

Digitaliseret af | Digitised by



**DET KGL.
BIBLIOTEK**

Royal Danish Library

Forfatter(e) | Author(s):

Titel | Title:

Bindbetegnelse | Volume Statement:

Udgivet år og sted | Publication time and place:

Fysiske størrelse | Physical extent:

Eukleides.; oversat af Thyra Eibe ; med en
Indledning af H. G. Zeuthen

Euklids Elementer.

Vol. 1-2

København : Gyldendal, 1897-1912

3 bd. :

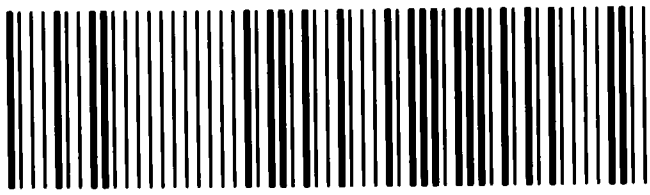
DK

Værket kan være ophavsretligt beskyttet, og så må du kun bruge PDF-filen til personlig brug. Hvis ophavsmanden er død for mere end 70 år siden, er værket fri af ophavsret (public domain), og så kan du bruge værket frit. Hvis der er flere ophavsmænd, gælder den længstlevendes dødsår. Husk altid at kreditere ophavsmanden.

UK

The work may be copyrighted in which case the PDF file may only be used for personal use. If the author died more than 70 years ago, the work becomes public domain and can then be freely used. If there are several authors, the year of death of the longest living person applies. Always remember to credit the author

DET KONGELIGE BIBLIOTEK



130016917754

EUKLIDS ELEMENTER

I—II

OVERSAT AF

THYRA EIBE

CAND. MAG.

MED EN INDLEDNING AF PROF., DR. H. G. ZEUTHEN



KØBENHAVN

GYLDENDALSKE BOGHANDELS FORLAG (F. HEGEL & SØN)

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (M. A. HANNOVER)

1897



FORORD.

Ved denne Oversættelse af Euklids to første Bøger har jeg nøje fulgt den nyeste græske Udgave (ved Heiberg 1883); kun har jeg indført Plustegn, Lighedstegn og Tegn for Vinkel, Trekant, Parallelogram, Rektangel og Kvadrat. Dette strider dog ikke mod den græske Form, da Euklid ogsaa bruger Forkortelser. Saaledes hedder f. Eks. Vinkelen ABC paa Græsk $\epsilon\iota\pi\acute{o}\ AB\Gamma$ (udeladt $\gamma\omega\nu\iota\alpha$). Desuden har jeg ligesom Professor Heiberg i den latinske Oversættelse i anden Bog tilføjet de til de geometriske Sætninger svarende algebraiske Formler.

IV

Til Slut vil jeg takke Professorerne H. G. Zeuthen og J. L. Heiberg samt Docent A. B. Drachmann for den gode Hjælp, jeg har faaet af dem under Arbejdet.

Kjøbenhavn, d. 15de Maj 1897.

Thyra Eibe.

INDLEDNING.

Mathematikeren Euklid levede og virkede omtrent 300 Aar før Chr. i Alexandria, som den Gang var Midtpunktet for Grækernes aandelige Liv, og hvor lærelystne Ynglinge samledes fra de mange Egne, hvor det græske Folk havde nedsat sig. Han har givet yderst værdifulde Bidrag til sit Fags videre Udvikling; men fremfor alt mindes han som den, der har samlet sin Tids elementære Mathematik til en sammenhængende Lærebygning. Det er denne, som indeholdes i hans af 13 Bøger bestaaende Værk: *Euklids Elementer*.

Ved sine omfattende Synsmaader og ved den Fuldstændighed og store Nøjagtighed, hvormed disse vare gennemførte, fortrængte Euklids sikre Tankebygning snart alle Arbejder i lig-

VI

nende Retning af Forgængere, som sikkert i mange Henseender have forberedt Stoffet for Euklid, men paa hvem man nu kun kjender nogle Navne. Saalænge Mathematiken vedblev at blomstre hos Grækerne, var det Euklids Elementer, som lagdes til Grund, og fra hvilke alle videregaaende Undersøgelser toge deres Udgangspunkt. Dette Værk har spillet samme Rolle paa de Steder, hvortil den græske Mathematik senere har forplantet sig, hos Araberne i Middelalderen og hos den nyere Tids Europæere. Endnu i de Aarhundreder, som gaa nærmest forud for vort, søgte de største Mathematikere, f. Eks. Newton, tilbage til Euklid for at finde en fast Grundvold for Arbejder, der række langt ud over de Omraader, som Grækerne betraadte. Netop derved opnaaede man selv at blive forstaaet, thi Euklid var alles fælles Læremester. Ja der er endnu Lande, hvor man den Dag i Dag bruger hans Elementer som Lærebog.

Kan der end indvendes adskilligt mod dette sidste — og jeg kunde levere mit Bidrag til disse Indvendinger — saa fortjene Euklids Elementer dog at kendes af enhver, som interesserer sig for Mathematik. I dem se vi, hvilken Skikkelse dette Fag havde hos det Folk, der først gjorde

VII

det til en Videnskab. Hans Behandling giver os Nøglen til den rette Forstaaelse af de Arbejder, som i de efterfølgende 2000 Aar have haft hans Elementer til Grundlag. Meget saavel af den almindelige Opfattelse som af Enkeltheder er ogsaa gaaet over i Nutidens Lærebøger. Det er af Betydning hos Euklid at se dette i dets oprindelige Sammenhæng, som kan forklare meget, som ellers vilde synes tilfældigt. Særlig dette Hensyn vil gøre Kendskab til Euklid frugtbringende for Lærere.

Af alle disse Grunde kræver vort Universitet ved sin Skoleembedseksamen Kendskab til Euklids Elementer. I Overensstemmelse hermed har jeg i min udgivne »Forelæsning over Mathematikens Historie. (Oldtid og Middelalder)« lagt en særlig stor Vægt paa at forklare dette Skrift, dets Synsmaader og Fremstillingsform og disses Sammenhæng med den hele matematiske Udvikling, og jeg har paa mange Steder henvist til Enkeltheder, som maa ses efter hos Euklid selv. Derfor maa jeg ønske hans Værk i Hænderne ej blot paa de matematiske Studerende, men paa alle dem, som læse min Bog. At mange med Udbytte ville læse Euklid, er iøvrigt ikke tvivlsomt i vort Land, hvor der ikke blot er en

VIII

ret udbredt Interesse for Mathematiken, men hvor man tillige i store Kredse med Held har forsøgt at give den indledende Undervisning i dette Fag en historisk Form.

Trods de mange Tilsætninger og Smaaændringer, svarende til de vekslende Tiders Krav, for hvilke en saa anvendt Bog har været udsat allerede i Oldtiden, kjendes »Elementernes« oprindelige Tekst ret godt. I den paalideligste Skikkelse fremtræder den i vor Landsmand, Prof. J. L. Heibergs nye Udgave, i hvilken de sagkyndige i alle Lande med Tillid søge deres Oplysninger, og som ved sin skarpe Skelnen mellem ægte og uægte har ydet væsentlige Bidrag til at retlede Forstaaelsen af Mathematiken paa Euklids Tid. Den græske Tekst er vel i denne Udgave ledsaget af en latinsk Oversættelse; men selv paa dette Sprog er den utilgængelig for mange af dem, der vilde have størst Udbytte af Indholdet. Dette Indhold er godt og betydeligt nok til at læses i *vort* Modersmål ogsaa af dem blandt os, der forstaa Latin og til Nød kunne arbejde sig gennem lidt Græsk.

Det er derfor en god Tanke af Frøken Eibe at have begyndt en dansk Oversættelse af

IX

Euklids Elementer efter Heibergs Udgave. Den nu foreliggende Del af hendes Oversættelse tilfredsstiller alle Fordringer til Nøjagtighed og er udført med den bedst mulige filologiske Bistand.

Mærkelig nok har det endog været muligt at gengive en enkelt, hyppig tilbagekommende og derfor betydningsfuld Vending rigtigere paa Dansk, end det kan ske paa Latin. Man vil nemlig se, at selv i de saakaldte Problemer, hvor en eller anden Figur ønskes konstrueret (som i 1, 2, 3, 9, 10 o. s. v. i 1ste Bog), Konstruktionen kun angives med følgende Udtryk: Lad den og den Linie *være* tegnet, det og det Punkt *være* taget. Dette stemmer med den græske Sprogform, medens Latinen kun har kunnet gengive dem, som om der stod: »Lad Linien *blive* tegnet, Punktet *blive* taget,« eller simplere: »Man tegne, tage« eller: »Tegn, tag« altsaa som Forskrifter. Idet nu Euklid i den nyere Tid først er udbredt i latinske Oversættelser, er man i Almindelighed kommen til i hans Problem at se det samme som i de nuværende Konstruktionsopgaver. Om end denne Opfattelse ikke er helt urigtig, overses dog derved et Hovedformaal for de Gamles Problemer, nemlig

det at tjene til *Bevis* for, at visse Figurer ere mulige i Almindelighed, eller for at de udtrykkelig angivne Betingelser for deres Mulighed ere tilstrækkelige. At Problemerne netop have denne Betydning i den græske Mathematik har jeg tidligere andensteds paavist, men det er Frøken Eibes danske Oversættelse, som allerede før den blev trykt, har baaret den Frugt at gøre mig opmærksom paa, at Euklids egen Udtryksmaade stemmer med min Opfattelse, idet Euklid ikke fremsætter sine Konstruktioner i Regler, hvorefter noget *skal* udføres, men mere som noget, der udføres for at faa noget at vide. Samme Udtryksmaade bruges i de Konstruktioner, som anvendes i Beviserne for de egentlige Læresætninger; men ved dem har den mangelfulde latinske Gengivelse ikke kunnet hidføre nogen Misforstaaelse.

