center; deels, at alle de øvrige Dele af Inertien maatte rulle om dette Center med en Vinkel-Bevægelse, saa maatte ikke destomindre for det Dieblis, Stedet stod paa, et Punkt kunde findes i eller uden for Legemet, omkring hvilket som hvilende, saavel Tyngdens Center, som alle de øvrige Punkter af Inertien, kunde ansees som at rulle om. Thi da Bevægelsen paa den ene Side af Tyngdens Center skeer efter en imodsat Direktion af Bevægelsen paa den anden Side; saa maa nødvendig i det første Dieblis af Stedet et Punkt gaae saa stærk med imodsat Bevægelse, saa det i denne Henseende kunde ansees som at hvile. Hvoraf tillige forstaaes, at det kommer paa et ud, hvad heller at man betragter for et Dieblis alle Punkterne af Inertien, tillige med Tyngdens Center selv at rulle om dette Punkt, eller om man i samme Tid betragter Tyngdens Center som at gaae fort med en retlinet Bevægelse, imidlertid at alle de øvrige Punkter af Inertien velle sig omkring det.

Men at det søgte Punkt var Svingets Center beviste sig derimod fuldkommen, saasnart som man foretog sig Udregningen af det Punkt L, thi skulle alle Inertieme, som sege at bevæge sig imod Central-Bevægelse omkring det, efter den Modstand de i Henseende til L giøre, omskiftes til V, da bliver §. 155. §.

$$\frac{D.DL^2 + E.EL^2 + K.KL^2 + A.AL^2 + \dots}{VL^2}$$
 den hele omskiftede Inertie udi V, som der gior samme Modstand, hvilken den hele Ting for gjorde. Denne Størrelse her efter vores forhen sagte være et mindste.

§. 340.

Men Linierne DL, EL, o. s. v. ere foranderlige Størrelser; for da at bringe dette til den simpleste Udregning, maa forud agtes, at om Tjngdens Center antages udi M og fra alle Inertieme, kastes ned (som her udi D) den Perpendikel DN, og DM treffes, da bliver $DL^2 = D.(DN^2 + NL^2) = D.(DM^2 - NM^2 + LM^2 + NM^2 + 2LM.NM) = D.(DM^2 + LM^2 + 2LM.NM) = D.(DM^2 + LM^2)$. Thi alle Momenter af Inertiernerne, som D. NM, have hverandre op paa begge Sider af Tjngdens Center M, og LM er en bestandig Størrelse. Dette iagttaget, bliver i V den hele omskiftede Inertie, om dens hele Mængde kaldes I, og VM, a; DM, b; EM, c; KM, d; AM, e; og LM, x; Da, siger jeg, bliver den hele Inertie omskiftet til V,

$$= \frac{I.x^2 + D.b^2 + E.c^2 + K.d^2 + A.e^2 \text{ o. s. v.}}{(a+x)^2}, \text{ en Størrelse, som er}$$

at agte for bestandig, og hvis Differential derfor = 0. Saa man faaer

$$\frac{2Ix dx (a+x)^2 - 2(a+x) dx. (Ix^2 + Db^2 + Ec^2 + Ka^2 + Ae^2 + \dots)}{(a+x)^4} = 0,$$

eller og $Iax + Ixx - Ixx - Db^2 - Ec^2 - Kd^2 - Ae^2 = 0$,
og følgelig

$$Iax = Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 \text{ eller } x = \frac{Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2}{Ia},$$

hvortil naar legges $BM = a$, da er $a + \frac{Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2}{Ia}$

Svingets Center § 115. hvoraf sees; at det Punkt L, omkring hvilket hele Inertien i første Øieblik af Stødet søger at velte sig, er Svingets Center, om ellers Figuren betragtes som at være bleven hængt vertikal op til at slynge udi V.

§. 342.

Regel for Inertiernes Omflytning.

Denne prægtige og nyttige Egenskab af Svingets Center kan og let udledes af de direkte mekaniske Grunde, ved hvilke man kan bevise aldeles ligeledes, hvad vi her have sagt. Saa der ingen Tvivl er paa den feromtalte Regels Rigtighed i alle disse Tilfælde (*). Vi ville derved ikke opholde os, men alene kortelig forklare, hvorledes man kan omvende denne Egenskab af Svingets Center, til at bestemme Virkningerne af det eccentricke Sted. I denne Henseende kan agtes, at man af det forhen sagte §. 341 treffer en overmaade let Regel, for at omflytte den hele Inertie i D, E, K, A, o. s. v. til B, thi forstaaer man ved Σ enhver af de smaa Inertier, som skal flyttes om, ved x ubestemt Viis enhver af de Linier, de søge at rulle om paa, som DL eller KL for Ex., da bliver den hele omflyttede Inertie udi V, $\Sigma \frac{x^2}{VL^2}$, men $VL = \frac{\Sigma x^2 \Sigma}{I.LM}$, §. 56. §. Følgelig er I. VI. LM

==

(*) See Opera Johannis Bernoulli. Tom. IV. No. 177. §. 14.

$$= \sqrt{x^2 z}, \text{ og altsaa den hele omslyttede Inertie udi } V = \frac{I \cdot LM}{VL}.$$

Ansees da Anstøds-Punktet som det, hvori den hele Ting blev hængt op, for at svinge, da siden Henge-Punktet og Svingets Center uden Forandring i Henseende til Svinget kunde byttes om med hverandre, §. 120. saa haver man alene nedig, for at finde den Inerties Mængde, som skal flyttes om til Q, at tage den fjerde proportionelle til Svingets Centers Længde i den givne Ting, ophængt til at svinge udi Q, til samme Centers Distance fra Tyngdens Center og til det givne Legemes hele Inertie; det udkommende er den Inertie, som i Q gier i Henseende til den anstødende eller trykkende Kraft den samme Modstand, som alle de smaa Inertier hver for sig, strødde det hele Legeme over.

§. 343.

Dette forudsat; er den største Deel af de Vanskeligheder overvundne, som falde for ved at bestemme Virkningerne af det eccentricke Sted i det foransterte Tilfælde. Thi saa tidt som (Taf. XIV. F. 4.) to Ting, af hvad Figur man vil, ED og CB støde an paa hverandre efter deres fælles Aere-Linie i det Punkt B, da gaar Direktionen af Stødet HBG enten uden for begges Tyngdes Center, eller alene uden for en af de sammenstødende Tings Center.

Er CB den Ting, som stødes af EAD i det Punkt B; saafremt da at Tyngdens Center i det anstødende EAD ligger i Anstøds-Perpendiklen HBG, behøves i dette Legeme ingen Omslytning af Inertien, siden i Henseende til det, Stødet er lige, og forårsager derfor udi EAD selv ingen Omveltning omkring et Punkt, som L, imedens

Det eccentricke Steds fuldkomne Bestemmelse.

imedens Stødet varer, saa det derfor heller ikke faaer nogen saadan Omveltning, efter at Stødet er forbi.

I CB derimod kan man betragte Stødet at skee uden for Tyngdens Center M, i hoed Punkt af Perpendiklen HBG, som man vil; selgelig udi det Punkt G saaledes, at HB Direktionen af Stødet er lodret paa den Linie CG, som gaaer igiennem Tyngdens Center M.

Finder man derfor det foromtalte Punkt L efter §. 342, det nemlig, omkring hvilket, som i første Dieblis ubeværgeligt, Inertien søger at rulle, og ved Hielp af samme flytter den hele Inertie om til B eller G, da er det klart, at Stødet nu er derved bleven et lige Sammenstød, saa at Hastighederne saavel i B, som i det anstødende Legeme kunde bestemmes efter de forhen givne Regler i Forelæsningerne.

§. 343.

Saafernt at Direktionen af Stødet tillige er eccentric i den anstødende Ting EAD, da sees ligeledes, at den hele Inertie af dette Legeme paa samme Maade maa flyttes om til B eller R i den Linie, der gaaer igiennem Tyngdens Center, hvilket her kan ansees for et og det samme; hvorved man atter igien finder, at Sammenstødet imellem begge Legemer kan ansees som et lige Sammenstød, og at derfor Hastighederne i begge efter Slaget kunne findes ved de forhen givne Regler for det lige Sammenstød. Da man siden let kan vise, hvad saavel den foregaaende, som den omrullende Bevægelse bliver udi begge de sammenstødende Ting efter Slaget.

§. 344.

Skæer Stødet efter en skiev Direktion IG; da kan det, som man veed, opløses i de to Side-Direktioner IH og HG, hvoraf Stødet alene skæer efter HG, uden at man haver nødig at bestemme sig om IH, efter det i Forelæsningerne om det skieve Stød forhen forklarte.

§. 345.

For at oplyse det allerede sagte med Exempler, tage af de simpleste Tilfælde, som i denne Sag kunde forekomme, vilde vi antage, at de to Ring (Taf. XIV. Fig. 4.) AED og FCB, som støde sammen, ere to cylindriske Stofke, Fig. 5. At Direktionen af Stødet gaaer igiennem Lynghdens Center af den anstødende Ring AD: At C hviler før Sammenstødet og treffes af EAD udi B. Kaldes da den hele Materies Mængde udi EAD, M; Hastigheden før Slaget H; den i CBF, som før, I, og GL er Længden af det simple Pendul, der svinger udi lige Tid med Stangen eller Cylindren C ophængt udi G. M Lynghdens Center udi Stangen CBf. Da bliver den hele til B om-

flyttede Inertie udi $cf = \frac{I \cdot LM}{LG}$ §. 342. Denne Inertie kommer til lige Sammenstød med ABD udi B, og gjør udi Slaget samme Virkning som den hele uomflyttede Inertie i Cf. Følgelig bliver Hastigheden i det

$$\text{Punkt B efter Slaget i Cf. } 294 \text{ F.} = \frac{2MH}{M + I \cdot \frac{LM}{LG}} = \frac{2MH \cdot LG}{M \cdot LG + I \cdot LM}$$

og Hastigheden efter Slaget udi EAD, der beholder sin retlinede

$$\text{Bewægelse siden, som før,} = \frac{H \cdot (M - I \cdot \frac{LM}{LG})}{M + I \cdot \frac{LM}{LG}} = \frac{H \cdot (M \cdot LG - I \cdot LM)}{M \cdot LG + I \cdot LM}.$$

Sh sh

§. 346.

§. 346.

Efterat saaledes Hastigheden er funden for det Punkt B, er det overmaade let at finde samme for et hvert andet Punkt i Stangen, hvor som helst man vil. Thi da L er Omveltningens-Punktet, og Tiden af Omveltningen overalt i Stangen den samme; saa blive Hastighederne i disse Punkter som Distancerne fra L, der ere Omveltningens-Bevægelsens Halv-Diametret. Deraf findes let Hastigheden, hvormed Tyngdens Center søger at velte sig omkring L, thi

$$LG:LM = \frac{2M.H.LG}{M.LG+I.LM} : \frac{2M.H.LM}{M.LG+I.LM}, \text{ hvilket er Hastighe-}$$

den af Tyngdens Center efter ret Linie, hvormed selgelig det hele Legeme gaaer fort. Og hvad Omveltningens-Bevægelsen angaaer, da naar den i et Punkt er bekendt, er den bekendt udi alle: Men Omveltningens-Hastigheden udi G er i Henseende til Tyngdens Center

$$\frac{2MH.LG}{MG.(M.LG+I.LM)}. \quad \S. 315. 2.$$

§. 347.

Man kan saaledes betragte i en og den samme Ting to Vinkels-Bevægelser, en omkring Tyngdens Center M, naar dette første antages at gaae fort i relinet Bevægelse, den anden om Omveltningens-Punktet L, begge ensdanne. Man seer let ved at eftertanke den første, hvad Linie L bevæges over, nemlig over den sædvanlige Cykloide, siden denne Linie kan ansees som at blive beskrevet af en Cirkel, hvis Center gaaer fort med en ensdan Bevægelse, imidlertid at Cirklen selv med en ligesaadan ensdan Bevægelse ruller om sit fortgaaende Center. Saa Halv-Diametern i denne Cykloiden beskrievende Cirkel er ML, dens Centers fortgaaende Bevægelse skeer efter en Linie parallel Mm, parallel

rakket BH. Og da man tillige veed, at naar det Punkt L i Cirkelns Peripherie beskriver en sædvanlig Cykloide, andre uden og inden for samme tagne, da beskrive forkortede og forlængede saa kaldte Cykloider, saa seer man, hvorledes samtlige disse Punkter i deres sammensatte Bevægelse bevæge sig; hvorved deres hele Fortgang er fuldkommen bekendt.

§. 348.

Uf det allerede sagte forstaaes fuldkommen, hvad man har at gjøre i andre Tilfælde, da Inertiens Omflytning saa let kan gøres. For Ex. Om de to Stænger CAD og cBf (Taf. XIV. Fig. 6.) bevæge sig enten med eller imod hverandre, deels med en omveltende, deels med en lige Linie fortgaende Bevægelse, hvilken sidste da bliver Bevægelsen af deres Tvingdes Center. Kaldes Hastigheden af denne sidste i begge H og h, de omveltende Bevægelsers Hastigheder ligeledes B og b; nemlig saa til AD, der stöder an, svare H og B; til fBc derimod h og b; da maa først de førnævnte Omveltningens-Punkter L og l, hvis Hastigheder, som vi her have seet, forandres i Slaget, seges, og da bliver Inertierne udi AD og cf benævnes de som før, og forflyttede til de Punkter, i hvilke Slaget skeer, D og B. Inertien bliver $\frac{M.lm}{ID}$ udi AD og $= \frac{I.LM}{BL}$ udi cBf. Paa disse Inertier skeer et lige Sammenstød med Hastigheden udi D, $= H + B$, og udi B $= h + b$, saafremt Slaget antages at skee udi et Øieblik, saa under Slaget den omveltende Bevægelses Hastighed virker fuldkommen efter samme Linie, som den Hastighed, hvormed Tingene gaae fort.

Hastighederne efter Stødet kunne derfor bestemmes efter de forhen §. 294 givne Regler, og af de i D og B givne Hastighed. De for Lyngdens Center M og m findes, som før; hvorved den fortgaaende Bevægelse er bekendt, hvis Forskiel fra den hele Hastighed er Omveltningens Hastigheden i de sammenstødende Punkter D og B.

§. 349.

Hvorledes Naturen i Tingenes Tilbagespring iagttager de glerne af dette mindste Virkning.

Man kunde giøre en Mængde andre Anmerkninger, saavel i Henseende til det allerede sagte, som i Henseende til de almindelige Bestemmelser af flere Tings Sammenstød, men da det allerede sagte i disse Henseende er det vigtigste, saa ville vi igien foretage det vi begyndte af, udførligere nemlig, at udvikle de Tilfælde, som man haver oplest af det Princip, at Naturen i alle sine Handlinger iagttager et mindste. Saaledes haver man i Reflexionen eller de elastiske Tings Tilbagespring efter Stødet ligeledes villet iagttage, at Naturen i denne Handling virkede med største Fordeel, nemlig efter Reglerne for det mindste, for nemlig i den korteste Linie at komme fra Punkt til andet, for Ex. fra H til E (Taf. XIII. Fig. 1.). Dette forudsat, om da Perpendiklen fra H eller $HI = p$, $EF = P$, $FB = x$, $BI = y$, saa bliver $HB + EB = \sqrt{y^2 + p^2} + \sqrt{x^2 + P^2}$, hvis Differential er $= 0$, selgelig bliver

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{x^2 + P^2}}.$$

Om FI, som en bestandig given Linie, kaldes a , bliver $a = x + y$, selgelig $dx + dy = 0$, og $dx = -dy$, hvorved faaes $\frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + P^2}}$, det er; Cofinus af EBF = Cofinus HBI, saa

derfor

derfor disse Vinkler ere lige store, eller Ansteds-Vinklen saa stor som den, hvorunder de elastiske Ting springe tilbage.

§. 350.

Man haver endnu paa adskillige andre Maader og i en Deel andre Tilfælde, skient altid ikke med den Overbeviisning, som man maatte ønske, segt at forklare andre Naturens Virkninger af dette Princip. Oplesningerne have ikke været uden for enkelte Tilfælde. Man haver snart sat det mindste, som Naturen saae paa, i et; snart igien i et andet. Det man segte, var et almindeligt Princip. Et saadant haver man unegtelig for alle de Tilfælde, da Kræfterne staae udi Egevegt med hverandre, det som man haver givet det Navn af Principet af den mindste Virkning (*). Det bestaaer deri. At saa tidt som centrale Kræfter drive alle Delene af et Legeme imod deres Center; saasæmt da at Distancen fra Centret er x , Kraften fx^n , et Element af Inertien I. Da maa, om Egevegt skal have Sted, $\int fx^n + I$ være et mindste.

Dette Principe er en nødvendig Følge af de forhen forklarte mekaniske Grunde, §. 24. I. hvor vi have sagt, at saa tidt som Pressionerne ere lige store, maa deres Modstand være de Rum, igiennem hvilke de i samme Tid bevæges, forkeert Wiis proportionerte. I Egevegten ere Pressionerne, som staae hverandre imod, og vi ville kalde P og p , lige store. Ansees da den ene som Modstand imod de andre,

(*) Dette ellers meget omtvistede Princip er af Mr. Maupertuis. See *Memoires de l'Academ. des Sciences*. 1740. *Loix du Repos des Corps par Mr. Maupertuis*, og *la Cosmologie de Mr. Maupertuis*.

andre, og de uendelig smaa Rum, igiennem hvilke de skulde gaae, om Bevægelsen skede, kaldes dy og dy , da bliver Modstanden af alle Kræfter som P , $= Pdy$. Af alle Kræfter som $p = -pdy$, fordi Direktionen er imodsat. Saa at derfor $Pdy + pdy = 0$. Tilkiendes gives i Almindelighed det elementære Rum ved dx , Kræfterne i Almindelighed ved K , Pressionen ved IK , da bliver $IKdx = 0$. Er $K = x^n$, da bliver $Ix^n dx$ integrabel, og $\int Ix^n dx = \frac{1}{n+1} Ix^{n+1}$ bliver et mindste; saaledes, som vi forhen have sagt, at det skulde være.