Det er endnu kun de 2 første Bøger af Elementerne, som udkomme paa Dansk. I den første vil man, skønt Euklids Udtryksmaade i Indledningen er langt mindre fuldstændig end i hans Sætninger og Beviser, genkende de samme geometriske Begreber, som vi nu behandle, og i selve Bogen vil man beundre den Sikkerhed hvormed hver Sten i Bygningen føjes ind, før

XI

der skal bygges videre paa den. I anden Bog faar man en Forestilling om den geometriske Form, som Grækerne gav saadanne Undersøgelser, som vi nu henregne til Algebra, og i hvilke de naaede op til Ligninger af anden Grad. Jeg haaber, at disse to Bøger skulle slaa saa godt an, at hverken Oversætterinden eller Gyldendalske Boghandel vil betænke sig paa at gaa videre. Først da vil Oversættelsen faa hele den Betydning, som jeg her har tilagt den.

Kjøbenhavn, den 15de Maj 1897.

H. G. Zeuthen.

I.

Definitioner.

1. Et Punkt er det, som ikke kan deles.
2. En Linie er en Længde uden Bredde.
3. En Linies Grænser ere Punkter.
4. En ret Linie er en Linie, som ligger *lige* mellem Punkterne paa den.
5. En Flade er det, som kun har Længde og Bredde.
6. En Flades Grænser ere Linier.
7. En plan Flade er en Flade, som ligger *lige* mellem de rette Linier i den.
8. En plan Vinkel er Heldningen mellem to Linier, som ligge i samme Plan, have et Punkt fælles og ikke ligge paa ret Linie.
9. Naar de Linier, der indeslutte Vinkelen ere rette, kaldes Vinkelen retlinet.

10. Naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret; og den Linie, der er oprejst paa den anden, kaldes lodret paa den anden.

11. En stump Vinkel er en, som er større end en ret.

12. En spids Vinkel er en, som er mindre end en ret.

13. Omkreds er Grænsen for noget.

14. En Figur er det, som indesluttet af en eller flere Omkredse.

15. En Cirkel er en plan Figur, indesluttet af een saadan Linie (som kaldes Periferien), at alle de rette Linier, der kunne drages ud til den fra eet indenfor Figuren liggende Punkt, ere indbyrdes ligestore.

16. Dette Punkt kaldes Centrum i Cirkelen.

17. En Diameter i Cirkelen er en ret Linie, trukken gennem Centrum og begrænset til begge Sider af Cirkelperiferien; den halverer ogsaa Cirkelen.

18. En Halvcirkel er en Figur, som indesluttet af en Diameter og den af Diameteren

afskaarne Periferi. Halvcirkelens Centrum er det samme som Cirkelens.

19. Retlinede Figurer ere saadanne, som indesluttet af rette Linier: tresidede, som indesluttet af tre, firsidede af fire, flersidede af flere end fire rette Linier.

20. Af tresidede Figurer kaldes den, der har alle tre Sider ligestore, en ligesidet, den som kun har to Sider ligestore, en ligebenet, og den, som har alle tre Sider uligestore, en skæv Trekant.

21. Af tresidede Figurer kaldes endvidere den, som har en ret Vinkel, en retvinklet, den, som har en stump Vinkel, en stumpvinklet, den, som har alle tre Vinkler spidse, en spidsvinklet Trekant.

22. Af firsidede Figurer kaldes den, som baade er ligesidet og retvinklet, et Kvadrat, den som er retvinklet, men ikke ligesidet, et Rektangel, den som er ligesidet, men ikke retvinklet, en Rhombe, den som har baade modstaaende Sider og Vinkler ligestore, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en Rhomboide; de øvrige Firsider kunne kaldes Trapezer.

23. Parallele ere de rette Linier, som ligge i samme Plan og, naar de forlænges ubegrænset til begge Sider, ikke mødes til nogen af Siderne.

Forudsætninger.

Lad det være forudsat:

1. At man kan trække en ret Linie fra et hvilket som helst Punkt til et hvilket som helst Punkt.
2. At man kan forlænge en begrænset ret Linie i ret Linie ud i eet.
3. At man kan tegne en Cirkel med et hvilket som helst Centrum og en hvilken som helst Radius.
4. At alle rette Vinkler ere ligestore.
5. At, naar en ret Linie skærer to rette Linier, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere mindre end to rette, saa mødes de to Linier, naar de forlænges ubegrænset, paa den Side, hvor de to Vinkler ligge, der ere mindre end to rette.

Almindelige Begreber.

1. Størrelser, som ere ligestore med den samme, ere indbyrdes ligestore.
2. Naar ligestore Størrelser lægges til ligestore Størrelser, ere Summerne ligestore.

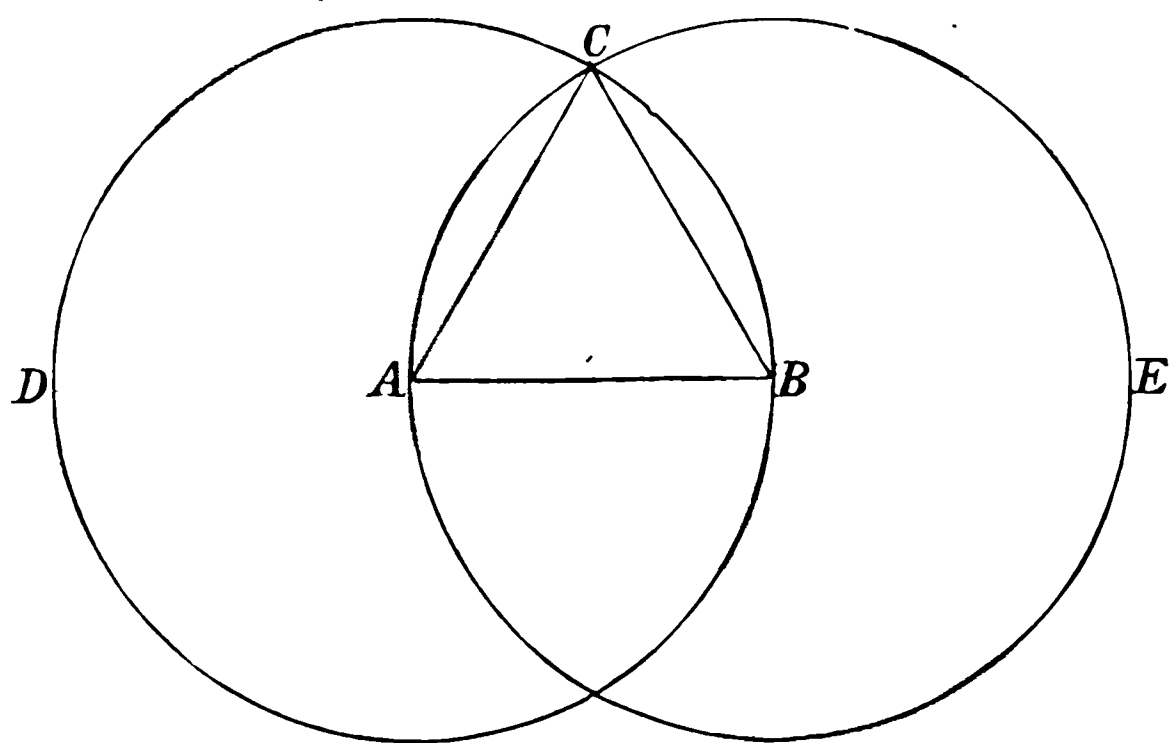
3. Naar ligestore Størrelser trækkes fra ligestore Størrelser, ere Resterne ligestore.

4. Størrelser, der kunne dække hverandre, ere indbyrdes ligestore.

5. Det hele er større end en Del af det.

I.

At konstruere en ligesidet Trekant paa en given begrænset ret Linie.



Lad AB være den givne begrænsede rette Linie. Man skal da konstruere en ligesidet Trekant paa den rette Linie AB.

Lad Cirkel BCD være tegnet med A som Centrum og AB som Radius og tillige Cirkel ACE med B som Centrum og BA som Radius, og lad de rette Linier CA og CB være dragne fra Cirklernes Skæringspunkt C til Punkterne A og B.

Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel CDB, er $AC = AB$. Da endvidere Punkt B er Centrum i Cirkel CAE, er $BC = BA$. Men det blev ogsaa bevist, at CA er lig AB. Altsaa er baade CA og CB lig AB. Men Størrelser, der ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er $CA = CB$. Altsaa ere de tre rette Linier CA, AB og BC indbyrdes ligestore.

Altsaa er $\triangle ABC$ ligesidet, og den er konstrueret paa den givne begrænsede rette Linie AB; hvilket skulde gøres.

2.

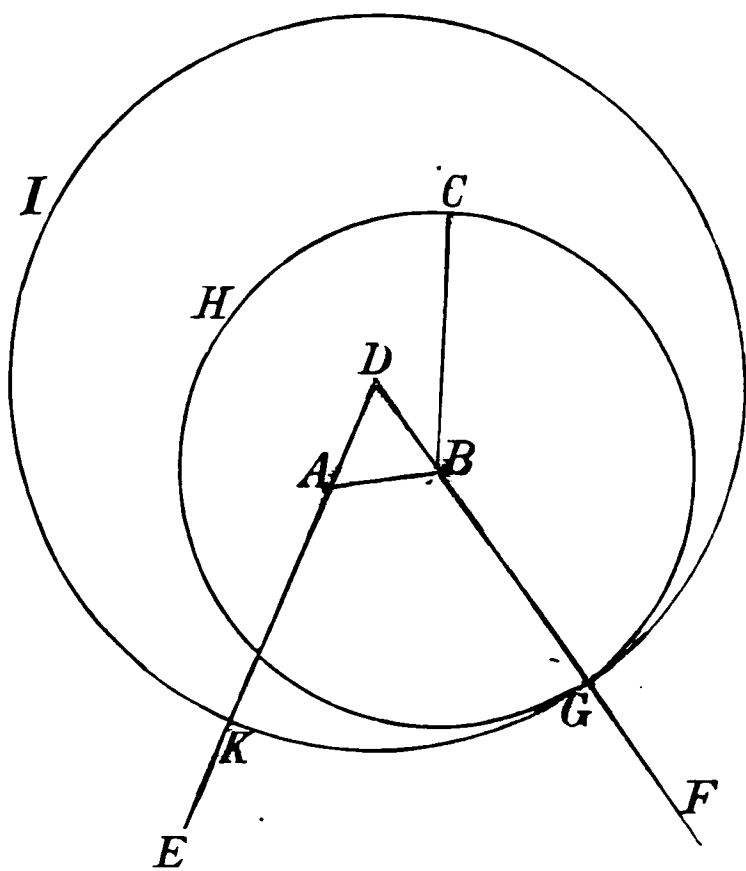
Ud fra et givet Punkt at afsætte en ret Linie lig en given ret Linie.

Lad A være det givne Punkt og BC den givne rette Linie. Man skal da ud fra det givne Punkt A afsætte en ret Linie lig den givne rette Linie BC.

Lad nemlig en ret Linie AB være dragen fra Punkt A til Punkt B, lad der paa den være konstrueret en ligesidet Trekant DAB, lad de rette Linier AE og BF være afsatte i Forlængelse af DA og DB, lad Cirkel CGH være tegnet med B som Centrum og BC som Radius, og

lad Cirkel GIK være tegnet med D som Centrum og DG som Radius.

Da nu Punkt B er Centrum i Cirkel CGH, er $BC = BG$. Da endvidere Punkt D er Centrum i Cirkel GIK, er $DK = DG$; og paa dem ere Stykkerne DA og DB ligestore; altsaa er Resten AK lig Resten BG. Men det blev ogsaa bevist, at BC er lig BG. Altsaa er baade AK og BC lig BG. Men Størrelser, som ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er $AK = BC$.



Altsaa er der ud fra det givne Punkt A afsat en ret Linie AK lig den givne rette Linie BC; h. s. g.

3.

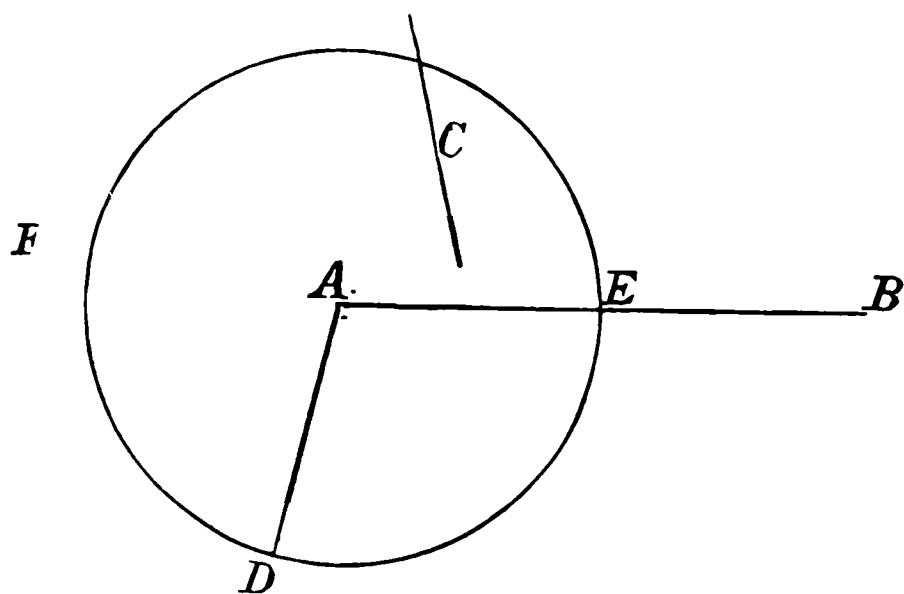
Paa den største af to givne uligestore rette Linier at afskære en ret Linie lig den mindste.

Lad AB og C være de to givne uligestore rette Linier, og lad AB være den største af

dem. Man skal da paa den største AB afskære en ret Linie lig den mindste C.

Lad AD være afsat ud fra Punkt A lig den givne rette Linie C, og lad Cirkel DEF

være tegnet med A som Centrum og AD som Radius.



Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel DEF, er $AE = AD$. Men C er ogsaa lig AD. Altsaa er

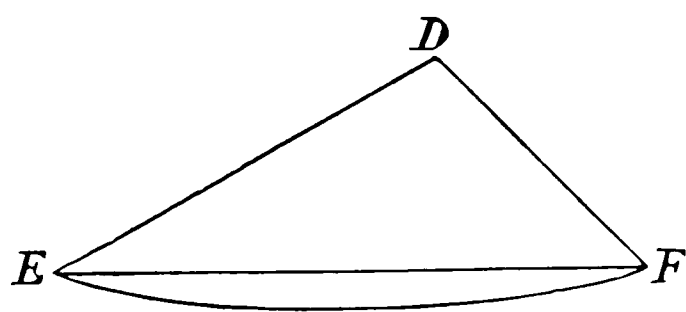
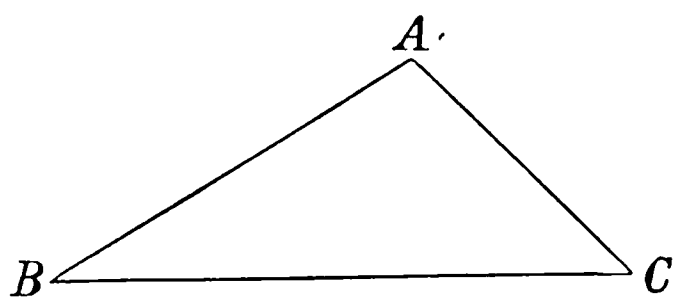
baade AE og C lig AD. Altsaa er $AE = C$.

Altsaa er der paa den største AB af to givne uligestore rette Linier AB og C afskaaret AE lig den mindste C; h. s. g.

4.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og de Vinkler, der indesluttet af de ligestore rette Linier, ligestore, saa ville de ogsaa have Grundlinierne ligestore, og Trekanterne ville være ligestore, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF , nemlig $AB = DE$ og $AC = DF$, og hvor $\angle BAC$ er lig $\angle EDF$. Jeg siger da: at Grundlinie BC vil være lig Grundlinie EF , at $\triangle ABC$ vil være lig $\triangle DEF$, og at de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore, $\angle ABC = \angle DEF$ og $\angle ACB = \angle DFE$.



Naar nemlig $\triangle ABC$ lægges paa $\triangle DEF$, idet Punkt A anbringes i Punkt D og den rette Linie AB paa den rette Linie DE , saa vil Punkt B træffe i E , fordi AB er lig DE . Men naar AB dækker DE , saa vil den rette Linie AC falde paa den rette Linie DF , fordi $\angle BAC$ er lig $\angle EDF$. Følgelig vil her Punkt C træffe i Punkt F , fordi AC er lig DF . Men B traf jo i E ; følgelig vil Grundlinie BC dække Grundlinie EF . Thi hvis Grundlinie BC ikke dækker EF , naar B træffer i E og C i F , saa ville to rette Linier

indeslutte et Rum; og det er umuligt. Altsaa vil Grundlinie BC dække EF og være lig med den. Følgelig vil hele $\triangle ABC$ dække hele $\triangle DEF$ og være lig med den; og de øvrige Vinkler ville dække de øvrige Vinkler og være lig med dem, $\angle ABC = \angle DEF$ og $\angle ACB = \angle DFE$.

Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og de Vinkler, der indesluttet af de ligestore rette Linier, ligestore, saa ville de ogsaa have Grundlinierne ligestore, og Trekanterne ville være ligestore, og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore; hvilket skulde bevises.

5.

I en ligebenet Trekant ere Vinklerne ved Grundlinien ligestore; og, naar de ligestore rette Linier ere forlængede, ville Vinklerne under Grundlinien være ligestore.

Lad ABC være en ligebenet Trekant, hvor Side AB er lig Side AC, og lad de rette Linier BD og CE være afsatte i Forlængelse af AB og AC. Jeg siger da: $\angle ABC = \angle ACB$, og $\angle CBD = \angle BCE$.

Lad der nemlig paa BD være taget et vilkaarligt Punkt F, lad der paa den største AE, være afskaaret $AG = AF$, og lad de rette Linier FC og GB være dragne.

Da nu AF er lig AG og AB er lig AC, saa ere de to Sider FA og AC parvis lig de to Sider GA og AB;

og de indeslutte den fælles Vinkel FAG;

altsaa vil Grundlinie FC være lig Grundlinie GB;

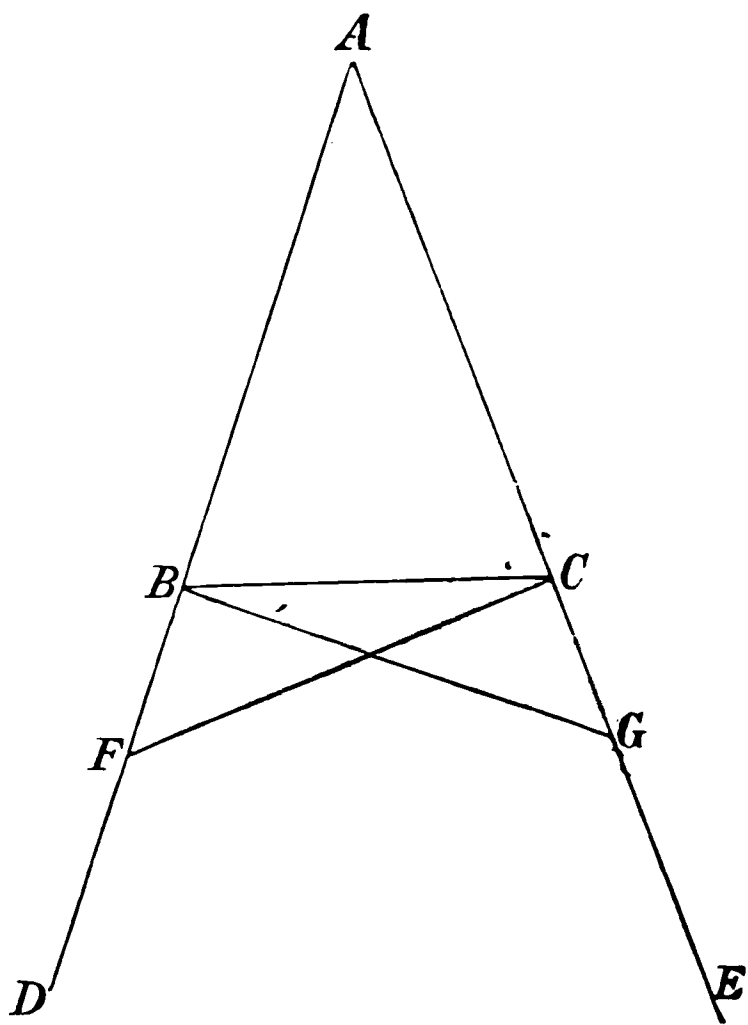
$\triangle AFC$ vil være lig $\triangle AGB$; og de øv-

rige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Si-

der ligge, ville være parvis ligestore, nem-

lig $\angle ACF = \angle ABG$ og $\angle AFC = \angle AGB$.