§. 351.

Hvorfor og i
Lige vegen
Tyngdens Cen-
ter er altid i
Centret. At den
høieste eller lave-
ste Stilling om
Kræfterne ere
bestandige.

Man seer af Beviset, at dette Princip strekker sig til alle Kræfter, endog om de ere af anden Forhold end Heiderne af Distanzen fra Centret. At den hele Statik deraf kan bevises, kan sees af den ene Anmerkning, som forhen er blevet gjort til §. 59. F. (*). Vi ville derved saa meget mindre opholde os, som de nyttigste Sandheder, hvilke af dette Princip kunde bevises, forhen ere blevne udferte af direkte Grunde. Men et bør her ikke forbigaaes, at man nemlig heraf let udleder et Princip, som man meget haver betient sig af i Mechanik, og ofte med stor Fordeel kan bruges. At nemlig, saa tidt som Tyngden virker som her hos os, og de tunge Tings Dele staae udi Ligevegt med hverandre eller hvile; da maa Tyngdens Center enten ligge, som sædvanligst skeer i den laveste Stilling, eller, hvilket undertiden skeer i den høieste.

Ehi

(*) Men dette sees paa det fuldkomneste i *Memoires de l'Acad. de Berlin*. Année 1748. pag. 149. *Recherches sur les plus petits dans les actions des forces* par Mr. Euler, og An. 1752. pag. 169. *Harmonie entre les Principes generaux de Repos & de Mouvement* par Mr. Euler.

Thi da i Følge det forhen anførte Principe om den mindste Virkning, Summen af samtlige Inertierne multipliceret med Distancen fra Kræfternes Center, (hvilket her er en ret Linie) skal være et mindste, og Summen af Inertierne antages som bestandig, Distancen fra Kræfternes Center alene som foranderlig: Saa følger af sig selv, at naar Summen af Inertierne multipliceret med Distancen skal være et mindste, maa Distancen selv, hvori Tyngdens Center hviler, være den mindste iblant alle de, som det i alle sine adskillige Stillingen (alt for Resten lige) kunde have.

Ydermere, da hvad der i en Henseende er et mindste, kan i en anden være, naar det tages negativ, et større, saa kan i Egevegten Tyngdens Center ei alene have den laveste, men endog den høieste Stilling. Saaledes falder en Kugle bestandig ned efter et hvert indklinet Plan, imidlertid at den hviler saavel i det øverste af Planet udi Vertikalen, som i dets nederste i Horizontalen. En Keile ligeledes, hviler saavel naar den staaer paa sin Spitse, og Tyngdens Center er i sin høieste Stilling, som naar den staaer paa sin Grund-Linie, og Tyngdens Center er paa det laveste. Men Forskiellen imellem disse to adskillige Slags af Egevegt bestaaer altid deri: At i det sidste tage Tingene deres Egevegt igien paa selsamme Maade, som før, naar de ere blevene satte ud af deres Hvile. I den første derimod igientage de ikke deres forrige Tilstand, naar de sætte sig til Hvile. Saaledes; Naar en Keile, som hviler paa sin Grund-Linie, helder lidt over paa Siden, falder den af sig selv tilbage i sin forrige Stilling: Staaer den derimod paa Spitsen, og Egevegten forstyrres, sætter den sig ikke meer i sin forrige Tilstand.

§. 352.

Et ligesaa
almindeligt
Princip for
Bevægelsen
forklares.

Antager man Principet af Egevegten, som en Sag, hvilken Naturen altid iagttager endog uden for Egevegten, hvilket dog endnu ikke synes at være fuldstændig nok blevet beviist. Da skyder deraf et andet almindeligt Princip for hvad det mindste er, som Naturen altid skulde følge i al Bevægelse, og som bestaaer deri. (*) At Naturen i al Bevægelse iagttager den mindste Virkning. Men Virkningen her vurderes af Massen multipliceret med Hastigheden, multipliceret med det igiennemløbne Rum.

Thi da i al Bevægelse er $\frac{p}{m} dt = dv$, §. 4. derfor $Pdx = Ivdv$ og $Px = Ivv$. Nemlig, om $p = fx^n$. Thi da bliver $fx^n dx = \frac{1}{1+n} fx^{n+1} = \frac{1}{1+n} px = Mvv$, eller simpelthen, naar man alene seer paa Forholden $Px = Mvv$. Saa følger, at Størrelsen af hele Virkningen, naar samme dømmes af det igiennemløbne Rum, bliver saa stor som Summen af de levende Kræfter. Antages det da som almindelig sandt, at Px for et hvert Øieblik dt bliver et mindste, maa og den hele Virkning i alle Øiebliske af Tiden samlede, blive et mindste. Følgelig maa i al Bevægelse $\int Pxdx$, eller $\int Mvvdv$, blive et mindste. Men $vdv = ds$. §. Følgelig bliver og $\int Ivdv$ et mindste, hvilket er det selvsamme, som det foromtalte Princip.

Wi

(*) See Memoires de l'Acad. de Berlin. Tom. I. p. 267. sq. eller og Cosmologie de Mr. Maupertuis, saavel som Memoires de la Societé Royale des Sciences. Année 1744.

Vi ville her ikke opholde os ved at vise, hvorledes dette Princip kan anvendes i at opløse paa en indirekt Maade, hvad vi forhen have beviist om Central-Kræfterne, for ikke at være unødigt vidtløftig. At det haver Sted i de udfastede Tings frie Bevægelse, og at man ved det kan finde de selsamme krumme Linier, som før §. 158. o. f. er saa vel blevet udført, saa at derpaa er ikke meer Tvivl (*). Af dette Princip følge ligeledes Reglerne for Tingenes Sammenstød (**). Disse enkelte Exempler give unegtelig stor Formodning for, at dette Principe endnu er almindeligere. Men de almindeligste Grunde, naar de ei ere i sig selv klare nok, behøve de skarpeste Beviis. Imidlertid er det i høi Grad rimeligt, at Inertien i enhver enkelt elementær Tid, ved at staae imod, yttre den mindste Modstand, saa at derfor Virkningen, som svarer til Inertiens Modstand, bliver et mindste; og da i ethvert udeleligt Øieblik, udi hvilket at Kræfterne bevæges, man med en Slags Føie kan sige, at Bevægelsen er en Art af Ligevegt imellem den bevægende Kraft og Inertien, fordi de altid virke imod hverandre med imodsatte Direktioner, saa er det ikke urimeligt, at giere Brug af et Princip, der hører til Ligevekten i den frie Bevægelse; naar man nemlig deri ikke seer paa andet, end paa Forandringen af denne sidste i de elementære Tider.

Tyven

(*) See Leonb. Euleri Method. Inveniendi Curvas. Additam. secund. de Motu Projector. in medio non resistente. See og Memoires de l'Acad. de Berlin. Année 1742. pag. 169. sq.

(**) Man kan her efterslaae la Cosmologie de Mr. Maupertuis og Memoires de l'Acad. de Berlin. Année 1746.

Tyvende Forelæsning.

Om
de elastiske Tings smaa Bevægelser,
eller om den zittrende Bevægelse.

§. 339.

Wi have i det foregaaende afhandlet de elastiske Legemers store Bevægelser, de nemlig, som de i Folge denne deres Egenskab, fuldkommen igien at antage den i Sammenstødet forandrede Figur efter Stødet, bestandig maa iagttage. Det er endnu høist nyttig, kortelig at betragte deres mindste Forandringer, da man meget behøver denne Kundskab i Physik, saa at uden den en af denne Videnskabs vigtigste Stykker ei kan forstaaes.

§. 340.

I elastiske
Streng, som
spændes af me-
get smaa Kræf-
ter, mærkes fast-
ingen elastisk
Bestræbelse.

Det som her i sær behøves at vides er, af hvad Beskaf-
fenhed de elastiske Streng eller Snorer ere, og hvorledes de
forrette deres Bevægelser. I hvilken Henseende allerførst
maa agtes, at saafremt (Taf. XIV. Fig. 7.) en elastisk Streng
bC enten ligger ganske løs, eller spændes ikke uden med en
overmaade liden Kraft P, da lærer Erfaring, at den i in-
gen af begge disse Tilfælde yttre nogen Virkning. I den sidste

er

er det i sær mærkeligt, at den ikke stræber at igientage sin forrige Figur, da dog dette er just det, hvori Elasticiteten bestaaer, og det saaledes; at saa tidt som Tingene ere fuldkommen elastiske, søge de just med de selsomme Kræfter at tage deres Figur igien, som de vare, hoormed de bleve sammentrykte eller spendte.

§. 341.

Ligesom man i den Tilfælde, da Kræfterne, som i P Af Erfaring bevises det samme, og p spende de elastiske Strenge, ere overmaade smaa, ei saa tidt som de merker til nogen Virkning af deres Elasticitet, saa taber den store Kræfter, sig og plat og aldeles, om disse Kræfter blive alt for store; saa derimod ytre de det ikke er, uden saa tidt som Kræfterne, der spende dette en stærk elastisk Vestræbelse, Slags Strenge eller Snorer, ere af maadelig Størrelse, naar de Kræfter, de kunne virke ved Elasticitet, eller ved at igientage deres Tilstand, af hvilke de spendes, ere maadelige. Hvoraf man fuldkommen seer, at Elasticiteten be- roer alene paa Maaden, Delene i Tingene staae imod hverandre paa. Men da dette, for saa vidt Aarsagerne angaaer, henholder til Natur-Lærdommen, ville vi ei dermed befatte os i Mechanik, hvor vi alene have at see paa Bevægelsens Love.

§. 342.

Er da *bc* en saadan Streng, spendt af tilbørlige Kræfter ^{Virkningen paa} udi P og p, hvilken vi her, for at betragte Sagen paa sit lette- ^{elastiske Stren-} ste, ville antage lige store; da om i *f* en Kraft beier Stren- ^{ge af maadelige,} gen, saa den i Steden for at ligge udi *bdc*, nu ligger som ^{men tillige smaa} ^{Kræfter forkla-} res.

bfc, og imellem Tyngderne, der spænde Strengen udi *P*, *p*, og den Kraft i *f* er Ligevegt; da er, om med Halv-Diametern *bd* slaas den Cirkel-Bue *dl*, Forskiellen imellem *bd* og *bf*, proportionert de Kræfter, der spænde Snoren udi *P*, saa lange som de Kræfter, der bøje Strengen, ere baade maadelige og smaa tillige. All Erfaring stemmer deri overens, følgelig kan man, saa lange den Kraft, der i *f* bøier Strengen, ei er uden liden, ansee *db* som lige stor med *fb*, og som proportionert Tyngden udi *P*. Thi vi handle her ikke uden om overmaade smaae Udløb over *cb* fra det Punkt *d* til *f*, thi andre bør ei have Sted i den zittrende Bevægelse.

§. 343.

Da saaledes Fig. 8, *ac* kan forestille den hele Kraft, som spænder Strengen, saafremt at den oploses i de to Side-Kræfter *ad* og *ah*, da sees; at den Strengen bøiende Tyngde udi *a* maa holde imod med en Kraft som *ad*, siden det er med denne Deel af sig selv, at *p* søger at drive det Punkt *a* ned igien imod det Punkt *d*, kaldes *ad*, *a*; *aC*, *b*; Tyngden i *P* eller *p*, *P*, da er $b : a = P : ad = \frac{aP}{b}$, hvilket er Værdien af den Kraft, hvormed Tyngden i *p* søger at drive det Punkt *a* ned imod *d*, og da den anden Tyngde udi *P* med en ligesaadan Kraft driver det Punkt *a* imod *d*, saa bliver den hele Kraft i *a*, som trykker imod det Punkt *a* $= \frac{2aP}{b}$, hvoraf slutes, at siden $b : 2a = P : \frac{2aP}{b}$.

Saa

Saa forholder sig den Kraft, der søger at drive ned imod d udi a til den Kraft, der spender Strengen udi p , som $2ad : Cd$.

§. 344.

Følgelig; om alt bliver ens, alene at a forandres, da De ere Distancerne proportionerte, seer man, at Kraften i a bliver altid $= a$, thi Forandringerne i b blive altid overmaade smaa imod Forandringerne i a , saa længe som Udløbene fra d ere meget smaa, hvoraf følger.

Alt alt for Resten lige ere Udløbene fra d efter ad under større og mindre Bojninger i a , det er ad i Forhold af den i a boiende Kraft.

§. 345.

Deraf følger, at dersom den Kraft, som holder imod udi a , med et slipper, saa den elastiske Streng frit og uhindret kan sætte sig udi sin forrige Tilstand, og fra at ligge udi BaC , naar den igien faaer trokken sig sammen, kommer til at ligge som BaC , da virker Elasticiteten udi a , imidlertid at dette seer i alle Punkter igiennem ad i Forhold af Distancen fra d . §. 344. Følgelig er det det samme, som om en uophorlig hastiggjørende Kraft drev det Punkt a , og den hele Streng fra a til d , indtil denne Kraft i d var $= 0$. Strengen BaC maa derfor ved sin Bevægelse fra a til d have vundet en Hastighed til at gaae lige saa langt paa den anden Side af BaC fra d til g , fordi de Bevægelserne sinkende Kræfter ere der de selsamme, som de der foraarstagede dem paa den anden Side. I g er Beskaffenheden

den igien den samme, som den før var udi a , Fig. 8, eller f , Fig. 7. Saa at Strengen bdc Fig. 7. maa derfor, dreven af sin Elasticitet, blive ved at svinge en Mængde gange frem og tilbage paa begge Sider af bdc , og disse Sving, (som hvad heller de ere større eller mindre i Udlob fra d , maa desuagtet skee i samme Tid,) kunde aldrig høre op, om Strengen i sin Bevægelse ingen Modstand fandt uden omkring sig.

§. 346.

Denne Bevægelse er derfor af samme Art som Pendulernes.

Deraf sees, at saa tidt som en saadan Streng engang er bleven sat ud af sin Hvile udi bdc , Fig. 7. kan den siden ansees som et Pendul, hvis Længde er som dc , og hvilket bevæger sig frem og tilbage i en Mængde Sving fra f til g , og fra g til f . Følgelig er det og altid mueligt, baade at kunde bestemme et Pendul af den Længde, saa det svinger i samme Tid, som en saadan Streng, og at udregne det Antal af Sving, hvilken en saadan Streng bør giøre i en vis given Tid.

§. 347.

Den herover paa Strengens Tykkelse og Inertie, paa dens Længde og paa Udlobenes Størrelse.

Da den hele Pression i a eller f var, efter hvad vi allerede have sagt §. 343 $= \frac{2aP}{b}$; kaldes da den Inertie, som i Snoren af samme skal bevæges, M , bliver den hastiggjørende Kraft $= \frac{2aP}{bM}$, hvoraf sees: At hvad heller den Kraft, som spender Strengen, eller Strengens Tykkelse, eller dens Længde eller Udlobene fra d forandres; forandres altid tillige den hastiggjørende og imod d drivende Kraft, saa man i enhver

nye Tilfælde maa ansee disse Penduler, som om de bleve drejede af adskillige Kræfter.

§. 348.

Følgelig kan man forklare, hvad vi her have for, af det vi allerede have iagttaget i den ottende Forelæsnung §. 149. 150. at nemlig Tiderne, hvori lige lange Penduler svinge, som drives af adskillige hastiggjørende Kræfter, forholde sig som Quadraterne af disse Kræfter forkeert tagne. Følgelig, om Tiden af Svinget kaldes T , bliver $T = \sqrt{\frac{bM}{2aP}}$, eller $\frac{bM}{2aP} = T^2$. Men Quadraterne af Tiderne ere og, naar den hastiggjørende Kraft er den samme, som Længderne af Pendulerne §. 134. Forel. Følgelig er

$$T^2 = \frac{bM}{2aP} \cdot b = \frac{Mb^2}{2aP}.$$

§. 349.

Deraf følger, at siden $2a$ intet gjør til Forandring i Hverledes Tiderne af Svingene, fordi Bevægelsen (naar den hastiggjørende Kraft er den samme) skeer over større og mindre Udslodderne af disse Bevægelser forholde sig. fra d altid i samme Tid; saa bliver bestandig, (i hvor meget end at Strengene kunne være adskillige udi Tykkelse eller i Længde, og med hvad ulige Kræfter de end kunne være spændte,) dog $T^2 = \frac{Mb^2}{P}$. Kaldes Diametern af Strengens Tykkelse D , da

er $M = D^2$, følgelig $T = \frac{D^2 b^2}{P}$, og $T = \sqrt{\frac{Db}{P}}$, hvoraf sees.

At

Alt Liden af Svingene forholde sig i sammensat Forhold af Strengenes Tykkelse og Længder ligefrem tagne, saabelfom af Quadrat-Rodderne af de Kræfter, der spende Strengene, forkeert-Viis tagne.

§. 350.

Adskillige For-
ved Slutnin-
ger.

Man kan, om man vil, deraf gjøre følgende Slutninger.

- 1) Ere Strengene lige tykke og lige stærk spendte, da forholde sig Liden af Svingene som Længderne.
- 2) Ere Strengene lige lange og lige tykke, forholde sig Liden, hvori de svinge, som Quadrat-Rodderne af de Kræfter, der spende dem, forkeert tagne.
- 3) Ere Strengene lige lange og lige stærk spendte, forholde sig Liden af Svingene som deres Diametre.

§. 351.

Derved maa dog agtes, at enhver saaledes svingende Streng, i det den svinger frem og tilbage, ei alene kan gjøre denne Bevægelse saaledes, at den ligger alene heel og hulden enten paa den ene eller paa den anden Side af *bdc*, som i Fig. 7, men i det den svinger heel og er i Bevægelse overalt, kan den tillige svingeølge-Viis, som i Fig. 12. Man kan bevise dette af Udregningerne, man kan bevise det af Erfaring. Det er af denne de svingende Strenges Egenfæb, at man bør forklare, hvorfor man i at stryge en Tone an paa en Streng, hører i den samme tillige flere andre; ligesom og at hvad vi her have sagt, er det sande Fundament til den hele

Theorie

Theorie af Tonerne og den hele Musik. Men da det her ikke er det egentlige Sted at vise, hvorledes samtlig disse Sandheder i de før sagte Henseender videre bør anvendes, ville vi indskrænke os selv ved det allerede sagte.

§. 352.

Dersom man i Steden for de foromtalte elastiske Strenge betragter tynde elastiske Plader, som fæstede ved den ene Ende, sættes i Bevægelse udi den anden derved, at de først bøies og siden overlades til sig selv at svinge; da blive ligeledes, som før, saa lange Bøiningerne ere smaa, samtlig Svingene, hoad heller de ere større eller mindre tilendebragte i samme Tid; fordi man kan ansee de adskillige hastiggjørende Kræfter i de adskillige Dele af deslige Plader, paa samme Fod, som i de sammensatte Penduler, hvor Delene af Materien ere hverandre til Hinder, saa nogle bevæges med større, og andre med mindre Modstand, uagtet at samtlig Svingene i det Hele ikke destomindre skee i samme Tid.

Tiortende Tillæg.

Om de elastiske Strenges deres smaa Bevægelser.

§. 353.

Hvorledes den
sittende Bevæ-
gelse kan bestem-
mes i en immat-
teriel Streng,
som svinger med
en eneste Iner-
tie.

Vi sætte her forud alt hvad i Forelæsningerne er bleven sagt. (Taf. XIV. Fig. 8.) Forestiller man sig da en elastisk Streng BC, som umateriel, og bæret fra BaC, til at ligge som BaC, og i samme fremdeles en eneste Inertie udi a , kaldes de Tyngder, som spænde Strengen P og p , da virker den Kraft, hvormed Tyngden spændes eller trekkes af P i den Direktion Bg. Forestilles denne Kraft ved Ba, og opløses i Side-Krafterne ea og ad , hvoraf ad her er alene nyttig, nemlig til at drive Inertien udi a ned imod det Punkt d , saa bliver den udi a imod d drivende Kraft, som haver sin Oprindelse fra $P = \frac{ad \cdot P}{aB}$. Kaldes da, som før, ad , a . aB , b . Inertiens Mængde i a , M. Da bliver den udi a hastiggierende Kraft, som kommer fra P, $= \frac{aP}{bM}$.

Ligeledes sees, at om $aC = c$, da bliver den hastiggierende Kraft udi a imod d , som kommer fra p , $= \frac{ap}{cM}$.

Følgelig bliver den hele hastiggierende Kraft udi a imod d ,
$$= \frac{aP}{bM} + \frac{ap}{cM}.$$

§. 354.

§. 354.

Da nu Kræfterne imod d ere som Distancerne, §. 344. 345. (hvilket og kan umiddelbar sees af §. 353, fordi naar P, p, b, c , og M ere bestandige, bliver $d = a$) saa fæe Svingene udi samme Tid, og Længden af det simple Pendul, der med dem svinger udi samme Tid, findes efter §. 92. Thi sættes den naturlige Tyngde, der driver efter Cykloidens vertikale Tangent, $= 1$, da er $\frac{aP}{bM} + \frac{ap}{cM}$: $1 = a$ til den halve Cykloides hele Længde, eller hvilket er det samme, til Længden af det simple Pendul, som svinger udi samme Tid med Strengen, saa at, naar Længden af dette Pendul kaldes L , er

$$L = \frac{bcM}{Pc + pb}.$$

§. 355.

Er $P = p$; hvilket her altid bør sættes, i Henseende til den indbyrdes Egevegt, som man holder imellem P og p ; sættes ligeledes $c = b$, da faaes $L = \frac{bM}{2P}$. Vil man deraf videre søge Antallet af Svingene Strengen slaaer, imidlertid at et simpelt Pendul af en given Længde D engang svinger, da behøves alene, at man erindrer, hvad vi have sagt §. 138. §. 3; at Længderne af Pendulerne forholde sig forkeert Wiis som Quadraterne af de Antal Sving, hvilke de giere i samme Tid. Selgelig bliver, om det søgte Antal af Sving kaldes f ,

$$\frac{bM}{2P} : D = 1 : x^2 \text{ og } x = \sqrt{\frac{2P \cdot D}{bM}}.$$

Eller, om man vil, i Steden for b sætte $BC = 2b$, bliver

$$x = 2\sqrt{\frac{PD}{M \cdot BC}}.$$

Al ff 2

§. 356.

§. 356.

Ligeledes, naar
en saadan
Streng svinger
med to Inertier.

Derfor man (Taf. XIV. Fig. 9.) ligeledes anseer Strengen BdC som umateriel og elastisk, men besværet med to Inertier udi a og b , da er Maaden, hvorpaa Mængden af Svingene, som en saadan Streng skal giøre i en vis given Tid, kan findes, endnu fuldkommen den samme, som før. Nemlig sættes $P = p$, som §. 355. Da, om BdC bæres til at ligge som $BabC$, forestilles den hele Kraft af P , som sender Strengen ved Ba . Naar samme opløses i de Side-Kræfter ae og ad , da er den Kraft ad , som i a kommer fra P , og driver samme Punkt imod d , altid i Forhold med Distancen fra d . Kaldes da Bd , b ; ad , a ; og Mængden af Inertien udi a , M , alt nemlig som før. Da bliver den imod d drivende hastiggierende Kraft udi $a = \frac{aP}{bM}$, som før; den nemlig, som forårsages af P .

Men den Tyngde udi p forårsager ligeledes en hastiggierende Kraft udi a . Thi forestilles den ved ah , og opløses i de Side-Kræfter fa og fh , da er fa den fra p kommende Pression udi a , som driver fra d , hvilken er $= hk - ad$. Kaldes da hk , A ; $dk = ha$, c ; da bliver Pressionen af p udi $a = \frac{(A-a)P}{c}$, og saaledes den hele hastiggierende Kraft udi a , hvormed dette Punkt drives ned imod Kræfternes Center $d = \frac{aP}{bM} - \frac{(A-a)P}{cM}$.

Ligeledes findes den hastiggierende Kraft, som driver Inertien udi b imod det Punkt k , thi da Pressionen fra P paa b kan forestilles ved bt , saa er den, som før, $= \frac{(A-a)P}{c}$. Derimod bliver Pressionen fra p af udi b som bk (naar den hele Kraft, der sender Strik-

ken,

ten, forestilles ved hc , og opløses i de Side-Kræfter hl og hk). Saaledes da $bC = kC$, d ; da er, som før, i de ligedanne Tilfælde $d : A = P : \frac{AP}{a}$, hvilket er Pressionen fra p af udi h . Følgelig bliver den hele hastiggjørende Kraft udi h ned imod Kræfternes Center $k = \frac{(A-a)P}{cM'} + \frac{AP}{dM'}$ (M' er Inertiens Mængde udi h).

§. 357.

Da nu disse hastiggjørende Kræfter udi a og h hver for sig ere som den Afstand eller Distance, hvilken de have fra deres Kræfters Center d og k , saa bliver

$$\frac{aP}{bM} - \frac{(A-a)P}{cM} : a = \frac{(A-a)P}{cM'} + \frac{AP}{dM'} : A.$$

Følgelig, om $M = M'$; og $b = c = d$; det er, om Inertierne ere lige langt fra hverandre og lige store, da bliver og $a = A$, fordi man faaer af den forrige Proportion i denne Tilfælde $\frac{2AaP - A^2P}{bM} = \frac{2AaP - a^2P}{bM}$, eller $A^2 = a^2$: Følgelig $\pm a = A$, hvorfra sees; at den hele hastiggjørende Kraft udi a eller h bliver, (fordi $A - a = 0$, og $b = \frac{1}{3}BC) = \frac{aP}{\frac{1}{3}BC \cdot M}$. Saa begge Inertier komme til d og k udi samme Tid.

§. 358.

Deraf findes, ligesom før, for dette Tilfælde Længden af det simple Pendul, der gior sine Swing i samme Tid som Strengen, thi

$$K \ell \ell \ell 3$$

aP

$\frac{aP}{\frac{1}{3}BC \cdot M} : 1 = a : \frac{M \cdot BC}{3P}$, hvilket er Længden af den halve Cykloide eller af det søgte simple Pendul. I hvilken Værdie, om i Steden for M sættes $\frac{1}{2}M$, saa den hele Inertie, der belægger Strengen $= M$, bliver det søgte simple Penduls Længde $= \frac{M \cdot BC}{6P}$.

Deraf igien findes let, hvor mange Sving frem og tilbage paa begge Sider af BC en saadan Streng er i Stand til at giøre i en vis given Tid, i den nemlig, da et Pendul af en given Længde D engang svinger, fordi $\frac{M \cdot BC}{6P} : D = 1 : xx$, saa selgelig $x = \sqrt{(6PD) : M \cdot BC}$.

§. 359.

Saa og, naar
den svinger med
tre Inertier.

Imidlertid da man seer, at $A = \pm a$, og kan selgelig have to lige store Værdier, en bekræftende og en negtende, saa kan ei alene Strengen svinge heel og hulden, men endog Velge-Viis, som i Fig. 10, saa den omkring n kan faae to lige Sving i a og b , en paa den bekræftende Side, en anden paa den negtende. Det samme maa stee i den almindelige feransferte Tilfælde af Ligheden §. 357, siden man i den ligeledes faaer en bekræftende og en negtende Værdie af A , begge i Almindelighed ulige, hvorforsø og i alle deslige Tilfælde hver Inertie svinger for sig i ulige Tider, fordi de drivende Kræfter ere i lige Distancer fra Kræfternes Center da adskillige, selgelig og Tiderne af Svingene i hver Inertie for sig.

§. 360.

Betragter man fremdeles videre (Taf. XIV. Fig. 11.) tre Inertier, som vi ville her sætte lige store, at ligge over BC i d , k , n , og tre Inertier. Saa og, naar den svinger med at de tillige med Strengen BC forskyttes til at ligge som $BahOC$, da om den Kraft, hvormed Traaden spændes af Tyngden i P , som før forestilles ved Ba ; den fra P imod d ved Be , o. s. v. og alle disse Kræfter opløses, i Følge Kræfternes Parallelogram, som Figuren videre viser; fremdeles om man kalder samtlige Distancerne Bd , a , dk , b , kn , c , nC , d , og de til dem svarende Udløb fra BC udi d , k , n , nemlig ad , A ; kb , B ; no , c . Da findes, som før, om enhver af Inertierne i a , b eller $q = M$.

1) Den hastiggjørende Kraft udi a , som kommer fra $P = \frac{A}{Ma} P$.

Den samme, for saa vidt den kommer fra $p = -\frac{(B-A)}{b} \frac{P}{M}$.

Følgelig den hele hastiggjørende Kraft udi $a = \left(\frac{A}{a} - \frac{(B-A)}{b} \right) \frac{P}{M}$

2) Samme Kraft udi b , forarsaget af $P = \left(\frac{B-A}{b} \right) \frac{P}{M}$.

Den, som i b tilveiebringes af $p = \frac{B-C}{c} \frac{P}{M}$.

Følgelig bliver den hele hastiggjørende Kraft udi b

$$= \left(\frac{B-A}{b} + \frac{B-C}{c} \right) \frac{P}{M}$$

3) Ligeledes findes den hele hastiggjørende Kraft udi c

$$= \left(\frac{C}{d} - \frac{(B-C)}{c} \right) \frac{P}{M}$$

hvilke Kræfter antages at være deres Distancer fra d , k , p proportionerte, hvoraf saaes

$$1) \left(\frac{A}{a} - \frac{(B-A)}{b} \right) \frac{P}{M} : A = \left(\frac{B-A}{b} + \frac{B-C}{c} \right) \frac{P}{M} : B.$$

$$2) \left(\frac{A}{a} - \frac{(B-A)}{b} \right) \frac{P}{M} : A = \left(\frac{C}{d} - \frac{(B-C)}{c} \right) \frac{P}{M} : C.$$

§. 361.

Sættes i disse Proportioner og i de af dem kommende Ligheder $a = b = c$, da faaes 1) $BB = AA + AC$. 2) $A = C$, folgelig og $BB = 2AA$, og altsaa $B = A\sqrt{2}$.

Undersøges deraf Kræfterne i a og b , hvad nemlig deres Størrelser bliver i lige Distancer fra deres der til dem svarende Centre, da bliver

$$1) \text{ den Kraft i } a = \left(\frac{A}{a} + \frac{A - A\sqrt{2}}{a} \right) \frac{P}{M} = \left(\frac{2A - A\sqrt{2}}{a} \right) \frac{P}{M}.$$

$$2) \text{ den Kraft i } b \text{ imod } k = \left(\frac{2A\sqrt{2} - 2A}{a} \right) \frac{P}{M}. \text{ Men da den}$$

haver denne Størrelse paa den Distance fra Kræfternes Center $A\sqrt{2}$, saa bliver dens Størrelse fra Kræfternes Center i den Afstand

$$A = \frac{2A - A\sqrt{2}}{a}, \text{ hvoraf sees; at i lige Distancer fra Kræfternes}$$

Centre d, k, n , ere de imod dem drivende Kræfter lige store, folgelig forrette disse tre Inertier udi samme Tid deres Sving med hinanden, og komme udi samme Tid til BC.

§. 362.

Man finder derfor i dette Tilfælde, ligesom før, Længden af det simple Pendul, der svinger udi samme Tid med den hele Streng

$$\text{og dens Inertier} = \frac{aM}{(2 - \sqrt{2})P}.$$

Deraf

Deraf igien findes den Mængde Sving, som en saadan Streng kan giøre i den Tid, da et Pendul af den Længde D svinger engang,

$$= \sqrt{\frac{P.D.(2-\sqrt{2})}{\sqrt{aM}}}, \text{ og om den hele Inertie i } a, h, o = M,$$

saa den i $a = \frac{1}{3}M$, og $a = \frac{1}{4}BC$, bliver Svingenes Antal i samme

$$\text{me Tid} = 2\sqrt{\frac{DP.(6-3\sqrt{2})}{M.BC}}.$$

§. 363.

Man finder ligeledes, om fire, fem og flere lige store Inertier antages at ligge over en saadan Snor eller Streng lige langt fra hverandre, at de dem imod BC drivende hastiggierende Kræfter ere i lige store Distancer fra de til dem svarende Punkter i BC, (der kunne ansees som lige saa mange Kræfternes Centrer,) altid lige store. Hvoraf man seer 1) at paa samme Maade, som før, saavel det simple Penduls Længde, som Antallet af Svingene, i en vis given Tid kunde findes for saa mange Inertier, som man selv vil. 2) At da man i en heel musikalsk elastisk Snor kan ansee samtlig Inertierne som at være lige store, og at staae lige langt fra hverandre, saa kunne dens Sving i en given Tid ligeledes paa selv samme Maade beregnes.

§. 364.

Nemlig, forestiller man sig, Fig. 13. at AGF er en saadan Streng, som fra at hvile udi AEF, er beiet til at ligge i den frumme Linie

Denne Bevægelse bestemmes i en heel musikalsk Streng.

21 11

AGF,

AGF, da om man anseer den, som belagt overalt med sinaa Inertier, hvis Distance er $BK=KD=dx$, $AB=x$, $Ba=y$, da er $cb=dy$, $=fd$, $fe=-ddy$, og $de=dy+ddy$, dersom videre $AF=2l$, Tyngden af den hele Snor $=2p$, og man søger den hastiggørende Kraft udi c .

Da bliver, som før, den Kraft udi c , som haver sin Oprindelse fra A , og som driver imod $K = \frac{cb}{ac}P = \frac{dy}{dx}P$; den derimod, som i c ligeledes kommer fra en ligesaadan Tyngde udi $F = -\frac{ed}{cf}P = -\frac{(dy+ddy)}{dx}P$, saa den hele Pression udi $c = -\frac{ddy}{dx}P$, hvilket maa divideres med Inertiens Mængde udi c , at den hastiggørende Kraft kan faaes.

Da nu $2l:2p=dx:\frac{p}{l}dx$, saa bliver den hastiggørende Kraft udi c , der driver imod $C = -\frac{lddy}{dx^2} \cdot \frac{P}{p}$, som er proportionert y , og følgelig bliver $-\frac{lddy}{dx^2} \cdot \frac{P}{p} = \frac{y}{n}$, n er en bestandig Størrelse, som efter det forhen sagte tilkiendegiver Længden af det simple Pendul, der springer i samme Tid med den hele Snor, og derfor bør bestemmes.

§. 365.

Hvad Krumningen i Stregene bliver før en Linie.