Og da hele AF er lig hele AG og paa dem igen AB er lig AC, saa er Resten BF lig Resten CG. Men det blev ogsaa bevist, at FC er lig GB. Altsaa ere de to Sider BF og FC parvis lig de to Sider CG og GB; desuden er $\angle BFC$ lig $\angle CGB$; og deres Grundlinie BC er fælles; altsaa vil $\triangle BFC$ være lig $\triangle CGB$, og de øvrige



Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore. Altsaa er $\angle FBC = \angle GCB$, og $\angle BCF = \angle CBG$. Da det nu blev bevist, at hele $\angle ABG$ er lig hele $\angle ACF$, og af dem igen $\angle CBG$ er lig $\angle BCF$, saa er Resten $\angle ABC$ lig Resten $\angle ACB$. Og de ligge ved $\triangle ABC$'s Grundlinie. Men det blev tillige bevist, at $\angle FBC$ er lig $\angle GCB$. Og de ligge under Grundlinien.

Altsaa: i en ligebenet Trekant ere Vinklerne ved Grundlinien ligestore; og naar de ligestore rette Linier ere forlængede, ville Vinklerne under Grundlinien være ligestore; h. s. b.

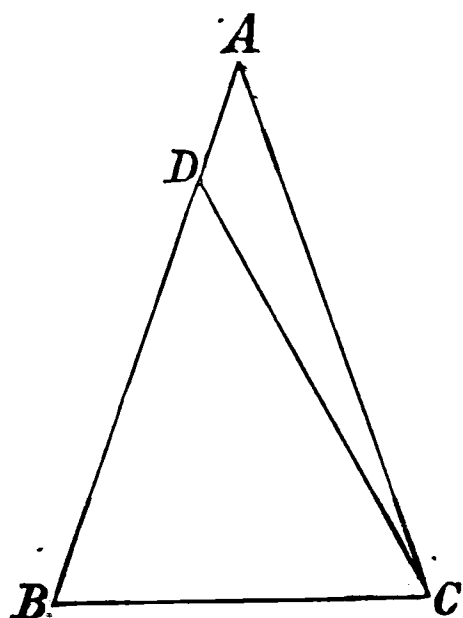
6.

Naar to Vinkler i en Trekant ere ligestore, ville ogsaa de Sider, der ligge overfor de ligestore Vinkler, være ligestore.

Lad ABC være en Trekant, hvor $\angle ABC$ er lig $\angle ACB$. Jeg siger da, at Side AB er lig Side AC .

Thi hvis AB og AC ere uligestore, er en af dem størst. Lad AB være størst, lad der paa den største AB være afskaaret Stykket DB lig den mindste AC , og lad DC være dragen.

Da nu DB er lig AC, og BC er fælles, saa ere de to Sider DB og BC parvis lig de to Sider AC og CB; desuden er $\angle DBC = \angle ACB$; altsaa er Grundlinie DC lig Grundlinie AB, og $\triangle DBC$ vil være lig $\triangle ACB$, en mindre lig en større; hvilket er umuligt. Altsaa er AB og AC ikke uligestore. Altsaa er $AB = AC$.



Altsaa: naar to Vinkler i en Trekant ere ligestore, ville ogsaa de Sider, der ligge overfor de ligestore Vinkler, være ligestore; h. s. b.

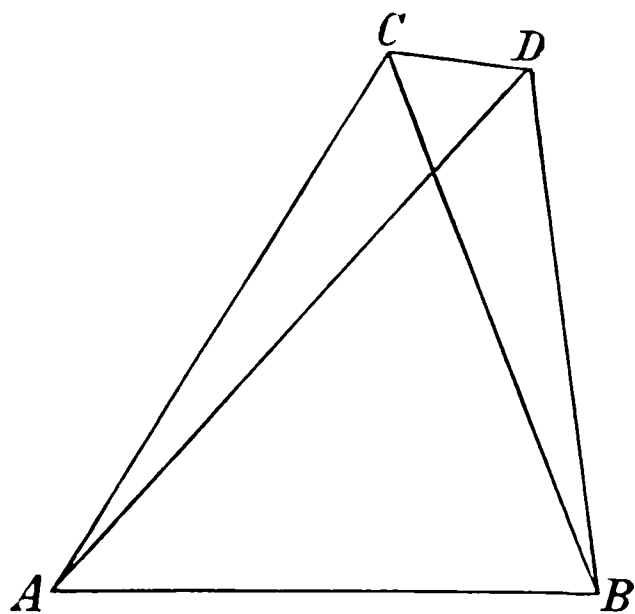
7.

Naar der fra en ret Linies Endepunkter er konstrueret to rette Linier til eet Punkt, kan man ikke fra de samme Endepunkter konstruere to andre rette Linier, parvis lig de første, til et andet Punkt paa samme Side af Linien.

Thi hvis det er muligt, saa lad der fra den rette Linie AB's Endepunkter være konstrueret to rette Linier AC og CB til eet Punkt C og desuden fra de samme Endepunkter to andre rette Linier AD og DB parvis lig de første

til et andet Punkt D paa samme Side, nemlig $DA = CA$ fra samme Endepunkt A , og $DB = CB$ fra samme Endepunkt B , og lad CD være dragen.

Da nu AC er lig AD , er $\angle ACD$ lig $\angle ADC$. Altsaa er $\angle ADC$ større end $\angle DCB$. Altsaa er $\angle CDB$ meget større end $\angle DCB$.



Paa den anden Side: da CB er lig DB , er $\angle CDB = \angle DCB$. Men det blev ogsaa bevist, at den er meget større; og det er umuligt.

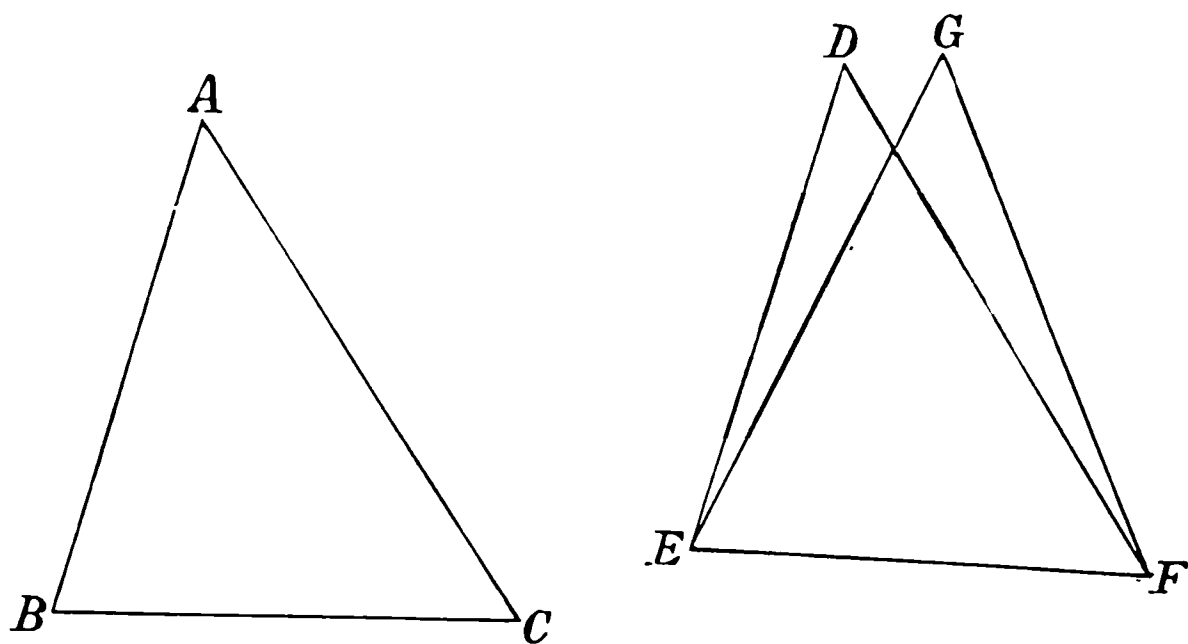
Altsaa: naar der fra en ret Linies Endepunkter er konstrueret to rette Linier til eet Punkt, kan man ikke fra de samme Endepunkter konstruere to andre rette Linier, parvis lig de første, til et andet Punkt paa samme Side af Linien; h. s. b.

8.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og tillige Grundlinierne ligestore, saa ville de ogsaa have de Vinkler ligestore, som indesluttet af de ligestore rette Linier.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF , nemlig $AB = DE$ og $AC = DF$, og lad dem tillige have Grundlinie BC lig Grundlinie EF . Jeg siger da: $\angle BAC = \angle EDF$.

Thi naar $\triangle ABC$ lægges paa $\triangle DEF$, idet Punkt B anbringes i Punkt E , og den rette



Linie BC lægges paa den rette Linie EF , saa vil Punkt C træffe i F , fordi BC er lig EF . Og naar nu BC dækker EF , saa ville BA og CA ogsaa dække ED og DF . Thi hvis Grundlinie BC dækker Grundlinie EF , mens Siderne BA og AC ikke dække ED og DF , men falde udenfor, f. Ex. i EG og GF , saa vil der fra en ret Linies Endepunkter være konstrueret to rette

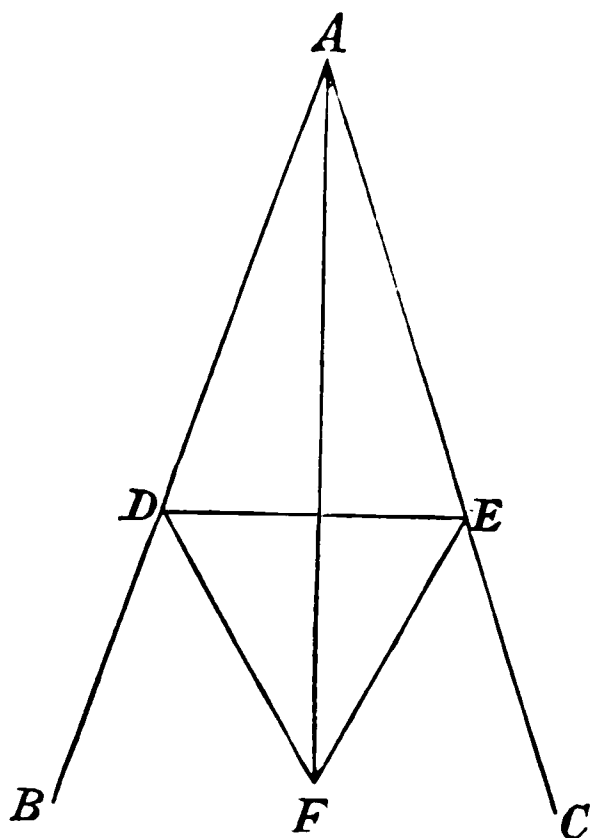
Linier til eet Punkt, og fra de samme Endepunkter to andre rette Linier, parvis lig de første, til et andet Punkt paa samme Side af Linien. Men det kan man ikke. Altsaa, naar Grundlinie BC dækker Grundlinie EF, kunne Siderne BA og AC ikke lade være at dække ED og DF. Altsaa ville de dække dem. Følgelig vil ogsaa $\angle BAC$ dække $\angle EDF$ og være lig med den.

Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore og tillige Grundlinierne ligestore, saa ville de ogsaa have de Vinkler ligestore, som indesluttet af de ligestore rette Linier; h. s. b.

9.

At halvere en given retlinet Vinkel.

Lad BAC være den givne retlinede Vinkel. Man skal da halvere den.



Lad der paa AB være taget et vilkaarligt Punkt D, og lad der paa AC være afskaaret $AE = AD$, lad DE være dragen, lad der paa DE være konstrueret en ligesidet Trekant DEF,

og lad AF være dragen. Jeg siger da, at $\angle BAC$ er halveret af den rette Linie AF.

Thi da AD er lig AE, og AF er fælles, saa ere de to Sider DA og AF parvis lig de to Sider EA og AF; og Grundlinie DF er lig Grundlinie EF; altsaa er $\angle DAF = \angle EAF$.

Altsaa er den givne retlinede Vinkel BAC halveret af den rette Linie AF; h. s. g.

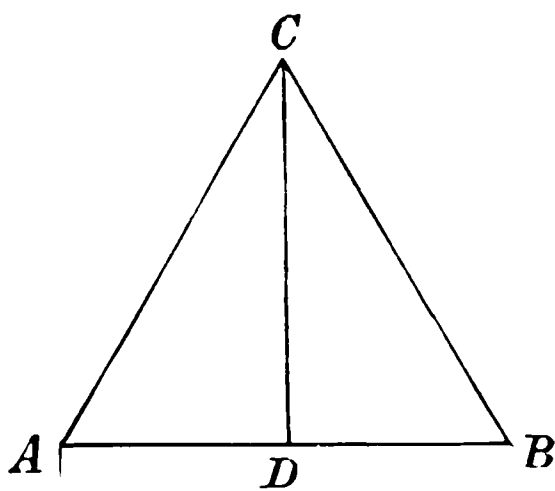
10.

At halvere en given begrænset ret Linie.

Lad AB være den givne begrænsede rette Linie. Man skal da halvere den begrænsede rette Linie AB.

Lad der paa den være konstrueret en ligesidet Trekant ABC, og lad $\angle ACB$ være halveret af den rette Linie CD. Jeg siger da, at den rette Linie AB er halveret i Punkt D.

Thi da AC er lig CB, og CD er fælles, saa ere de to Sider AC og CD parvis lig de to Sider BC og CD; og $\angle ACD$ er lig $\angle BCD$; altsaa er Grundlinie AD lig Grundlinie BD.

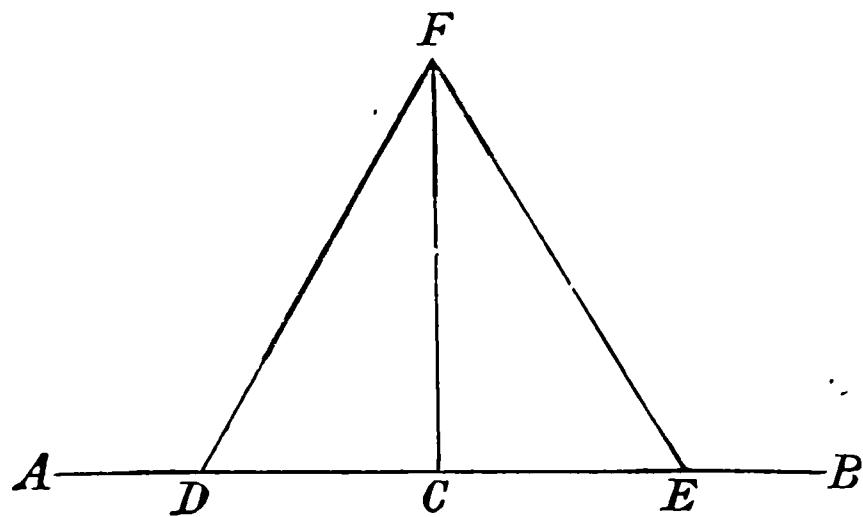


Altsaa er den givne begrænsede rette Linie AB halveret i D; h. s. g.

II.

Fra et givet Punkt paa en given ret Linie at oprejse en ret Linie vinkelret paa den givne.

Lad AB være den givne rette Linie og C det givne Punkt paa den. Man skal da fra Punkt C oprejse en ret Linie vinkelret paa AB.



Lad der være taget et vilkaarligt Punkt D paa AB, lad CE være afsat lig CD, lad der paa DE være konstrueret en ligesidet Trekant FDE, og

lad FC være dragen. Jeg siger da, at fra det givne Punkt C paa den givne rette Linie AB er den rette Linie FC oprejst vinkelret paa AB.

Thi da DC er lig CE, og CF er fælles, saa ere de to Sider DC og CF parvis lig de to Sider EC og CF; og Grundlinie DF er lig Grundlinie FE; altsaa er $\angle DCF = \angle ECF$. Og de ligge ved Siden af hinanden. Men naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de

ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret. Altsaa ere begge Vinklerne DCF og FCE rette.

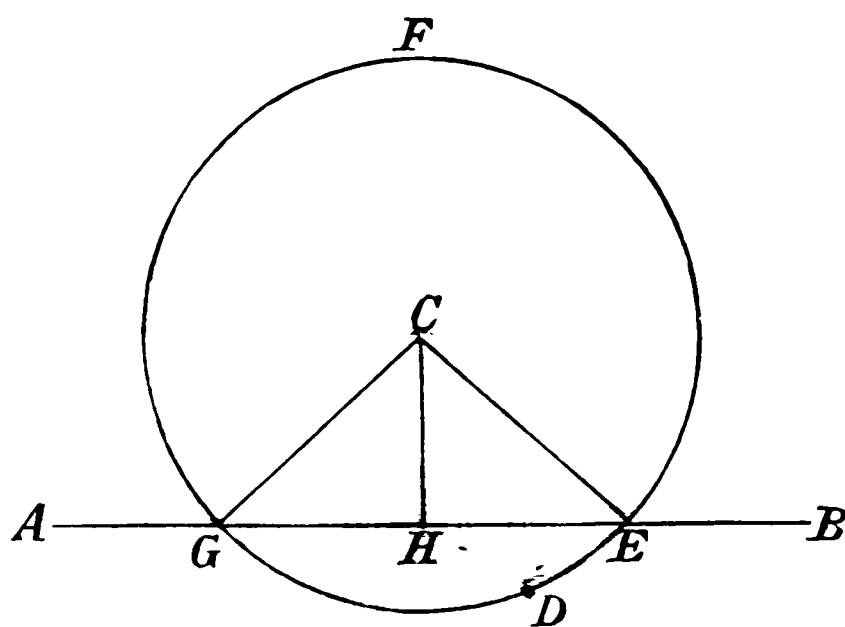
Altsaa er der fra det givne Punkt C paa den givne rette Linie AB oprejst den rette Linie CF vinkelret paa AB; h. s. g.

12.

Fra et Punkt udenfor en given ubegrænset ret Linie at nedfælde en ret Linie lodret paa den givne.

Lad AB være den givne ubegrænsede rette Linie og C det givne Punkt udenfor den. Man skal da fra det givne Punkt C udenfor den givne ubegrænsede rette Linie AB nedfælde en ret Linie lodret paa AB.

Lad der nemlig paa den anden Side af den rette Linie AB være taget et vilkaarligt Punkt D, lad Cirkel EFG være tegnet med C som Centrum og CD som Radius, lad den rette Linie EG være halveret i H, og lad de rette Linier CG, CH og



CE være dragne. Jeg siger da, at der fra det givne Punkt C udenfor den givne ubegrænsede rette Linie AB er nedfældet den rette Linie CH lodret paa AB.

Thi da GH er lig HE, og HC er fælles, saa ere de to Sider GH og HC parvis lig de to Sider EH og HC; og Grundlinie CG er lig Grundlinie CE; altsaa er $\angle CHG = \angle EHC$. Og de ligge ved Siden af hinanden. Men naar en ret Linie er oprejst paa en anden, saa at de ved Siden af hinanden liggende Vinkler blive ligestore, er enhver af de ligestore Vinkler ret; og den Linie, der er oprejst paa den anden, kaldes lodret paa den anden.

Altsaa er der fra det givne Punkt C udenfor den givne ubegrænsede rette Linie AB nedfældet den rette Linie CH lodret paa AB; h. s. g.

13.

Naar en ret Linie er oprejst paa en anden ret Linie, saa at der dannes Vinkler, ville de enten være to rette Vinkler eller tilsammen lig to rette.