Til den Ende kan agtes, at siden $\frac{y}{n} = -\frac{lddy}{dx^2} \cdot \frac{P}{p}$, saa bliver
 og $-ddy = \frac{p}{P} \cdot \frac{y}{l} dx^2$. Ansees dx som bestandig, og begge

Leddene

Om de elastiske Strenges sinaa Bevagelser. 635

Beddene gieres integrable ved at multiplicere med dy , saa man faaer
 $-dyddy = \frac{pdx^2}{Pln} ydy$, og $-dy^2 = yy \cdot \frac{pdx^2}{Pln} + B$. For at
 bestemme den bestandige Sterrelse B , kan agtes, at Tangenten udi
 Midten G af den krumme Linie bliver horizontal, og derfor udi G ,
 $dy = 0$. Sættes da til dette Punkt $y = EG = a$, bliver

$$B = \frac{-paa}{Pln} dx^2, \text{ og derfor}$$

$$dy^2 = \frac{paa}{Pln} dx^2 - \frac{pyy}{Pln} dx^2. \text{ Følgelig og}$$

$$dx = \sqrt{\frac{p}{p}} \cdot \ln. \frac{\frac{1}{a} dy}{\sqrt{1 - \frac{yy}{aa}}}, \text{ hvilket er, som man strax}$$

seer, et Integral til Cirklen. Hvoraf igien finder, at den
 søgte krumme Linie er den saa kaldte cycloidalske Selskabs-
 Linie, eller Socia Cycloidis, hvilket endnu lettere forstaaes
 paa denne Maade.

$$\text{Sættes } \sqrt{\frac{p}{p}} \ln = \beta, \text{ da bliver } dx = \beta \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}.$$

Sættes igien $AE = \delta$, og $AB = \delta - v$, saa at de
 foranderlige henføres til GE , og den ubestemte $al = BE$
 $= v$. Videre, om aB sættes $= GE - Gl = a - t$,
 om den ubestemte $Gl = t$. Saa forandres derved den givne

$$\text{Lighed } dx = \beta \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}, \text{ til denne anden } dv = \frac{\beta dt}{\sqrt{2ta-t^2}},$$

og $av = \beta$. B. Sin. t . (ved B. Sin. t forstaaes Bue,
 hvis Sinus er t) Følgelig, om med Halv Diameter EG ,

Quart-Cirklen GnR trekkes, bliver $v : B. \sin. t = \beta : a$, eller al til Gn i en bestandig Forhold, hvilket just er det Væsentlige i Sælskabs = Linien af en Cykloide, som man let seer, bliver i de Tilfælde af smaa Sving paa begge Sider af Aksen, meget langagtig.

Bedligeholdet man den første Lighed, da bliver, naar den bestandige Størrelse ei udelades; $x = \sqrt{\frac{Pln}{p}} \cdot (B. \sin. \frac{y}{a}) + B.$

Da B bestemmes deraf, at naar $x = 0$, bliver $\frac{y}{a} = 0$.

Men de Buer, som svare til Sinus 0, ere; om ved N forstaes et heelt Tal, og ved C den halve Peripherie; alle de, som kunde forklares ved NC , naar i Steden for N sættes 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. og alle andre hele Tal. Det fuldstændige Integral bliver derfor $x = \sqrt{\frac{Pln}{p}} \cdot (B. \sin. \frac{y}{a} + NC).$

§. 366.

For nu fremdeles at bestemme Længden af det simple Pendul, n , hvilket nemlig svinger udi samme Tid med den hele Streng, maa videre agtes; at naar $x = 2l = AF$, (Taf. XIV. Fig. 13.) Da bliver $y = 0$, og derfor

$$2l = \sqrt{\frac{Pln}{p}} NC, \text{ og } n = \frac{4lp}{PNNCC}.$$

§. 367.

§. 367.

Deraf bestemmes nu let det Antal Sving, som Strengen AF kan giøre, imidlertid et given Pendul af den Længde D svinger engang. Thi $\frac{4/p}{PNNCC} : D = 1 : xx$ (om ved x forstaaes det søgte Antal Sving) saa man faaer

$x = \frac{NC}{2} \sqrt{\frac{DP}{lp}}$. Sættes i denne Værdie af x , i Steden for $2l$, AF og $2p = L$, da bliver det søgte Antal af

Sving $= \frac{NC\sqrt{PD}}{\sqrt{L.AF}}$, og om $N = 1$, (hvilket haver Sted,

naar den hele Streng AF svinger omkring A og F) bliver

Svingenes Antal $= \frac{C\sqrt{PD}}{\sqrt{L.AF}}$. Men $\frac{C}{1}$ er den Forhold af Per-

ipherien til Diametern. Sættes den da at være $22 : 7$. og ved D forstaaes Længden af et Pendul til Sekunder, som derfor holder i tolvte Dele af Linier $5286'''$. §. 132. §.

Saa bliver det søgte Antal af Sving $= \frac{22\sqrt{5286''' \cdot P}}{7\sqrt{L.AF}}$.

§. 368.

Da $y=0$, saa tidt som $x=0$, eller $x=2l$, og §. 365

$x = \sqrt{\frac{P/n}{p}} NC$, naar ved x forstaaes den hele Længde;

at derfor i Almindelighed alle de Tilfælde kunde blive til, som indeholdes udi NC, maa den hele Streng AF ei alene kunde svinge som AGF, Fig. 13. men desuden Belgeviis, som

§1113

ABC

638 Tiørtende Tilfæg. Om de elastifke Strenges &c.

ABCDEF, Fig. 12. Thi da bliver $y = 0$ udi A, C, E og F. Hvoraf fees, at den kan, i at fvinge, knytte fig paa utallige Steder omkring fin Arel. Men hver Belge er altid en af de førømtalte cykloidifke Selskabs-Linier, faafremt at alle Punkterne i enhver Belge kommer paa en og den farnne Tid ned til Arelne AC, CE, EF, o. f. v.

§. 369.

Vi ville her ikke opholde os ved at vife, i hvad Sammenhang dette ftaar med Tønerne, da deres Theorie henherer til Phyfik. Vi ville alene til Slutning erindre, at da Svingenes Antal er

$$\frac{22}{7} \cdot \sqrt{\frac{5286 \cdot P}{L \cdot AF}},$$

faa kan alt det deraf udledes, fom vi førhen have fagt §. 341 og følgende i Forelæsningen.

T a v l e

over Materiernes og Verkets Indhold.

Første Forelæsning.

Indeholder Mechanikens almindelige Grunde.

§. 2. 3. hvorom i Mechanik handles. §. 4. 5. det Materiells Vægfæstighed. §. 6. hvad Hastighed, Tid og Direction er. §. 7 — 11. hvori Inertien bestaaer og dens Egenskaber. §. 12 — 16. forklares Vægfæstigheden af den enesdanne Bevægelse, og §. 16. Kræfterne, saavel som Kræfternes Forskiel De ere enten Pressioner eller levende Kræfter. Den hastiggjørende Kraft er Pressionen divideret ved Massen. §. 17 — 26. vijses Hoved-Reglerne for Pressionerne. §. 27. 28. Vægfæstigheden af Bevægelsens Størrelse. §. 29 — 32. de imodsatte Pressioners Virkning.

Det første Tillæg

viser Maaden at bestemme de hastiggjørende Kræfters Forhold under sig.

§. 1. 2. saavel i Henseende til Hastigheden, som Nummer i enesdanne Bevægelse, saavel i Henseende til Kræfterne selv, som i Henseende til den Modstand, de forefinde.

Anden Forelæsning

handler om Tyngden, i sær om Tyngden her hos os, og de fra den nedstammende Hoved Love i Naturen.

§. 33. hvad Tyngden er og Tingenes Vægt. §. 35. 36. at den virker som en Tingene indvendig Kraft paa alle Materiens mindste Dele ligedan. §. 37 — 39. det frie Fald stæer altid imod Centret. Hvad horizontale og vertikale Linier ere. §. 40. De tunge Ting falde altid i Vertikalen ned imod Jordens Center. §. 41. 42. vijses Maaden at bestemme den spulige Vand-Linies Afvigning

vigning fra den sande. §. 43. 44. Tynghens Beskaffenhed paa store Distan-
cer er som Quadraten af Distancen forkeert. §. 45. den frie Bevægelse af
Tynghen er en ensdan formeert Bevægelse. §. 46 — 48. i den ere Tiderne
som Hastighederne, og de igiennemløbne Rum som Tidernes eller Hastigheder-
nes Quadrater, naar Faldet begynder fra Tingenes Hvile af. §. 49. i samme
Tilfælde kan med Hastigheden i Enden af Faldet i samme Tid det igiennemløb-
ne Rum to gange igiennemgaaes. §. 50. De i enkelte Tider igiennemløbne
Rum forholde sig som de ulige Tal. §. 51 — 57. vises, hvorledes Størrel-
serne af Hastighederne og af de igiennemløbne Rum i Tingenes Fald kunde fin-
des, det ene af det andet.

Det andet Tillæg

indeholder en almindelig Theorie for Bevægelsen, og sammes
Anvendelse til den retlinede i de fornemteste enkelte Tilfælde.

§. 3 — 5. Almindelig Lighed imellem den hastiggjørende Kraft, Hastigheden og
Tiden. §. 6. 7. Ligeledes imellem Kraften, Rummet og Hastigheden. §. 8.
Hvad Kræfternes Center er. §. 9 — 14. Anvendelse af de forrige Ligheder
til at finde Hastigheden i Sekunder og Rummet i Fodder, naar den hastiggjø-
rende Kraft er bestandig. §. 15 — 18. alt det forrige udfores ligeledes i Hen-
seende til Tiden, saavel som Maaden at betiene sig af Høiden, der svarer til
Hastigheden i Steden for Hastigheden selv, i sær naar man ikke seer uden paa
Proportionen. §. 19. bestemmes Bevægelsen ved de bestandige hastiggjøren-
de Kræfter, naar Faldet begynder med en vis given Hastighed. §. 20 vises
Bevægelsens Beskaffenhed, naar Kraften er som Quadraten af Distancen fra
Kræfternes Center. §. 21. Naar Kraften er som den Høide n af Distancen
forkeert tagen. §. 22. særdeles for det Tilfælde, da Kraften er som Distanc-
en fra Centret, udi hvilken Bevægelsen altid bliver isokron, om Kraften
er den samme; og Tiderne af Faldet under sig som Quadrat-Rødderne af Cen-
trernes absolute Kræfter forkeert tagne, naar disse Kræfter ere adskillige.
§. 23. hvorimod Tiderne ere som Quadrat-Rødderne af Distancernes Kubis,
om Tynghen er som Quadraten af Distancen forkeert. §. 24 — 27 vises Be-
vægelsens almindelige Bestemmelse endnu i almindeligere Hypotheser. §. 28 —
39 vises, hvorledes af Bevægelsens bestemte Beskaffenhed de Kræfter kunde fin-
des, som forårsage den.

Tredie Forelæsning.

Den handler om Kræfternes Egevægt under sig, og om Faldet over de skraaelliggende Linier eller Planer.

§. 58 — 69 afhandles Kræfternes Parallelogram, følgelig Maaden at opløse dem i andre ligegyldige, og i Steden for mange at gjøre Brug igien af en eneste. §. 70 vises, hvad det inklinerte Plan er. §. 71. hvad Deel af Tyngden paa det virker, og i hvad Direktion. §. 72 — 82 bevises, at saavel Hastighederne, som de igiennemløbne Rum forholde sig i dette Fald, som i Faldet efter Vertikalen, alene at den hastiggjørende Kraft anses som adskiltig. Videre vises, at Bevægelsen over Cirkels Røder er isokron. At Hastigheden i Enden af Faldet altid er den, som vindes ved Faldet, saavel igiennem et Plans, som en krum Liniens Høide. Tilligemed Tidernes Beskaffenhed af Faldet, o. s. v.

Tredie Tillæg

handler om Faldet over krumme Linier.

§. 30 vises af den almindelige Theorie for Bevægelsen det inklinerte Plans Egenskaber i Tingenes Fald. §. 31 — 33 bestemmes Kræfterne af Tyngden i Almindelighed over alle krumme Linier. §. 33 bevises, at i Faldet over krumme Linier over Krumningen i Hastigheden intet tabes. §. 35 bestemmes i samme Hypothese i Almindelighed Hastigheden. §. 36. Tiden. §. 37 — 40 anvendes det hidtil sagte til det enkelte Tilfælde af Tyngdernes isokrone Bevægelse udi Cykliden. §. 41. 42 bevises det samme, i Henseende til sinua Cirkel-Linier, udi hvilke Bevægelsen er ligeledes isokron. §. 42 forklares den samme isokrone Bevægelse, i Henseende til alle andre dertil stikkede krumme Linier, og §. 44. under hvad Hypothese af Kræfter saa mange rette Linier, som man vil, kunde igiennemløbes i den samme Tid. §. 45 — 47 vises Maaden at finde en Mængde synkroner Linier. §. 48 — 50 gives ligedanne almindelige Regler for alle Kræfter i Almindelighed, som de fra §. 31 — 36. §. 51 og følg. vises, hvorledes man af Faldets givne Egenskaber, i Henseende til Rummet, Hastigheden eller Tiden, kan finde den krumme Linie, udi hvilken at Bevægelsen skeer. Paa denne Maade findes Lighederne til den saa kaldte Linea Isochrone, til den saa kaldte Paracentrica. Og endelig §. 53

W m m m

opløses

oplejes det Probleme om Linien af det hastigste Fald ved Hjelp af de isoperimetriske Metoder.

Fjerde Forelæsning. Der forklares

§. 83 — 86. Experimentale Beviis ved Cykloiden over Tyngdens Love. Og §. 87 ligeledes Beskaffenheden af det hastigste Fald. §. 88 — 91 anføres Reglerne for den endan forsinkede Bevægelse. §. 92 — 97 Pendulernes Bevægelse saavel henført til Cykloiden, som naar den skeer i smaa Cirkel-Duer, der ei overgaae 15° . Tiden af Pendulernes isokrone Sving, eller Oscillation, bliver til Tiden af Faldet igiennem Pendulets halve Længde, som Peripherien til Diametern. Pendulene svinge bedre i smaa Cirkel-Duer, end imellem Cykloidal-Lameller. Tiden af en Tyngdes Fald igiennem Duen, er til en ligesaadan Bevægelse op og ned efter Duens Korder, som 11:14.

Femte Forelæsning.

Om Tyngdens Center.

§. 98. Hvad Tyngdens Center er. I Anmerkningen vises, at et saadant Punkt findes ikke i Legemerne, naar Tyngden er en bestandig Kraft, med mindre at dens Direktioner tillige ere virkelig parallelle. §. 99. saavel da denne Hypothese her hos os kan antages, vises, hvorledes dette Punkt paa en mekanisk Maade kan findes udi alle Legemer. §. 100 — 102 vises paa adskillige Maader, hvorledes Tingene altid hvile, naar Tyngdens Center ei kan bevæge sig. §. 103. At paa horizontale Planer de tunge Ting ei kunde falde om, naar Direktions-Linien af Tyngden efter Vertikalen falder over den tunge Tings Basis. De falde i dette Tilfælde heller ikke om over inklinerte Planer, men glide ned efter dem dreyne af en Deel af Tyngden. §. 104 vises, hvad Ting der lettest kunde falde om, og efter hvad Vinkel-Bevægelse. §. 105 bestemmes Tyngdens Center i Trianglet. §. 106. i Cirkel-Spylke. §. 107. i Cirkel-Snittene. §. 108 handles om Størrelsens Center. Om Tyngdens Center i priematiske, pyramidale og koniske Legemer, i Særdeleshed handles om de af dem, som ere rette. §. 109 og i den neden under saiede Anmerkning forklares den Bevægelse, som visse cylindriske Legemer kunde stige med op efter Planerne, og bevæge sig af sig selv over de horizontale.

§. 110 vises, hvad der er Narsag i at Tingene vælte sig ned over de inklinerte Planer, og at dette ikke beroer alene derpaa, at Vertikalen fra Tyngdens Center falder uden for Basis, men tillige paa Planets Modstand imod Basen. §. 111 forklares Bevægelsen af den dobbelte Reile, som ligeledes ruller op efter Planet og efter som det synes ikke ned efter det.

Den siette Forelæsning

handler om Kræfterne af Tyngden deres Egeevægt under sig.

§. 112 — 118 forklares de umaterielle ubøielige Vægtstangers Beskaffenhed, og at over dem de Inertier hvile, der i Stærrelse forholde sig som Hastighederne forkeert, hvormed de i ensdan Bevægelse skulde bevæges. §. 120, 121. Hvorledes de Ting kunde bringes til at hvile, i hvilke Tyngdens Center falde uden for det Materielle i det Ledige. §. 123, 124. Hvorledes for flere Tyngder det fælles Tyngdens Center kan findes. §. 125 — 130 forklares Precessionernes Moment eller relative Kræfter. I al Hvile ere Momenterne af Tyngderne paa begge Sider af Tyngdens Center lige store. I øvrigt vises, hvorledes, naar disse Momenter paa begge Sider ei ere lige store, Overvægten kan bestemmes.

Fjerde Tillæg viser fra

§. 54 — 56. Den stigende Tyngdernes Bevægelses Beskaffenhed i Følge den almindelige Theorie for Bevægelsen. §. 57 bevises den almindelige Regel, hvorefter Tyngdens Center kan findes. §. 58 — 60. i rette Linier. §. 61 — 63. i de Figurer, der have en Arel, som Parallelogrammet og Parabolen, ind i hvilken Tyngdens Center falder, og paa hvilken alle Tyngdens Dele virkelig tyngte. Hvilket §. 64 og anvendes til de Tilfælde, da Tyngdens Dele henføres til en anden Arel perpendicular paa den foromtalte. §. 65 vises endnu almindeligere, hvorledes, naar af Delenes enkelte Centreer og det fælles Tyngdens Center to ere givne, det tredie da altid kan bestemmes. §. 66. hvorledes Tyngdens Center kan bestemmes endnu almindeligere i Figurerne ved to efter Behag antagne Arel. Videre §. 65. Tyngdens Centers Bestemmelse i Figurer af ulige Arne; saa og §. 69 i afbrudte Figurer. §. 70 bestemmes Tyngdens Center i Cirkel-Vuer. §. 71. i Vuerne i Almindelighed. §. 72 — 74 vises den aller almindeligste Maade at bestemme Tyngdens

dens Center paa i Legemerne, ved at henføre dem til 3 Planer. §. 75 vides, i hvad adskillige Meninger Størrelsens Center kan tages, og hvad for en af dem man helst bør bruge. §. 76 — 78 vides Naaden at bestemme Tyngdens Center paa i de Legemer, udi hvilke man forud veed, i hvad Linie at Tyngdens Center ligger, som i Keilene og Pyramiderne. §. 79 vides det samme efter den almindeligere Methode. §. 80 bestemmes Tyngdens Center i lutter lette Tilfælde, de Løstere til Tieneste, som ei selv vilde bebyrde sig i forekommende Tilfælde med Udregningen. Det bestemmes nemlig i Trapesjerne og i de af dem tilblevne prismatiske Legemer, i de regulære Figurer, i deres Perimetrer, ligeledes i de irregulære, og i de ved dem tilveiebragte prismatiske Legemer. §. 81 bestemmes Tyngdens Center i Kuglens Snittene. §. 82. i Ellipsoiderne. §. 83 bevises, at de enkelte Tyngder multiplicerte hver for sig med deres Distance fra et horizontal Plan, give det samme Moment, som deres fælles Tyngdes Center, multiplicert alene med sin Distance fra dette Plan.

Syvende Forelæsning

indeholder Fortsættelsen om de svingende Tyngder eller Pendulerne.

§. 132 bevises ved Hjælp af Pendulerne, at en Tyngde falder fra sin Hvile af i det første Sekund af Tid $15\frac{1}{2}$ Pariser Fod. §. 133 det samme ved Forsøg. §. 134. at Pendulernes Længder forholde sig som Quadraterne af Tidderne, udi hvilke de svinge. §. 135 vides, hvorledes af Tidene, udi hvilke to Penduler svinge, og den enes Længde, den andens Længde kan findes. §. 136 det samme i Henseende til Tidene af Svinget. §. 137 — 139 forklæres Naaden af Svingenes givne Mængde i en given Tid at finde Længden af et Pendul til Sekunder, hvis Længde er $\frac{881}{2}$ Linie. §. 140 — 145 vides Brugen af Pendulerne i et og andet praktisk Tilfælde, men i sær i Uhrene; og i det at man ved dem kunde finde et almindeligt og for Eftertiden usorglemmeligt Måal, ved at bestemme et Sekund Penduls noie Længde til en vis Grad af Bredden, thi under adskillige Grader af samme er den foranderlig.

Ottende

Ottende Forelæsning

handler om den nyelig omtalte den naturlige Tyngdes Foranderlighed.

§. 146 — 147 vises, at Tyngden ei er den samme overalt i Verden, og hvorledes at dette er fundet ved Hielp af Pendulerne. Hvilke desuden vise §. 148 at Vægten i Tyngderne er Materiens Mængde proportionert. §. 149 — 151 vises, hvorledes af Pendulernes større eller mindre Længde Tyngdens Adskillighed kan sluttet. §. 152 — 155 vises Beskaffenheden af Svingets Center i de sammensatte Penduler. §. 155 vises Maaden, at stytte samtlige Inertieme i et System om til et eneste Punkt. §. 156. 157 og i dens Anmerkning bevises Reglen for Svingets Centers almindelige Bestemmelse. Det anvendes §. 158 til et Exempel. §. 119. 160 bestemmes Svingets Center, saavel naar Figurerne drives paa Siden, som hen efter Grund-Linien i Figurerne, saa og i Legemerne i de fornemmeste og nyttigste Tilfælde.

Femte Tillæg

handler udførligere om Pendulerne og det i den ottende Forelæsning anførte. Fra

§. 84 — 91 anføres Beviserne, hvoraf sikkert kan sluttet at Materiens Mængde er Vægten proportionert, og af Pendulernes adskillige Længder Tyngdens Foranderlighed paa adskillige Steder i Verden. §. 92 vises Brugen af Cykloiden til at bestemme i Almindelighed Tiden af de isokrone Bevægelser. §. 93 bevises Reglen for Svingets Center paa en endnu direkte Maade. §. 95 — 101 anvendes Reglerne for Svingets Center til en Mængde tilfældes Opløsning i de rette Linier. §. 103 — 114 udregnes Svingets Center i Svinget hen efter Vasin, i Parallelogramerne, Trianglerne og Cirkel-Stykkerne, i hvorledes de end blive ophængte o. s. v. §. 115 bevises, at det simple isokrone Pendul Længde altid bliver det samme, saa længe som i det samme System af Legemer Henge-Punktets og Tyngdens Centers Distance bliver uforandret. §. 117. at Svingets Center falder altid under Tyngdens Center, og at Forskiellene imellem Svingets og Tyngdens Center ere altid Distancerne imellem Tyngdens Center og Henge-Punktet forkeert Vits proportionerte. §. 118 — 119 vises Nytten af disse Propositioner i de nyttigste Exempler,

og §. 120. at Hænge-Punkter og Svingets Center indbyrdes kunde forbyttes, uden at det simple isokrone Penduls Længde derved forandres. §. 121 bevises Reglen for Figurerens Sving paa Siden. Deraf bestemmes videre Svingets Center i alle Tilfælde. §. 122. 123. i Parallelogrammerne. §. 124 — 126. i Trianglerne §. 127. i de fievte Figurer, v-d Hielp af de rette. §. 128. i Parabolen. §. 129. i Cirkel-Stykkerne og Cirkel-Snittene. §. 131 bevises Reglen for Svingets Centers Bestemmelse i Kegemerne i Almindelighed; men i Særdeleshed §. 132. 133. i Kuglerne. §. 134. i Kuglerne. §. 135. i Cylindrerne. §. 136. i paraboliske Konoider.

Den niende Forelæsning

afhandler Central-Krafterne i den cirkulære Bevægelse.

§. 162 — 166 forklares Central-Krafterne udforlig, saavel som, hvorledes Hastigheden kan have Tyngden. §. 167 — 169 anføres de letteste Forsøg, hvorved dette kan bekræftes. §. 170. 171 vises Forskiellen imellem Centripetal- og Centrifugal-Kraften. §. 172. begge ere Pressioner. §. 173 — 177 vises, at Central-Krafterne ere som Quadraterne af Hastighederne dividerede med Halv-Diametrene o. s. v. §. 177. 178 vises, naar Central-Krafterne ere som Diametrene, og naar de ere som Diametrene forkeert. §. 179. 180. at naar Hastigheden i cirkulær Bevægelse er den, som vindes ved Halvdet igiennem Gierde: Delen af Diametren, da bliver Centrifugal-Kraften saa stor som Tyngden, og §. 181. at en Kugle derfor kan flydes ud med en saadan Hastighed, at, om ingen Modstand var, den siden idelig skulde blive ved at bevæge sig omkring Jorden. §. 182. 183 vises, med hvad Hastighed Maanen skulde kastes ud i denne Drabants Distance fra Jorden, paa det at den kunde ved Tyngden omkring samme bevæge sig paa samme Maade, som nu virkelig skeer. §. 184 forklares, hvad der i Almindelighed udfordres til at en saadan Bevægelse kan blive til i Naturen, som Planeterenes. §. 185 — 187 agtes, at Bevægelsen i dette Tilfælde er i Cirklen altid ensdan; og i Anmerkningen, at saa tidt som Bevægelsen skeer i en Cirkel, forholder Central-Kraften sig til den naturlige Tonade, som Heiden igiennem hvilken Hastigheden af Bevægelsen ved den naturlige Tonade kunde vindes til Cirkelns halve Halv-Diameter. §. 189. 190 vises den almindelige Marsag til den cirkulære Bevægelse i andre krumme Linier, og §. 191. 192. i hvad Hypothese

af Hastighed Kræfterne blive som Quadraterne af Diametrene forkeert, og som disse Rubi. §. 193 forklæres, for hvorvidt Central-Kræfterne beroe paa Materien.

Det siette Tillæg

afhandler dette udførligere.

- §. 137. 138 vises, hvorledes i Almindelighed i Cirkulær-Bevægelse af de givne Kræfter Hastigheden kan findes, og §. 139 Tiden. §. 140. 141. hvorledes af Omløbs-Tiderne Central-Kræfterne kunde findes. §. 142 — 145 forklæres Pendulernes koniske eller hvirvelende Bevægelse. §. 145 — 147 bestemmes i den Hastighederne og deres fornemteste Egenskaber. §. 148. 149 ligesledes Tiden. §. 150 — 153 forklæres det Isokrone i deres Bevægelse. §. 153 — 157. i hvad Tilfælde Centrifugal-Kraften er saa stor som Tyngden. Disse Sving sammenlignes videre med Pendulernes o. s. v.

Den tiende Forelæsning

viser Nyttens af Central-Kræfterne i at kiende ved deres Hielp de store Bevægelser og de store virkende Kræfter i Naturen.

- §. 194 — 197 vises, at i den hele Jord er ikke en saadan Tyngde, som i dens Dele, saa den paa denne Maade ei kan falde. §. 197 forklæres Aarsagen til de himmelske Legemers uophørlige Bevægelse udførligere. §. 198. 199 forklæres de Regler, hvorefter kan sluttes, om Kræfterne ere centrale, og disses nødvendige Beskaffenheder. Hvilket endnu udføres videre med det hidhen hørende fra §. 199 — 203.

Den ellefte Forelæsning

beviser, at Central-Kræfterne i Naturen ere som Quadraten af Distancen forkeert.

- §. 204 — 207 bevises dette af Keile-Snitteens Natur. §. 207. 208. at af denne almindelige Lov i Naturen Tyngden her hos os er en Følge. §. 209. at Jorden og alle Planeterne tyngde imod Solens Center, ligesom de tunge Ting her hos os imod Jordens. §. 210. at den Central-Kraft, som driver Maanen, er den samme Tyngde imod Jordens Center, som den er, med hvilken Tingene her hos os falde. §. 211 forklæres, hvorledes det beroer paa Hastighedens

stighedens Størrelse, som Tingene kastes ud med, hvad heller de skulle beskrive den ene eller den anden af Keile-Snittene, og i hvad Tilfælde enhver af dem maa beskrives. §. 212. 213 vises, at Central-Kraften bliver i sig selv stillig, eftersom den driver imod adskillige Punkter af eller i Legemet's Lobe-Bane.

Det syvende Tillæg

indeholder 1) Central-Krafternes almindelige Theorie.

§. 158 indeledes de i Normal- og Tangential-Kraften, hvis almindelige Værdier bestemmes. §. 159 — 161 vises, hvorledes i Central-Bevægelsen ubi krumme Linier Hastigheden kan bestemmes. §. 162. Det samme i Henseende til Tiden. §. 163 gives almindelige Regler for Lobe-Banens Bestemmelse. §. 165 — 169 vises Maaden at forandre Lobe-Banens forhen fundne og ofte mindre bequemme Ligheder til andre imellem retliniede Koordinater. Siden gøres Anvendelsen af det forrige i den Tilfælde, da Central-Kraften er som Quadraten af Distancen, eller som dens Kubus, begge forkeert tagne. §. 170 — 172 beviser, at Bevægelsen maa altid ske i en af Keile-Snittene, naar Central-Kraften er som Quadraten af Distancen forkeert, og man viser i hvad enkelte Tilfælde at Bevægelsen kan have Sted i enhver af dem for sig. §. 173 bevises, at i denne Hypothese blive Omløbs-Tiderne som Quadratkædderne af Ellipsernes store Arier deres Kubis. §. 174 forklæres at Vuen bliver en Ellipse, til hvis Center Central-Kræfterne drev, om disse sidste vare proportionerte Distancen fra Centret. Var derimod Central-Kraften som Kubus af Distancen forkeert, kunde Bevægelsen paa mange Maader ske i Spiraler, og Planeterne kunde i en endelig Tid falde ind i Solen.

2) vises, hvorledes af den givne krumme Linies, eller af Lobe-Banens Beskaffenhed Central-Kræfterne kunde findes, og det i et dobbelt Tilfælde. a) §. 175. Naar den krumme Linie er ubevægelig og ruller ei om Kræfternes Center. b) §. 176. Naar Lobe-Banen er bevægelig og dreier sig omkring Kræfternes Center.

Det ottende Tillæg

handler om Kanalernes perpendikulære Trykning af de Bege-
mer, som bevæge sig ned over dem.

§. 178 — 193 afhandles dette saavel for de faldende, som stigende Trykder.

§. 194 endnu i andre Hypotheser. §. 195 bestemmes den Linie, som over-
alt af en faldende Trykde bliver trykt med en Kraft, saa stor som dens Vægt.

Den tolvte og trettende Forelæsning

afhandler de tunge Tings Bevægelse, som Skydes eller kastes ud.

§. 214 — 220 vises, at i de udfastede Legemer Bevægelsen hen efter Horizonten er en ensdan Bevægelse, og hvorfor samtlige disse Legemer bør anses som at beskrive Parabler, saa tidt som under Bevægelsen ingen Modstand møder. §. 221 bestemmes Parabolens Diameters Parameter af den givne Inklinations-Vinkel, og af Skuddets horizontale Længde. §. 222 ligeledes Skuddets største Høide. §. 223. Parametern af Parabolens Arel. §. 224 bevises, at saa længe Hastigheden i Begyndelsen af Skuddet er den samme, forholde sig de under adskillige Vinkler giorte horizontale Løb som Sinus af de dobbelte Forhøinings-Vinkler, skiant under enhver nye Forhøinings Vinkel Parabolen bliver en anden. I disse Parabler forholde sig Parametrene til Arelne, som Quadraterne af Forhøinings-Vinklernes Cosinus, men de største Høider, som Quadraterne af samme Vinklers Sinus, o. s. v. §. 225 vises, at det længste Kast hen over Horizonten skeer under 45° Forhøining. §. 226 vises i Exempler, hvorledes af et givet Prøve-Skud de under andre Vinkler giorte Skuds horizontale Løb kunde findes. §. 227. at Parametern af Parabolen er to gange Skuddets horizontale Længde under 45° . Og §. 228 — 230. at Hastigheden, hvormed Tingene i Begyndelsen skydes eller kastes ud, vindes altid ved Falder igennem Hjerde-Delen af Parametern o. s. v. §. 231 bestemmes i denne Bevægelse Tiden. §. 232 vises, hvorledes Udrejningerne kunde gøres for de Ting, der ei ligge i, men som ere forhøjede over Horizonten, paa det at de kunde treffes. §. 233 — 236 bestemmes alt det forrige uden Udrejning ved geometrisk Construction. §. 237 viser, i hvad Tilfælde denne Theorie stemmer med Erfaring.

N u n n

Det

Det Tiende Tillæg

viser alt det forrige af Bevægelsens almindelige Theorie, og indeholder desuden andre nye Anmerkninger fra §. 196 — 205.

Den Tiortende Forelæsning

handler om Bevægelsens Hindring, naar den skeer i flydende Materier, som staae imod.

§. 238. 239 viser, at Inertiens Modstand i en flydende Materie er som Quadraten af Hastigheden. §. 240. at Modstanden af Delenes Tenacitet er derimod Hastigheden proportionert. §. 241. 242. den første Hypothese trefser best ind med Erfaring, naar Hastigheden er stor; den sidste, naar denne er liden. Ingen af begge stemmer fuldkommen med Naturen. §. 243 — 253 anføres i den første Hypothese de fornemmeste Bevægelsens Beskaffenheder i flydende Materier, 1) naar Legemerne bevæges med en simpel Hastighed, uden at drives tillige af Tugden. 2) Naar Legemerne stige op efter, bevæge tillige ned efter af Tugden. 3) Naar de falde ned efter. §. 254 — 255 handles om Modstandens adskillige Virkninger i tykkere og tyndere flydende Materier, saavel som paa Ting af større og af mindre Masse. Overalt vises, at Bevægelsen er her overmaade adskillig fra den frie Bevægelse. Og §. 256 — 259 vises det samme i Faldet over krumme Linier, saa og at Cyklويدens isokrone Egenskab her taber sig. Med videre.

Tiende Tillæg

forklarer udsærligere Beskaffenheden af Bevægelsen udi flydende Materier.