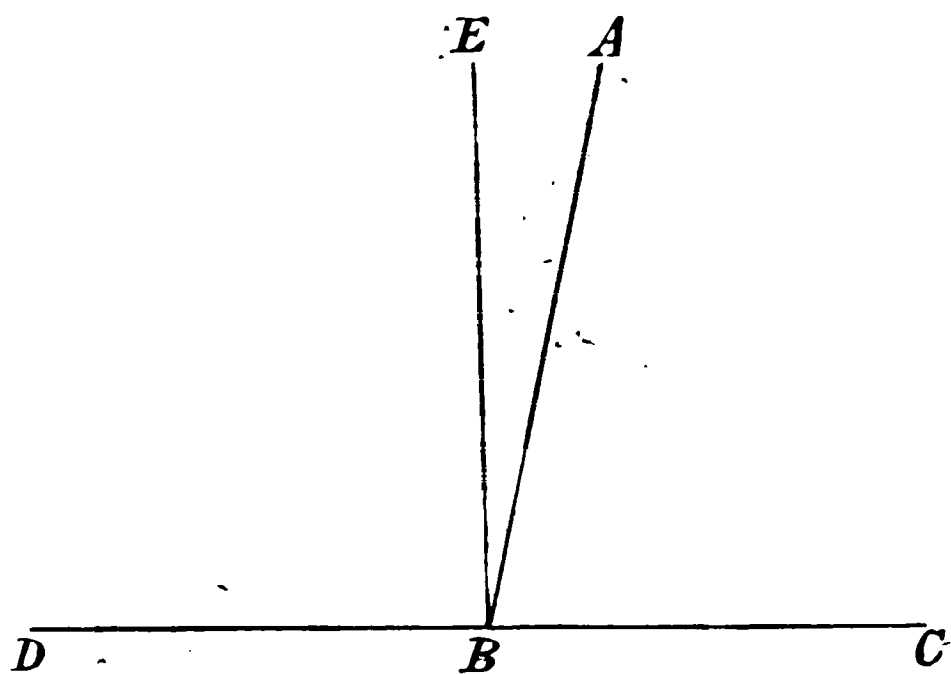
Lad nemlig en vilkaarlig ret Linie AB være oprejst paa den rette Linie CD og danne Vinklerne CBA og ABD. Jeg siger da, at Vink-

lerne $\angle CBA$ og $\angle ABD$ enten ere to rette Vinkler eller tilsammen lig to rette.

Hvis $\angle CBA$ er lig $\angle ABD$, ere de to rette Vinkler. Men, hvis ikke, saa lad der fra Punkt B være oprejst BE vinkelret paa CD.

Da ere Vinklerne CBE og EBD to rette Vinkler. Nu er $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$; lad $\angle EBD$ være lagt til dem begge, saa er $\angle CBE +$

$\angle EBD =$
 $\angle CBA +$
 $\angle ABE +$
 $\angle EBD$. Endvi-
 dere er $\angle DBA$
 $= \angle DBE +$
 $\angle EBA$; lad
 $\angle ABC$ være
 lagt til dem



begge, saa er $\angle DBA + \angle ABC = \angle DBE + \angle EBA + \angle ABC$. Men det blev ogsaa bevist, at $\angle CBE + \angle EBD$ er lig de samme tre Vinkler. Men Størrelser, som ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er $\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle ABC$. Men Vinklerne CBE og EBD ere to rette Vinkler. Altsaa er $\angle DBA + \angle ABC$ lig to rette.

Altsaa: naar en ret Linie er oprejst paa en anden ret Linie, saa at der dannes Vinkler, ville de enten være to rette Vinkler eller tilsammen lig to rette; h. s. b.

14.

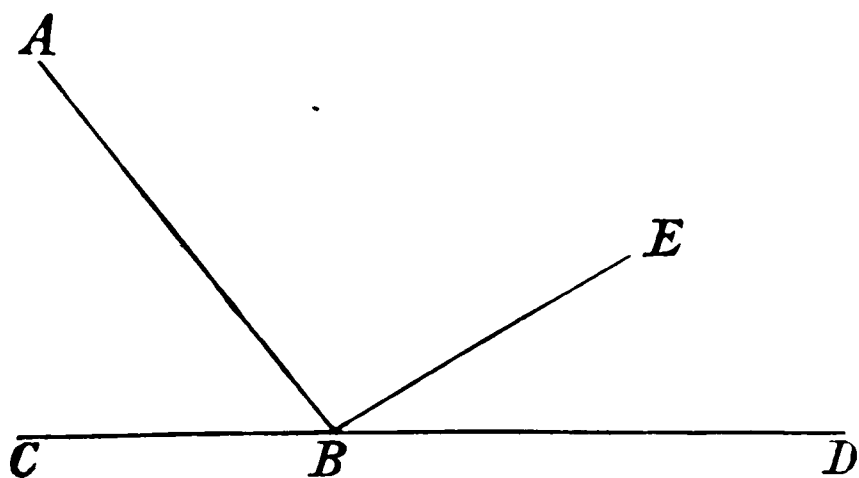
Naar to rette Linier ere tegnede ud fra et Punkt paa en ret Linie til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier ligge i Forlængelse af hinanden.

Lad nemlig de to rette Linier BC og BD være tegnede ud fra et Punkt B paa en ret Linie AB til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette. Jeg siger da, at BD ligger i Forlængelse af CB.

Thi hvis BD ikke ligger i Forlængelse af CB, saa lad BE ligge i Forlængelse af CB.

Da nu den rette Linie AB er oprejst paa den

rette Linie CBE, saa er $\angle ABC + \angle ABE$ lig to rette. Men $\angle ABC + \angle ABD$ er ogsaa lig to rette. Altsaa er $\angle CBA$



$+ \angle ABE = \angle CBA + \angle ABD$. Lad den fælles Vinkel CBA være trukken fra, saa er Resten $\angle ABE$ lig Resten $\angle ABD$, en mindre lig en større; hvilket er umuligt. Altsaa ligger BE ikke i Forlængelse af CB. Paa samme Maade ville vi ogsaa kunne bevise, at heller ikke nogen anden gør det, undtagen BD. Altsaa ligger BD i Forlængelse af CB.

Altsaa: naar to rette Linier ere tegnede ud fra et Punkt paa en ret Linie til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier ligge i Forlængelse af hinanden; h. s. b.

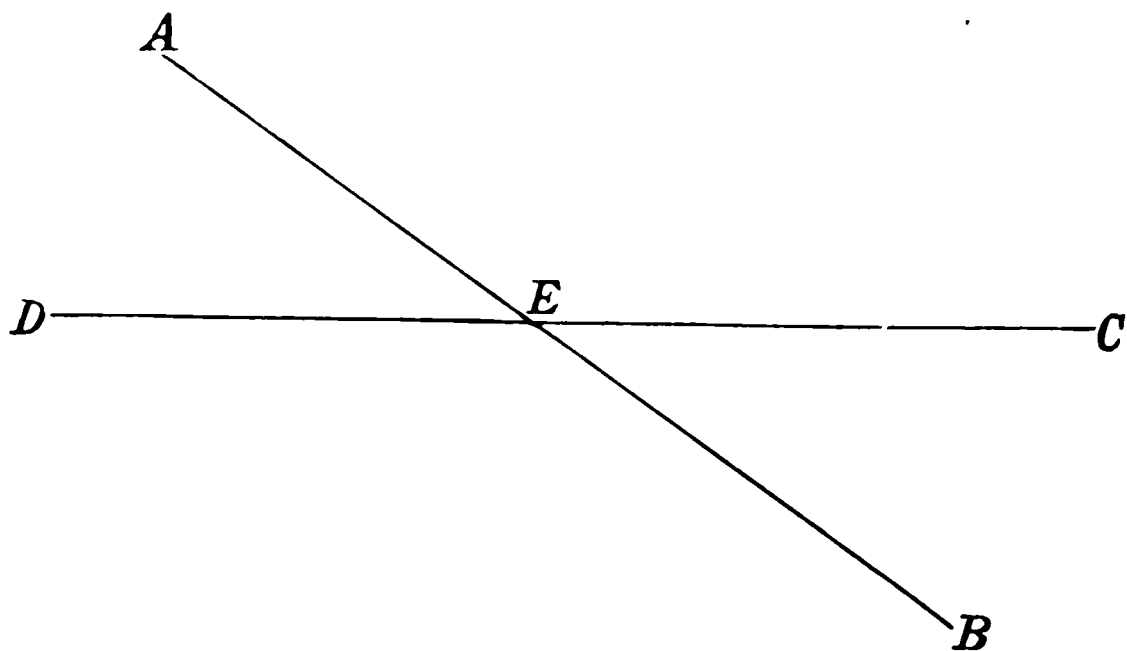
15.

Naar to rette Linier skære hinanden, ere Topvinklerne ligestore.

Lad nemlig de rette Linier AB og CD skære hinanden i Punkt E. Jeg siger da: $\angle AEC = \angle DEB$, og $\angle CEB = \angle AED$.

Thi da den rette Linie AE er oprejst paa den rette Linie CD og danner Vinklerne CEA og AED, saa er $\angle CEA + \angle AED$ lig to rette. Da endvidere den rette Linie DE er op-

rejst paa den rette Linie AB og danner Vinklerne AED og DEB, saa er $\angle AED + \angle DEB$ lig to rette. Men det blev ogsaa bevist, at $\angle CEA + \angle AED$ er lig to rette. Altsaa er $\angle CEA + \angle AED = \angle AED + \angle DEB$. Lad den fælles Vinkel AED være trukken fra, saa er Resten $\angle CEA$ lig Resten $\angle DEB$. Paa samme Maade ville vi



ogsaa kunne bevise, at Vinklerne CEB og DEA ere ligestore.