§. 207 — 220 udvikes det Tilfælde af retlinet Bevægelse, da Legemerne bevæge sig med en vis given Hastighed imod en overalt lige tyk flydende Materie, uden tillige at drives af andre Kræfter. §. 208 vises, at Hastigheden da ikke taber sig uden i en uendelig Tid. Og ei heller §. 209. uden igiennem et uendeligt Rum. §. 212 undersøges Hastigheden, naar Modstanden er som andre Hvider af Hastigheden end Quadraten, hvilke §. 213. om ere større end Hastigheden, da tabes endnu ikke denne uden igiennem et uendeligt Rum, men §. 214. 215. om Modstanden er som Hastigheden, eller rejser sig efter

en endnu mindre Hvide af samme, da tabes denne altid over et endeligt Num.
 §. 226 bestemmes Tiden i Almindelighed i alle disse Hypotheser. Saa tidt
 som §. 217 — 220. Modstanden er af en større Hvide, end Hastigheden simp-
 pel hen tagen, tabes denne sidste aldrig, uden i en uendelig Tid. Er den
 Hvide, efter hvilken den retter sig, som Hastigheden, bliver Tiden vel uende-
 lig, men i mindste Grad. Er den Hvide, hvorefter Modstanden retter sig,
 mindre end Hastigheden simpel hen taget, bliver Tiden af Bevægelsen der-
 imod endelig. §. 221 — 231 undersøges Egenskaberne af Faldet ned efter
 i lige tykke flydende Materier, hvis Modstand §. 22 er som Hastighedens
 Quadrat, da Hastighed og Tid i Almindelighed bestemmes. §. 223. 224
 vises, at den største Hastighed, som vindes ved Faldet, naaes i denne Mod-
 standens Hypothese vel ikke, før et uendeligt Num er blevet igiennemløbet,
 men §. 225, Tingene kunde dog ikke vinde ved Faldet, uden en endelig Ha-
 stighed. §. 226 227 uledes heraf den før fundne Hastighedernes Henseen-
 de til Nummet i det frie Fald, og siden i meget tynde Materier, som staae
 imod. §. 228 udvikles det Tilfælde, da Tingene begynde Faldet med en vis
 given Hastighed. §. 229 — 131 bestemmes Tiderne af Faldet, saavel naar
 det begynder uden, som med Hastighed. Er Modstanden som Hastighedens
 Quadrat, naaes den største Hastighed ikke før i en uendelig Tid, om Faldet be-
 gynder fra de tunge Tings Hvile. Derimod, naar de begynde at falde med
 en given Hastighed, kan denne være saa stor, at den af Modstanden strax svæk-
 kes, og naar Modstanden imod Hastigheden bliver saa stor som den drivende
 Kraft af Tyngden ned efter, bevæges Legemet siden med enédan Bevægelse.
 §. 232 — 244 undersøges denne samme Bevægelse, naar Tingene med en
 vis given Hastighed bevæge sig op efter; og §. 232 i Almindelighed: siden
 i den Hypothese, at Modstanden er som Hastighedens Quadrat. §. 234
 bestemmer da Hastigheden, som §. 235 altid taber sig igiennem et endeligt
 Num. §. 236 bestemmes Hastigheden i meget tynde flydende Materier.
 §. 237 — 239. i Almindelighed Tiden. Hvilken §. 240 altid bliver ende-
 lig. §. 241 bestemmes af Tiden, ubi hvilket Strikningen og Faldet begge
 ske, saavel Nummet, som Hastigheden, og af dem igjen de enkelte Tider.
 §. 242 udføres dette videre for den Tilfælde, da de flydende Materier ere me-
 get tynde. §. 244 — 248 handles om den retlinete Bevægelse igiennem
 Materier, som ii ere overalt lige tykke. §. 249 — 256 vises den retlinede

Bevægelses Beskaffenhed i flydende Materier, i ser i de, som overrakt staae ensdan imod, saa tidt som Eugene tillige drives af Central-Kræfter.

Derpaa handles om den krumlinede Bevægelse i flydende Materier, og 1) naar Kræfternes Direktioner ere parallelle.

§. 257. 258 anføres de almindelige Regler. 259 — 275 gjøres Udregningerne i Almindelighed i den Hypothese, da Kræften er bestandig og Modstanden som Quadraten af Hastigheden. Men i særdeleshed vises i tynde flydende Materier, som Luften, hvad for algebraiske Linier der mest nærme sig til den sande de udfastede Tings Løbe-Vane, hvilken nu ikke langer er en Parabol. §. 276 vises, hvorledes i den Hypothese af bestandige Kræfter, naar Løbe-Vanen er given, Modstandens Lov i Almindelighed kan bestemmes. Det samme §. 277 endnu almindeligere. Og §. 278 af Kræfterne og Løbe-Vanen at bestemme den hastiggjørende Kraft.

2) Naar Kræfternes Direktioner ei ere parallelle.

Da bestemmes fra

§. 279 — 286 saavel Hastigheden i Almindelighed, som Tiden og Løbe-Vanen. §. 283 vises, hvad Kræfter der behøves til at i en flydende Materie den samme Løbe-Vane kan beskrives, som ellers ved andre i den frie Bevægelse. §. 284 forklæres, hvorledes af den givne Modstand og Løbe-Vanen Kræfterne kunde bestemmes, og §. 285 af de givne Kræfter og af den givne krumme Linie at finde Modstandens Lov.

I den tredie Afdeeltning handles om Faldet ned efter krumme og rette Linier, naar de hastiggjørende Kræfter ere bestandige og virke efter parallelle Direktioner. Til

§. 289 afhandles dette i Henseende til Modstanden ubestemt Blis given; siden i den Hypothese af Hastighedens Quadrat. §. 290 — 300 bestemmes Bevægelsen saavel op som ned efter inklinerte Planer, og der vises, hvorledes de for det uhindrede Fald i Forelæsnningen givne Regler her ikke meer have Gred. §. 300 bestemmes Bevægelsens almindelige Beskaffenhed over krumme Linier. §. 361 bevises, at i Faldet den stærste Hastighed ei faaes i det Punkt af Linien, hvor Tangenten er horizontal, men i et andet, hvor Sinus totus holder sig til Cosinus af den Vinkel, hvilken Tangenten i det Punkt gjør

med

med Vertikalen, som Tyngden til Modstanden udi samme Punkt. §. 302 bestemmes Tiden. §. 303. 304. Bevægelsens Beskaffenheder op efter. §. 305 — 308 bevistes, at Bevægelsen i Enkliden bliver i flydende Materier ikke isofron, med mindre at Hastigheden selv er overmaade liden.

Den femtende Forelæsning

handler om de levende Kræfter.

§. 260 — 278 saavel i Forelæsningerne, som i Anmerkningerne, vistes fuldkommen, hvorpaa Vanskeligheden i Hensende til Kræfternes Maal beroer, og at de levende Kræfter ere som Massen i Hastighedens Quadrat. Ligeledes vistes den sande Forskiel imellem Pressionerne og disse Kræfter. §. 279 og i den neden under førte Anmerkning vistes, hvorledes de levende Kræfter ved Kræfternes Parallelogram kunde opløses udi andre.

Den fjerde Forelæsning

handler om Bevægelsens almindelige Beskaffenhed i Tingenes Sammenstød.

§. 280 — 285 forklares de haarde, bløde og elastiske Tings Afstøllighed og Overeenstemmelse i disse Henseender. §. 286 — 294 forklares og bevistes de almindelige Regler, af hvilke i alle enkelte Tilfælde af det direkte Stød alt kan opløses. I Anmerkningen til §. 291 forklares en Paradoxie, som i denne Lærdom kunde synes at være.

Det ellefte Tillæg

handler om den relative Bevægelse.

§. 309. dens Hoved-Idee. §. 310 — 313 bestemmes i den retlinde Afbøjning og Tiden. §. 314. ligeledes, naar Tingene bevæges i parallelle Linier. §. 315. 316. naar Bevægelsen skeer i koncentriske Cirkler. §. 317. 318. naar Bevægelsen skeer i sammenløbende Linier, og begge Tingene gaae p. en Tid ud fra et og det samme Punkt. §. 319. naar de ei paa en Tid bevæge sig ud fra det samme Punkt. §. 320 — 326 afhandles det, som angaaer denne Bevægelse, uden at antage den ene af Tingene som hvilende.

Den syttende Forelæsning

i den gjøres Slutninger i enkelte Tilfælde af de før fundne
Regler for Tingenes Sammenstød.

§. 295. I Almindelighed, naar elastiske Ting gaae med hverandre, eller imod hinanden. - §. 297. naar en af disse Ting hviler. §. 298. naar Hastigheden før Slaget var i begge lige stor. §. 299. 300. i andre almindeligere Tilfælde. §. 301 — 303 anføres Reglerne for de haarde og bløde Ting. §. 303 — 306 vises, at Bevægelsens Størrelse i Tingenes Sammenstød ei altid bliver den samme, og at den derfor ikke kan være det rette Kræfternes Maal. §. 308. 309 bevises derimod, at de levende Kræfters Sum ei forandres ved Stødet. §. 310. at de levende Kræfter ikke tilintetgjøre hverandre i de elastiske Tings Sammenstød.

Den attende Forelæsning viser

§. 311. at Tyngdens Centers Bevægelse i Sammenstødet aldrig forandres. §. 312. den relative Hastighed heller ikke. §. 313 — 316 undersøges i adskillige Tilfælde Hastighedernes Forandringer i begge Legemer ved Slaget. §. 317 vises, at Hastigheden utroelig kan formeres ved det middelbare flere Legemers Sammenstød.

Det tolvte Tillæg viser

§. 327 — 334. at de experimentale Beviser over Stødet's Kræfter træffe i Udregningerne nøie ind med Theorien. §. 213 — 214 afhandles udførligere det forhen sagte om det middelbare Stød.

Den nittende Forelæsning handler

1) om Stødets Center, og viser

§. 319. at Stødets og Svingets Center ere begge et og det samme Punkt. §. 320 forklares 2) Bevægelsens Beskaffenhed, naar Ting støde an paa andre, som ei kunne vige. §. 321 — 324 vises 3) Beskaffenheden af Tingenes Reflexion, at nemlig Anstøds Vinklen er saa stor som den, under hvilken de springe tilbage, naar de træffe en fast Modstand. §. 325 vises under hvad Vinkel de bør støde an paa et Plan, paa det at en efter en vis Ertning giør Ting kan træffe. §. 326. hvoraf den ufuldkomne Elasticitet kan maales.

§. 327

§. 327 — 332 vistes 4) det fievte Steds Beskaffenhed, og de ved det i Almindelighed forarsagede Bevægelsers Bestemmelse, naar begge Kuglerne kunde bevæge sig frit. §. 333. at Tyngdens Centers retlinde Bevægelse forandres heller ikke ved disse Slags Sammenstød. §. 334. i hvor mange Lege-mer at der end stode sammen. Endelig afhandles 5) §. 336 — 338 Egenskaberne af det excentriske Sted. Man viser, at det forvolder en omrullende Bevægelse, hvis almindelige Egenskaber videre forklares i Anmerkningen. Og man viser §. 338, at den omrullende Bevægelse ei hindrer den fore-gaaende.

Det trettende Tillæg

forklarer de mekaniske Metoder, som grunde sig paa det Princip, at Naturen i sine Handlinger søger altid et Mindste.

§. 336 anmerkes, at det Princip om det Mindste i Naturens Handlinger er i sig indirekt. Desagtet §. 337 iagttages det i Hensende til Kræfternes Tab i de haarde og bløde Tings Sammenstød. §. 338. ligeledes i det excentriske. §. 339 — 41 forklares deraf en beqvem Maade at omslytte Inertien paa, og af den igjen. §. 342 — 348. det excentriske Steds Beskaffenheds fulde Bestemmelse. §. 349 vistes, hvorledes af et saadant Mindste i Virkningen Tingenes Reflexion eller Tilbage-Spring kan forklares. Og endelig §. 350, at i Kræfternes Ligevægt et saadant Mindste altid findes. Hvoraf følger §. 351. at i Tingenes Hvile Tyngdens Center altid ligger enen i sin høieste eller laveste Stillning. §. 352 forklares dette samme Princip, for saa vidt som man mener, at det i al frie Bevægelse kan finde Sted.

Tyvende Forelæsnings handler

Om de elastiske Tings smaa Bevægelser, eller om den zittrende Bevægelse.

§. 340. i elastiske Strenger, som spændes af meget smaa Kræfter, merkes saft ingen elastisk Bestræbelse. §. 341. ei heller naar de spændes af meget stærke; men derfor alene, naar de spændes af maadelige. §. 342 — 251 forklares disse Virkninger Beskaffenhed, og den af dem forarsagede isokrone Bevægelse.

Bevægelse. §. 352 vises, at denne Theorie ydermere kan passe sig til Bevægelsen af tynde elastiske jittrende Plader.

Fiortende Tillæg

forklarer dette Slags Bevægelser udførligere.

§. 353 — 355. Naar en iirmateriel Streng svinger med en eneste Inertie.
§. 356 — 358. med to. §. 359 — 362. naar den svinger med tre.
Fra §. 363 til Slutningen vises deraf videre de almindelige Regler for saa mange Inertier, som man vil. Endelig og for en heel Materiel-Streng af meget liden Tykkelse. Den krumme Linie bestemmes, hvilken denne sidste under Bevægelsen antager, og man beviser, at den er den saa kaldte Socia Cycloldis.

Tryk = Feil.

Side.

5. §. 4. lin. 16. i Steden for: Vrende-Punkter, læs: Vrende-Linien.
 13. = 16. = 8. i Et. f. §. 16. l. §. 16. i.
 15. = 19. = 16. f. de naturlige. l. de vedvarende naturlige.
 17. §. 23. = 1. f. Modstanden dobbelt, Nummer der samme l. Modstanden den samme, Nummer dobbelt
 51. = 17. = 7. f. du l. dx
 54. = 59. = 5. f. $\sqrt{4g}$ l. $\frac{1}{\sqrt{4g}}$
 59. = 22 = 20. f. = pr. l. Pr.
 62. sidste Linie f. Ad l. AD
 71. i Anmerkningen næst sidste Linie f. dz l. df
 72. i Anmerk. lin. 16. f. dz l. $\frac{df}{ab}$
 73. i Anmerk. lin. 14. f. Den tredje l. Den anden
 74. sidste Linie for Tom. II. læs: Tom. I. p. 126.
 76. §. 65. lin. 2. f. AB l. AE
 85. = 82. = 6. f. EC l. EG
 = 7 og 9. f. $\sqrt{GB}$ l. $\sqrt{GE}$
 90. = " " f. GE l. CE
 97. §. 39. lin. 8. f. §. 23. l. §. 22. i.
 101. §. 43. lin. 2. f. §. 38. l. §. 42.
 107. = 48. = 20. f. DL l. CL
 119. = 14. for: thi $\frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ læs $\frac{-xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax-xx}}$
 123. = 86. = 18. f. $\sqrt{EE}$ l. $\sqrt{FE}$
 130. = 95. sidste. f. falder l. bevæget
 152. = næst sidste Linie f. Perpendiklen l. Vertikalen
 170. lin. 5. naar — flertes ud
 177. §. 57. = 11 f. P'P, A l. P''P'A
 178. = 9. f. §. 129. l. §. 128
 185. sidste Linie f. §. 65. l. §. 66.
 186. første f. §. 53. l. §. 63.
 = lin. 6. f. $\int \frac{\sqrt{a}}{2} y dy$ læs $\int \frac{\sqrt{a}}{2} y^{\frac{1}{2}} dy$
 188. lin. 10. f. $-\int \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} - \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ l. $-a \left(\frac{\int adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} - \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} \right)$
 = lin. 11. f. a. Vuen f. a $\sqrt{2ax - x^2}$ l. a. Vuen f. B $-a \sqrt{2ax - x^2}$
 194. = 8. for DA læs EA
 198. = 79. = 7. f. lb l. ld
 221. = 9. f. første, som i det sidste l. sidste, som i det første
 232. c. 2. = 3. f. $\frac{8ac + 5a^2}{16c + 8a}$ læs $\frac{8ac + 5a^2}{16c + 8a} + c$
 00 00

Side.

Eide.

233. d 2. lin. 2. f. $r + \frac{2rr}{5 \cdot (l+r)}$ læs $a + \frac{2aa}{5 \cdot (l+a)}$

f. : 3. f. No. 5. l. No. e.

256. : 12. f. det søgte l. det sidste

262. lin. 1. f. $\frac{1}{2}a + \frac{a^2}{16c+8a} = \frac{8ac+5a^2}{16c+8a}$ læs $\frac{1}{2}a + c + \frac{a^2}{16c+8a} = \frac{8ac+5a^2}{16c+8a} + c$

§. 121. lin. 4. f. §. 97. §. l. 98. Tillæg

293. i Anmerk. lin. 12. f. Cirkels Halv-Diameter l. Cirkels halve Halv-Diameter

332. lin. 8. f. BI læs DI

339. : 12. f. = p o. f. v. læs : = p², og følgende $\left(\frac{I}{Bb^2} - C \right)^{\frac{1}{2}}$

343. sidste Linie for $b\sqrt{\frac{B}{r^2}} dy$ læs $b\sqrt{\frac{B}{r^3}} dy$

352. lin. 16. f. = $\frac{r^2}{2d^2}$ læs $\frac{r^3}{2d^2}$

: 17. f. y:p=b:d læs : y:p=d:b

374. §. 216. lin. 8. f. AQO læs: AO

377. : 222. : 1. f. ab læs nb

391. : 235. : 6. f. AOK l. oAK

: 236. : 2. f. AIP læs : AIM

394. sidste Linie f. dy l. dy²

414. §. 207. lin. 5. f. A læs $\sqrt{A}$

416. sidste Linie f. $2c \cdot e - \frac{x}{2c}$ læs $2c : e - \frac{x}{2c}$

420. i Marginalen lin. 3. f. Høide 1. l. Høide 2.

421. i Marginalen lin. 4. f. da altid endelig l. dog altid uendelig

i Slutningen, f af Hastigheden. l. af Høiden, som svarer til Hastigheden.

422. i Margin. lin. 4 og 5. f. af Hastigheden. l. af Høiden, som svarer til Hastigheden.

423. lin. 3. f. $\frac{2}{1-2m} A^{1-m}$ o. f. v. l. $\frac{2}{1-2m} A^2 (A^{-\frac{1}{2}} C)^{\frac{2m^2-2m}{2m-2}} = 2 A^2 C^m$

424. §. 222. f. $z = 0$ f. v. læs : $z = \int c^m dz : (Gc^m - z^m) \sqrt{z}$

429. næst sidste Linie f. for y l. for v

432. §. 232. lin. 5 og 7. f. §. 216. l. §. 221.

435. : 238. : 5. f. dr l. ds

441. : 9. f. $x^2 \sqrt{x}$ l. $2x^2 \sqrt{x}$

444. : 246. : 1. f. $\sqrt{aG}$ o. f. v. l. $\sqrt{\frac{aG}{a-1}}$ e. f. v.

445. : 248. : 14. f. §. 245. l. §. 247.

447. : 250. : 6. f. i v l. i F

449. : 252. : 2. f. z = l. =

: 4. f. op efter z l. op efter

Eide.

Side.

449. = sidste Linie f. $= (-\frac{1}{r^n} \text{ læs } = -\frac{1}{r^n}$

452. §. 256. = 5. f. $-Fe^{-\frac{x}{2F}} \text{ læs } -2Fe^{-\frac{x}{2F}}$

456. 8. f. er r l. er $-r$

457 første f. $e^{-\frac{s^2}{c}} \text{ læs } e^{-\frac{s}{c}}$

459. = 265. lin. 5. f. $12dx^2$ l. $12dx^2$:
: 13. f. $16c^2$ l. $16c^2$: $16n^2$

463. = 274. = 2. f. $1:(1+a^2)$ l. $1:2(1+a^2)$

467. = 281. = 3. f. $-2zdp$ l. $-2zdp$

= 4. for: sætte $=z$ læs: sætte $e^{-\frac{s}{c}} cb^2 : p^2 = z$

472. §. 290. f. Taf. XI. l. Taf. XII.

473. = 473. sidste, og Side 474. §. 293. lin. 1. f. $\frac{gc}{a} (1 - o. f. v.$

$\text{læs: } \frac{gc}{a} - \left(\frac{gc - aC}{a} \right) e^{-\frac{ax}{c}}$

479. = 302. lin. 1. f. AE l. AD

480. = 304. for dv og §. 299. sættes dz og §. 300

512. sidste Linie f. ab l. db .

514. i Anmerk. lin. 10. f. $ad = fa$ l. $ad - fa$

533. §. 313. f. CD l. CE

565. lin. 16. f. det større l. det mindre

= 22 og 23. for A sættes B, og for B sættes A;

570. = 328. = 15. f. z l. P

571. = 330. = 3. f. til C l. til c

4. f. i C c l. i c , C

572. 5. f. $= (db.c^2) : Cc^2 + Dd^2 + dc^2$ l. $= (Lb.c^2) : Cc^2 + Dd^2 + Lc^2$

583. = 323. = 2. f. GD l. AB

591. = 333. = 6. f. FG l. Fg

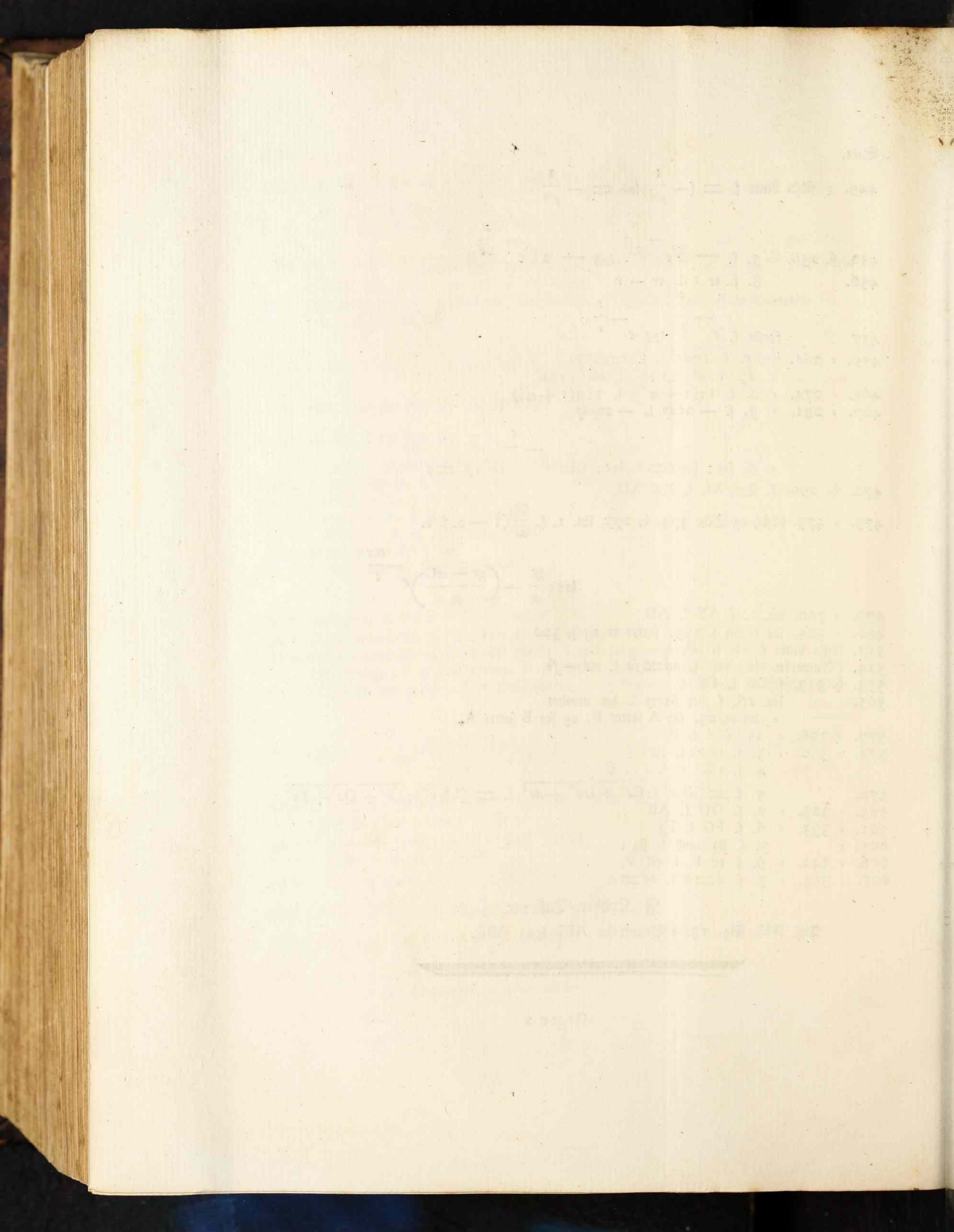
605. = 3. f. sig imod l. sig i

606. = 342. = 9. f. til B. l. til V.

627. = 354. = 3. f. $d = a$ l. $ad = a$.

3 Kobber-Tafelne.

Taf. XII. Fig. 13. i Steden for ABB læs: ABD.



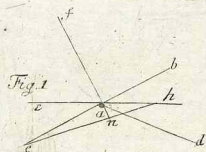


Fig. 2.

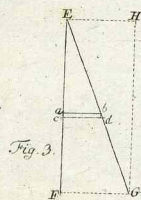
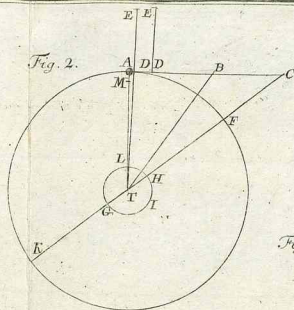


Fig. 3.

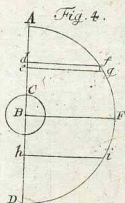


Fig. 4.

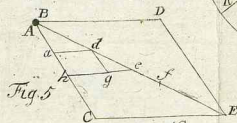


Fig. 5.

Fig. 7.

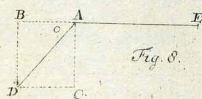
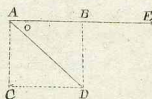


Fig. 8.

Fig. 6.

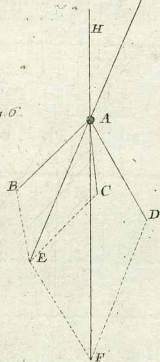


Fig. 9.

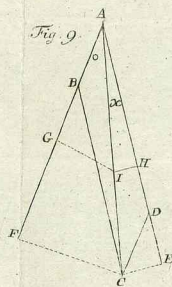


Fig. 10.

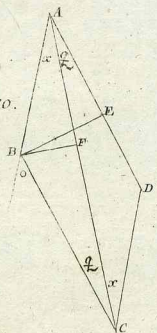


Fig. 11.

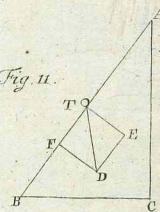


Fig. 13.

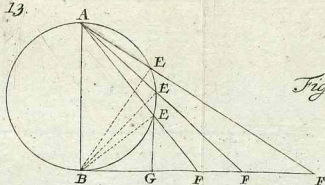


Fig. 14.

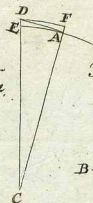


Fig. 12.

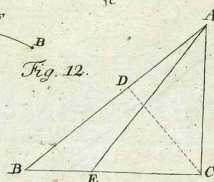






Fig. 1.

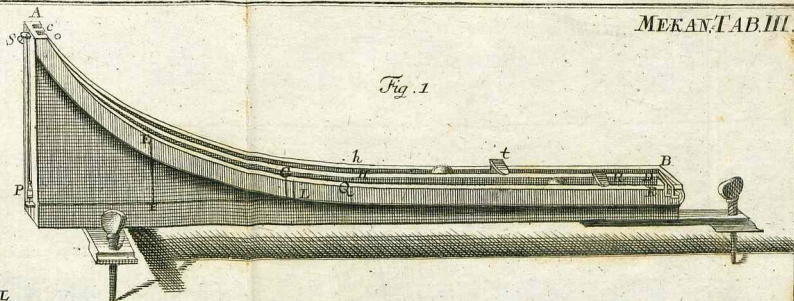


Fig. 2.

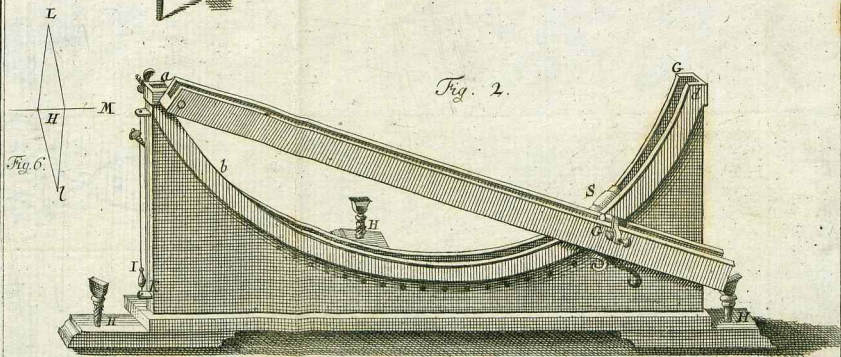


Fig. 5.

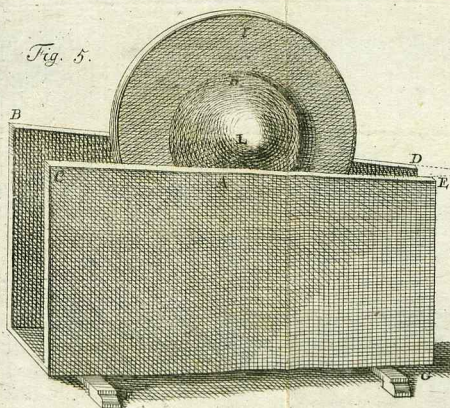


Fig. 4.

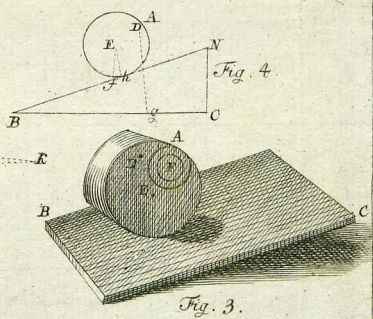
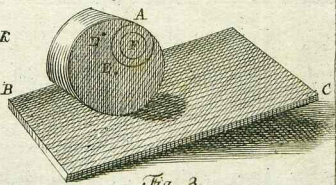
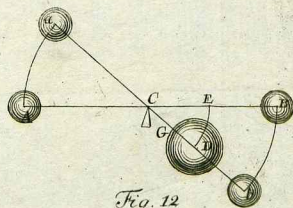
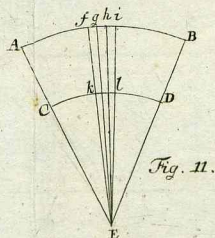
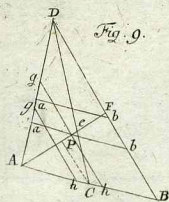
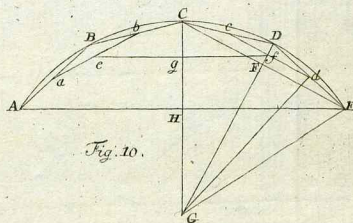
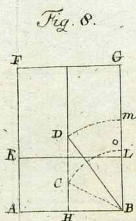
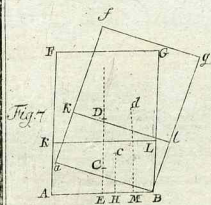
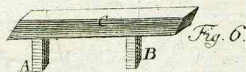
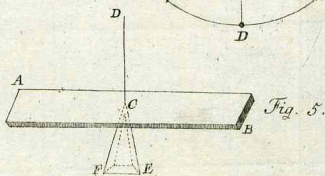
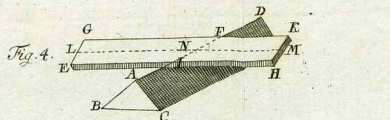
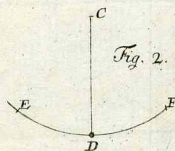
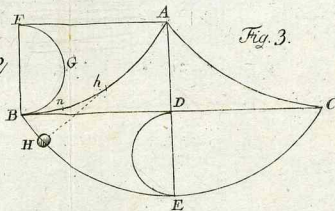
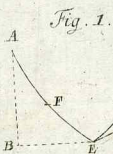


Fig. 3.









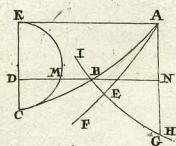


Fig. 1

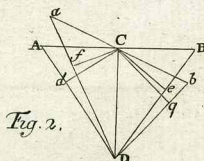


Fig. 2.

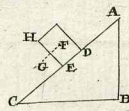


Fig. 3.

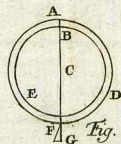


Fig. 4.

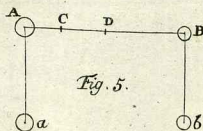


Fig. 5.

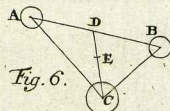


Fig. 6.

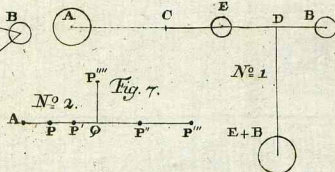


Fig. 7.

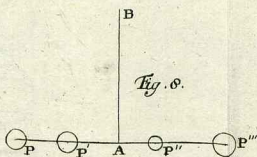


Fig. 8.

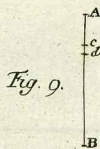


Fig. 9.

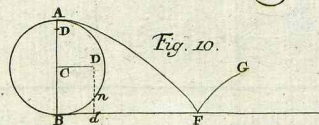


Fig. 10.

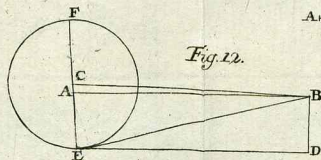


Fig. 12.

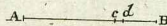


Fig. 11

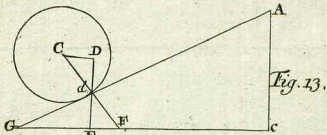


Fig. 13.

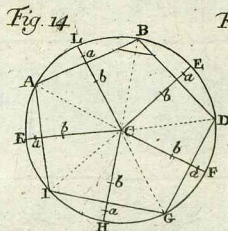


Fig. 14

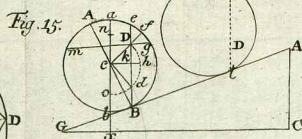


Fig. 15.

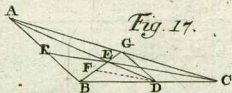


Fig. 17.

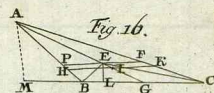


Fig. 16.