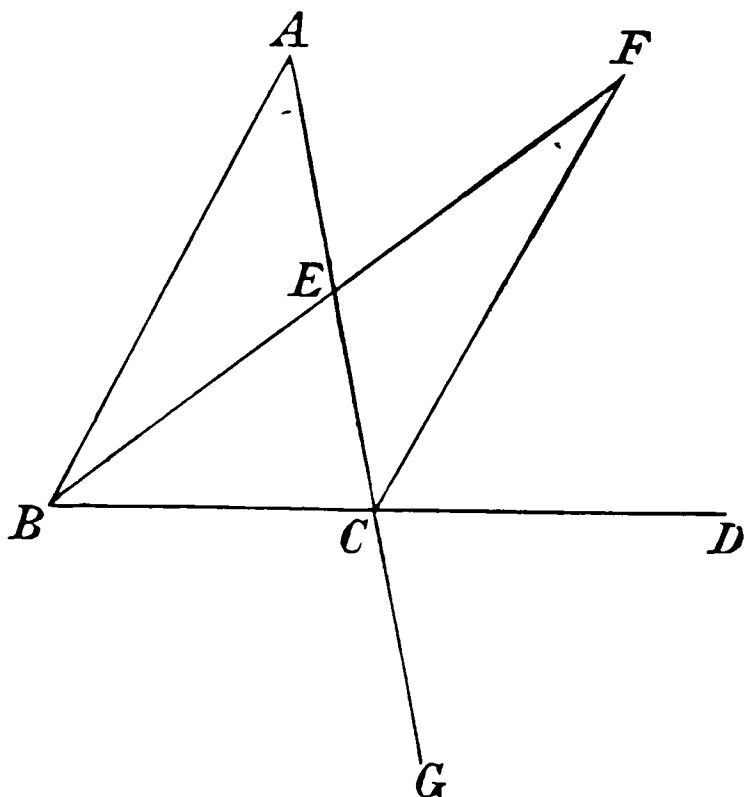
Altsaa: naar to rette Linier skære hinanden, ere Topvinklerne ligestore; h. s. b.

16.

I enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler.

Lad ABC være en Trekant, og lad en af dens Sider BC være forlænget til D . Jeg siger da, at den udvendige Vinkel ACD er større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler CBA og BAC .

Lad AC være halveret i E , lad den rette Linie BE være dragen og forlænget til F , lad EF være afsat lig BE , lad FC være dragen, og lad AC være fortsat til G .



Da nu AE er lig EC , og BE er lig EF , saa ere de to Sider AE og EB parvis lig de to Sider CE og EF ; og $\angle AEB$ er lig $\angle FEC$, thi de ere Topvinkler;

altsaa er Grundlinie AB lig Grundlinie FC ; $\triangle ABE$ er lig $\triangle FCE$; og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ere parvis lig de øvrige Vinkler. Altsaa er $\angle BAE = \angle ECF$. Men $\angle ECD$ er større end $\angle ECF$. Altsaa er $\angle ACD$ større end $\angle BAE$. Paa samme Maade vil man ved at halvere BC

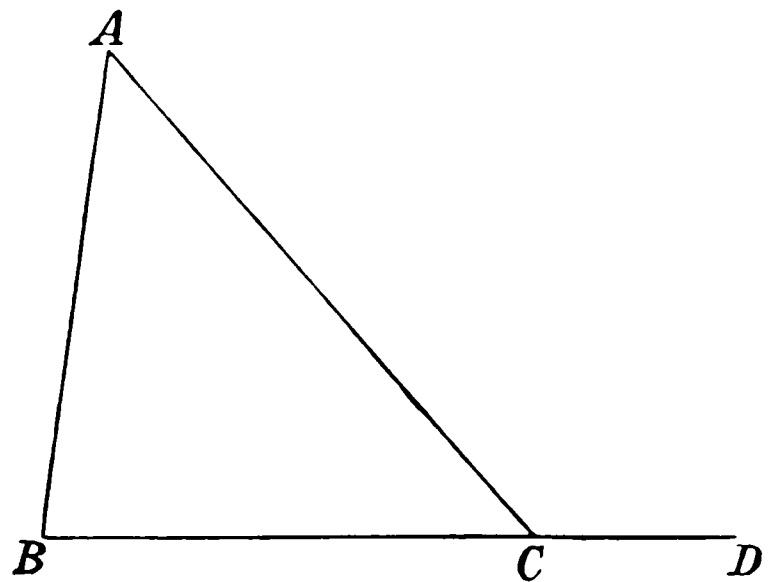
kunne bevise, at $\angle BCG$, det vil sige $\angle ACD$, er større end $\angle ABC$.

Altsaa: i enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel større end enhver af de indvendige og modstaaende Vinkler; h. s. b.

17.

I enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Vinkler tilsammen mindre end to rette.

Lad ABC være en Trekant. Jeg siger da, at i $\triangle ABC$ ere to hvilkesomhelst Vinkler tilsammen mindre end to rette.



Lad nemlig BC være forlænget til D .

Da nu $\angle ACD$ er en udvendig Vinkel til $\triangle ABC$, er den større end den indvendige og modstaaende Vinkel ABC . Lad

$\angle ACB$ være lagt til dem begge, saa er $\angle ACD + \angle ACB$ større end $\angle ABC + \angle BCA$. Men $\angle ACD + \angle ACB$ er lig to rette. Altsaa er $\angle ABC + \angle BCA$ mindre end to rette. Paa samme Maade

ville vi ogsaa kunne bevise, at $\angle BAC + \angle ACB$ er mindre end to rette, og ligesaa $\angle CAB + \angle ABC$.

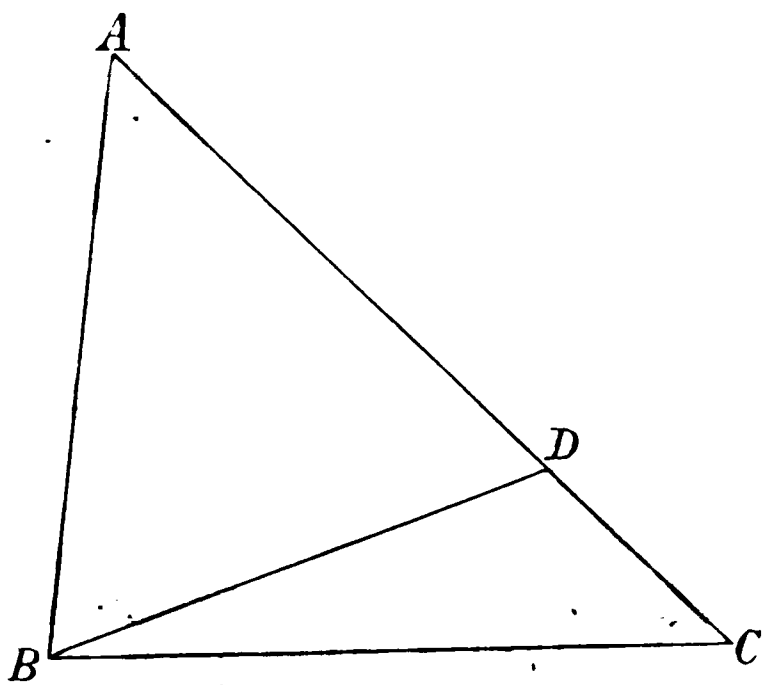
Altsaa: i enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Vinkler tilsammen mindre end to rette; h. s. b.

18.

I enhver Trekant ligger der overfor en større Side en større Vinkel.

Lad nemlig ABC være en Trekant, hvor Side AC er større end Side AB. Jeg siger da, at $\angle ABC$ er større end $\angle BCA$.

Thi da AC er større end AB, saa lad AD være afsat lig AB, og lad BD være dragen.



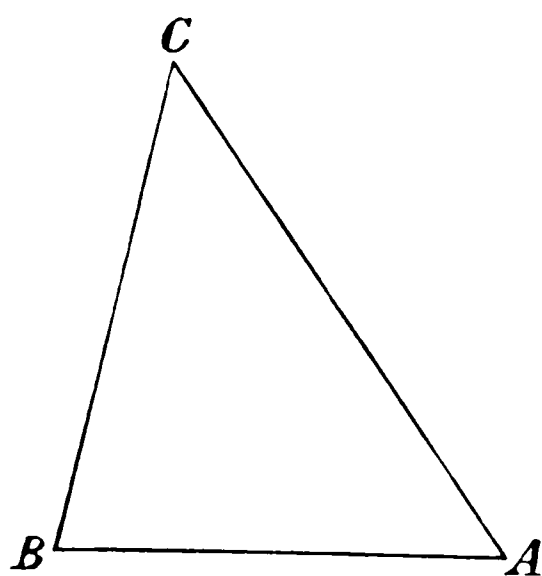
Da nu $\angle ADB$ er en udvendig Vinkel til $\triangle BCD$, er den større end den indvendige og modstaaende Vinkel DCB. Men $\angle ADB$ er lig $\angle ABD$, da Side AB er lig Side AD. Altsaa er $\angle ABD$ større end $\angle ACB$. Altsaa er $\angle ABC$ meget større end $\angle ACB$.

Altsaa: i enhver Trekant ligger der overfor en større Side en større Vinkel; h. s. b.

19.

I enhver Trekant ligger der overfor en større Vinkel en større Side.

Lad ABC være en Trekant, hvor $\angle ABC$ er større end $\angle BCA$. Jeg siger da, at Side AC er større end Side AB.



Thi, hvis ikke, er AC enten lig med eller mindre end AB. AC er nu ikke lig AB; thi i saa Fald vilde $\angle ABC$ være lig $\angle ACB$, men det er den ikke. Altsaa er AC ikke lig AB. Men AC er heller ikke mindre end AB; thi i saa Fald vilde $\angle ABC$ være mindre end $\angle ACB$, men det er den ikke.

Altsaa er AC ikke mindre end AB. Og det blev bevist, at den heller ikke er lig AB. Altsaa er AC større end AB.

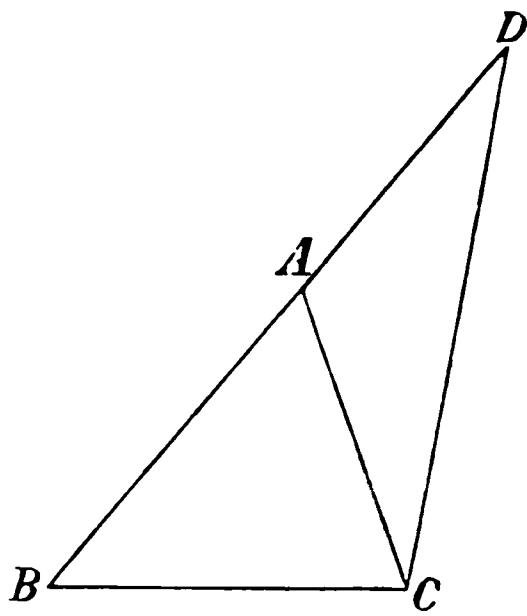
Altsaa: i enhver Trekant ligger der overfor en større Vinkel en større Side; h. s. b.