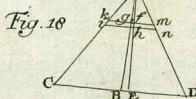
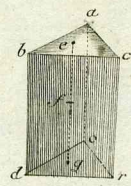
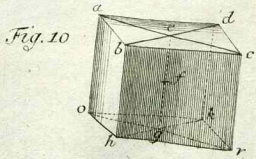
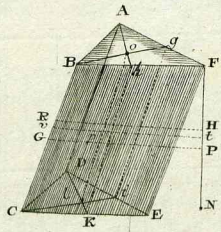
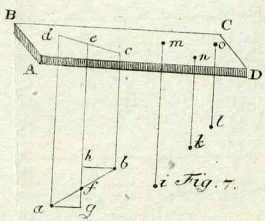
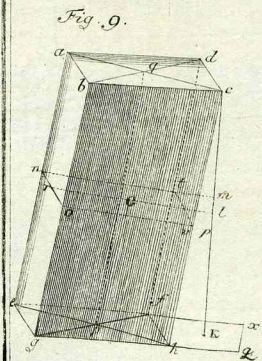
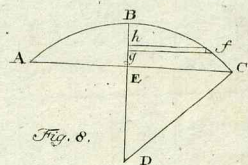
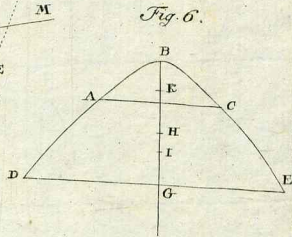
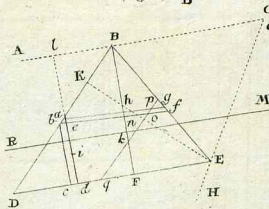
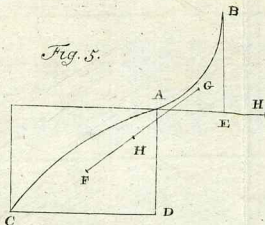
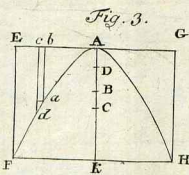
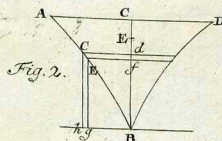
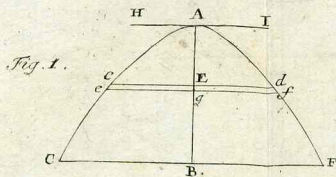


Fig. 18







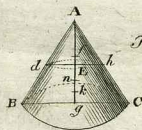


Fig. 1.

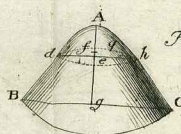


Fig. 2.

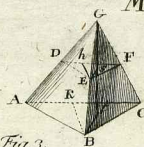


Fig. 3.

Fig. 6.

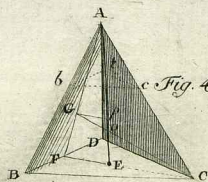
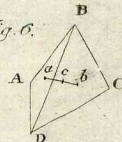


Fig. 4.

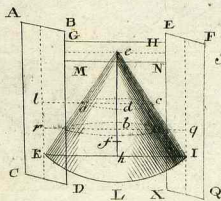


Fig. 5.

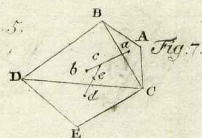


Fig. 7.

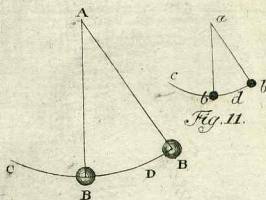


Fig. 11.

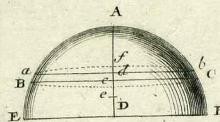


Fig. 8.

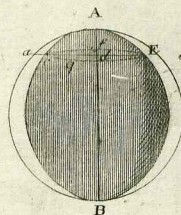


Fig. 10.

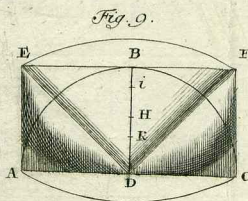


Fig. 9.

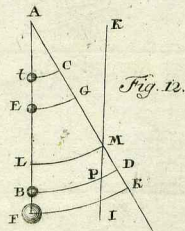


Fig. 12.

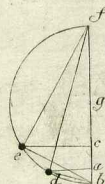


Fig. 14.

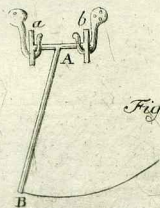


Fig. 13.

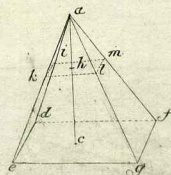


Fig. 15.

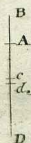


Fig. 16.



Fig. 1.

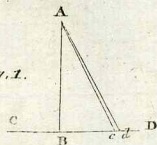


Fig. 2.

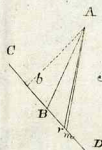


Fig. 3.

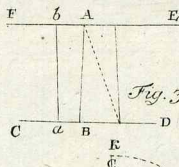


Fig. 4.

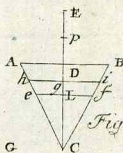


Fig. 5.

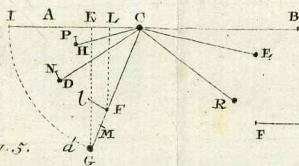


Fig. 6.

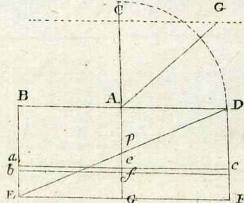


Fig. 11.

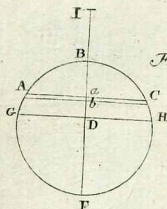


Fig. 7.

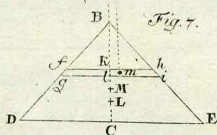


Fig. 8.

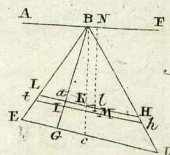


Fig. 10.

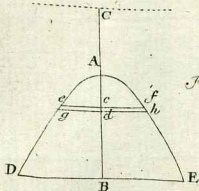


Fig. 9.

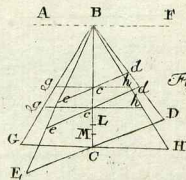


Fig. 12.

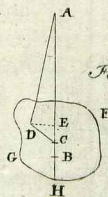


Fig. 13.

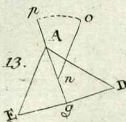


Fig. 14.

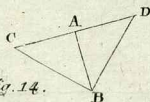


Fig. 15.

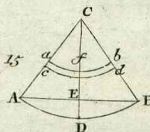




Fig. 1.

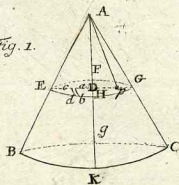


Fig. 2.

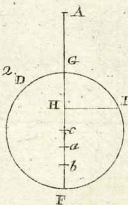


Fig. 3.

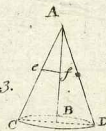


Fig. 4.

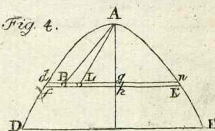


Fig. 5.

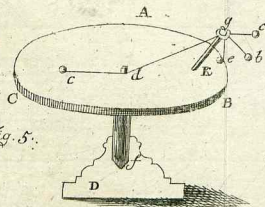


Fig. 6.

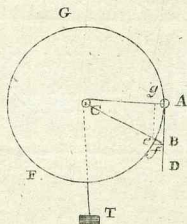


Fig. 7.

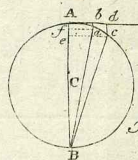


Fig. 8.

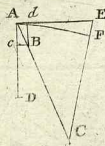


Fig. 9.

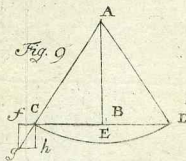


Fig. 10.

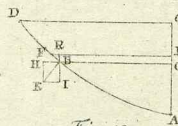


Fig. 12.

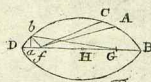


Fig. 11.

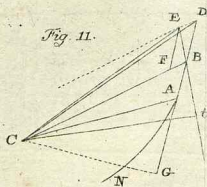


Fig. 13.

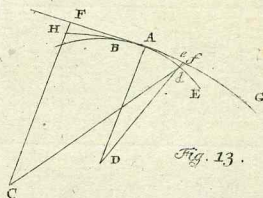


Fig. 16.

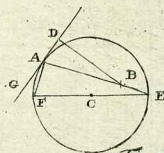


Fig. 15.

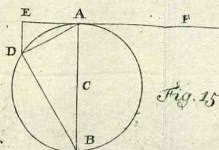
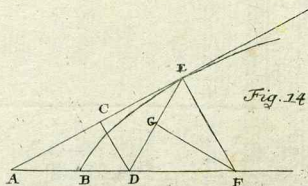


Fig. 14.





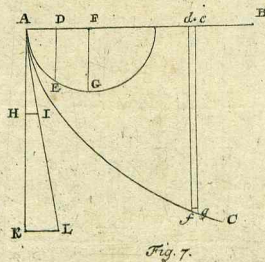
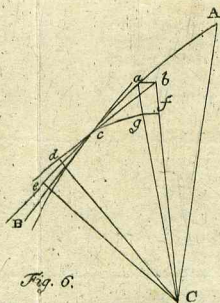
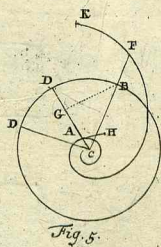
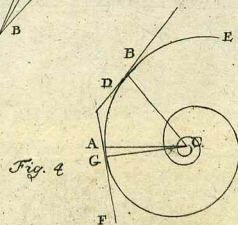
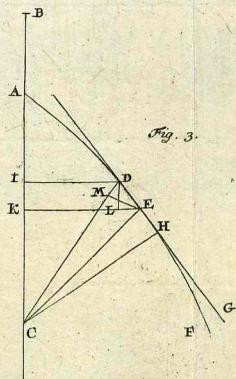
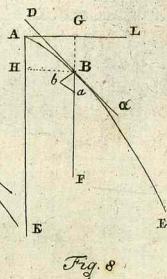
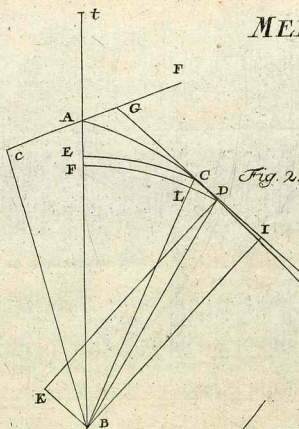
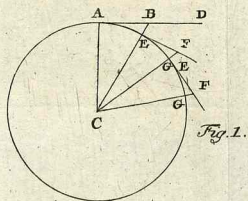




Fig. 4.

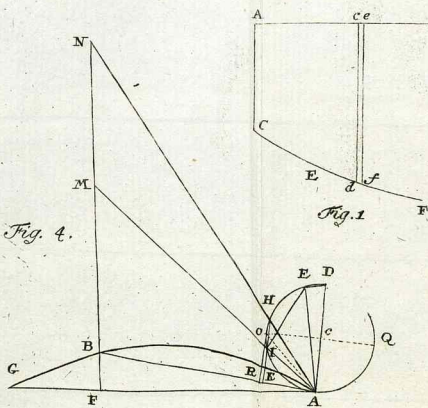


Fig. 1

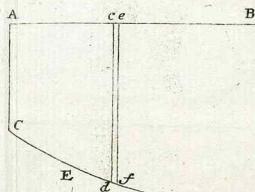


Fig. 2.

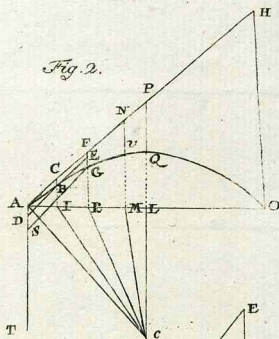


Fig. 3.

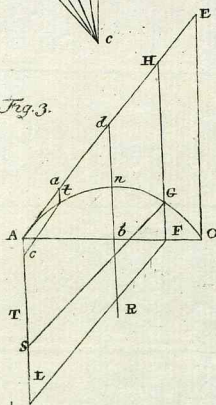


Fig. 5.

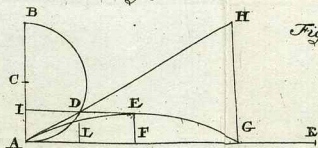


Fig. 7.

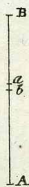


Fig. 6.

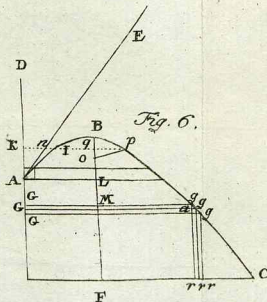


Fig. 8.

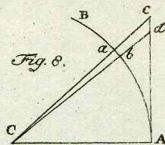
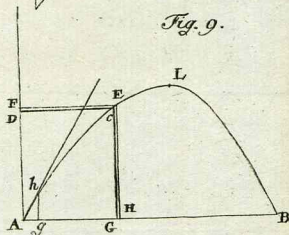


Fig. 9.





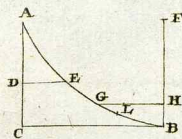


Fig. 1.

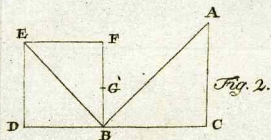


Fig. 2.

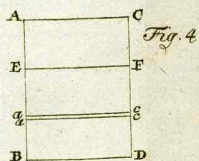


Fig. 4.

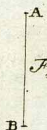


Fig. 3.

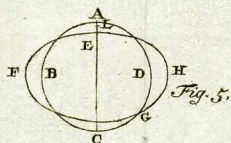


Fig. 5.



Fig. 6.

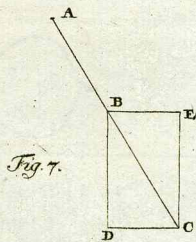


Fig. 7.

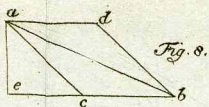


Fig. 8.

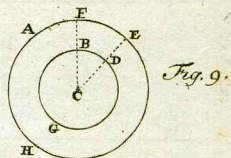


Fig. 9.

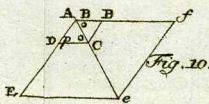


Fig. 10.

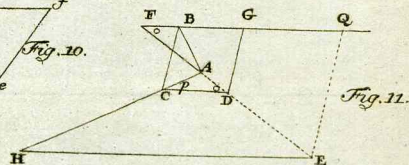


Fig. 11.

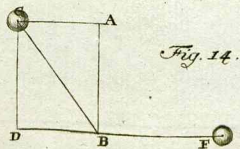


Fig. 14.

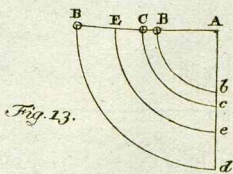


Fig. 13.

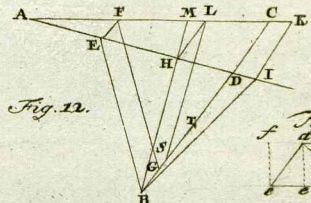


Fig. 12.

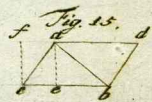


Fig. 15.



Fig. 1.

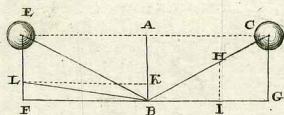


Fig. 2.

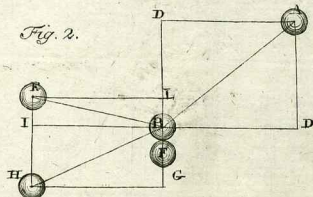


Fig. 3. N^o 1.

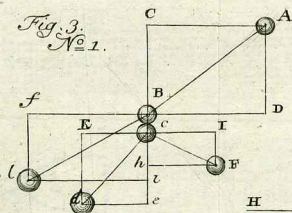


Fig. 3. N^o 2.

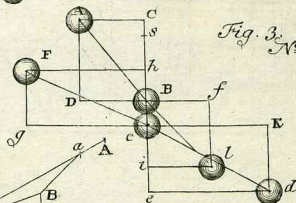


Fig. 7.

Fig. 4. N^o 1.

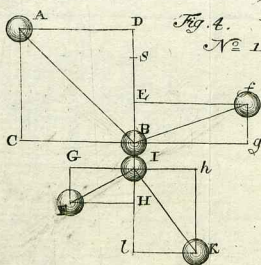


Fig. 4. N^o 2.

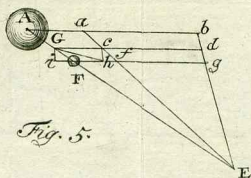
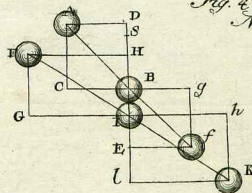


Fig. 5.

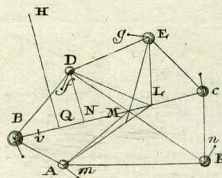


Fig. 6.



Fig. 1.

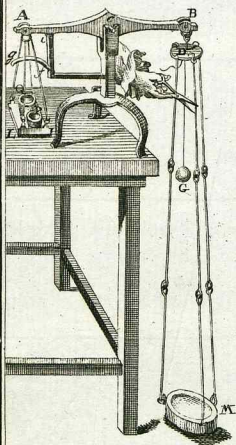


Fig. 2.

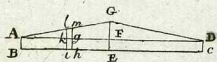


Fig. 10.

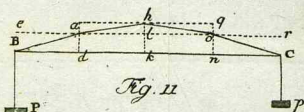
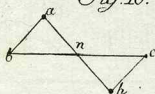


Fig. 11

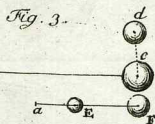


Fig. 3.



Fig. 5.

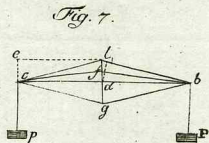


Fig. 7.

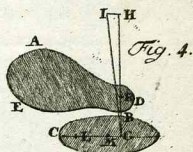


Fig. 4.



Fig. 6.

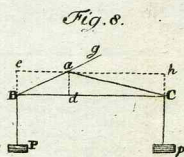


Fig. 8.

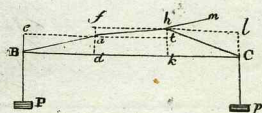


Fig. 9.

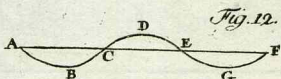


Fig. 12.

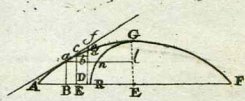


Fig. 13.