I enhver Trekant ere to hvilkesomhelst Sider tilsammen større end den tredje.

Lad nemlig ABC være en Trekant. Jeg siger da, at i $\triangle ABC$ ere to hvilkesomhelst Sider tilsammen større end den tredje, $BA + AC$ større end BC , $AB + BC$ større end AC , $BC + CA$ større end AB .

Lad nemlig BA være fortsat til Punkt D, lad AD være afsat lig CA, og lad DC være dragen.

Da nu DA er lig AC, er $\angle ADC = \angle ACD$. Altsaa er $\angle BCD$ større end $\angle ADC$. Og da DCB er en Trekant, hvor $\angle BCD$ er større end $\angle BDC$, og der overfor en større Vinkel ligger en større



Side, saa er DB større end BC. Men DA er lig AC. Altsaa er $BA + AC$ større end BC . Paa samme Maade ville vi ogsaa kunne bevise, at $AB + BC$ er større end AC , og at $BC + CA$ er større end AB .

Altsaa: i enhver Trekant ere to hvilkesom-

helst Sider tilsammen større end den tredje;
h. s. b.

21.

Naar der i en Trekant fra Endepunkterne af en af Siderne er konstrueret to rette Linier indenfor Trekanten, saa ville de to rette Linier tilsammen være mindre end Trekantens to andre Sider tilsammen, men indeslutte en større Vinkel.

Lad der nemlig i $\triangle ABC$ fra Endepunkterne B og C af en af Siderne BC være konstrueret to rette Linier BD og DC indenfor Trekanten. Jeg siger da, at BD og DC tilsammen ere mindre end Trekantens to andre Sider BA og AC tilsammen, men at den Vinkel, de indeslutte, $\angle BDC$ er større end $\angle BAC$.

Lad nemlig BD være fortsat til E.

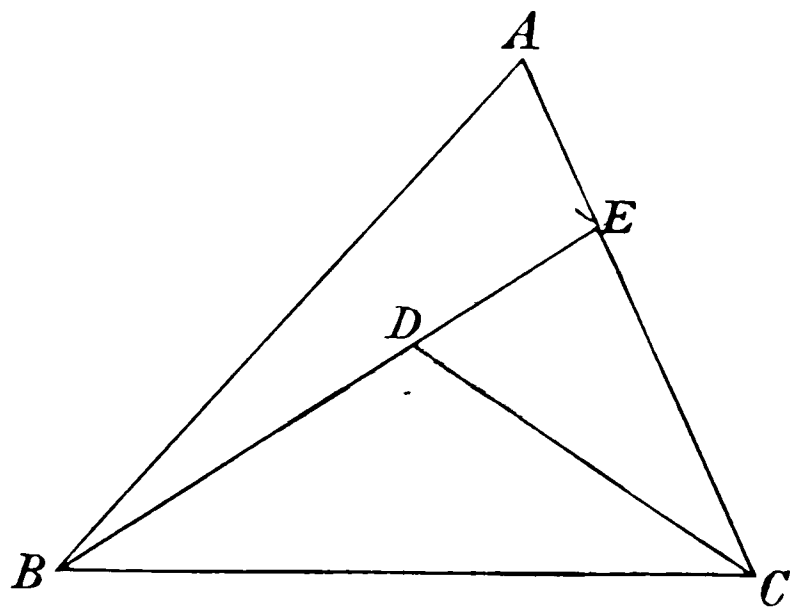
Da nu i enhver Trekant de to Sider tilsammen ere større end den tredje, saa er i $\triangle ABE$ $AB + AE$ større end BE. Lad EC være lagt til dem begge, saa er $BA + AC$ større end $BE + EC$. Endvidere er i $\triangle CED$ $CE + ED$ større end CD. Lad DB være lagt til dem begge, saa er $CE + EB$ større end $CD + DB$. Men det blev bevist, at $BA + AC$

er større end $BE + EC$. Altsaa er $BA + AC$ meget større end $BD + DC$.

Da endvidere i enhver Trekant en udvendig Vinkel er større end enhver af de indvendige og modstaaende, saa er $\triangle CDE$'s udvendige Vinkel BDC større end $\angle CED$. Af samme Grund er altsaa ogsaa $\triangle ABE$'s udvendige Vinkel CEB større end

$\angle BAC$. Men det blev bevist, at $\angle BDC$ er større end $\angle CEB$.

Altsaa er $\angle BDC$ meget større end $\angle BAC$.

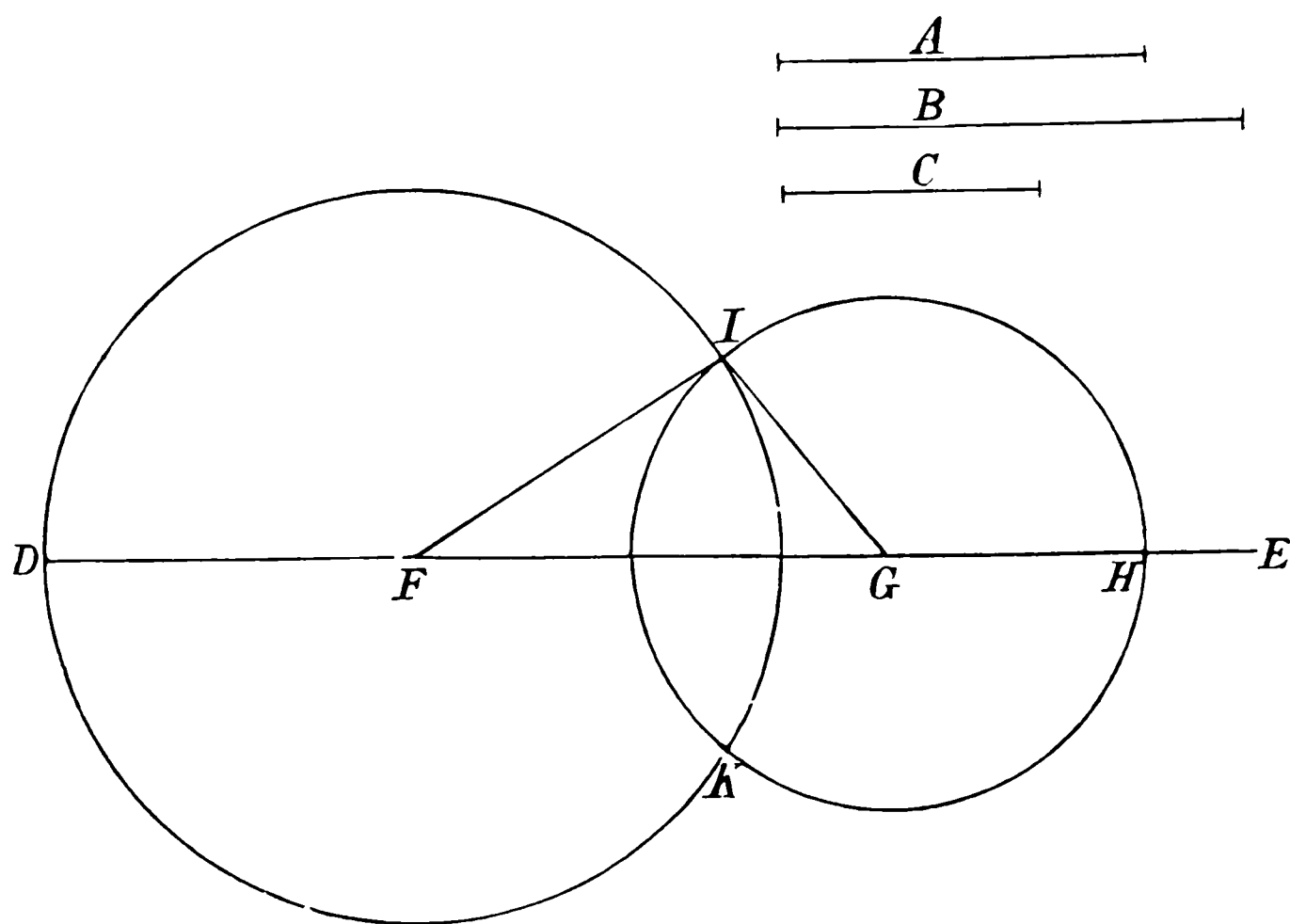


Altsaa: naar der i en Trekant fra Endepunkterne af en af Siderne er konstrueret to rette Linier indenfor Trekanten, saa ville de to rette Linier tilsammen være mindre end Trekantens to andre Sider tilsammen, men indeslutte en større Vinkel; h. s. b.

22.

At konstruere en Trekant af tre rette Linier, lig tre givne rette Linier; dog maa to hvilkesomhelst tilsammen være større end den tredje.

Lad A , B og C være de tre givne rette Linier, og lad to hvilkesomhelst af dem tilsammen være større end den tredje, $A + B$ større end C , $A + C$ større end B og $B + C$ større end A . Man skal da konstruere en Trekant af rette Linier lig A , B og C .



Lad en ret Linie DE være afsat begrænset i D , men ubegrænset henimod E , lad der være afsat $DF = A$, $FG = B$, $GH = C$, lad Cirkel DIK være tegnet med F som Centrum og FD som Radius, lad endvidere Cirkel KIH være tegnet med G som Centrum og GH som Radius, og lad IF og IG være dragne. Jeg siger da, at

$\triangle IFG$ er konstrueret af tre rette Linier lig A, B og C.

Thi da Punkt F er Centrum i Cirkel DIK, er $FD = FI$. Men FD er lig A. Altsaa er FI ogsaa lig A. Da endvidere Punkt G er Centrum i Cirkel KIH, er $GH = GI$. Men GH er lig C. Altsaa er IG ogsaa lig C. Og FG er lig B. Altsaa ere de tre rette Linier IF, FG og GI lig de tre rette Linier A, B og C.

Altsaa er $\triangle IFG$ tegnet af tre rette Linier IF, FG og GI lig de tre givne rette Linier A, B og C; h. s. g.

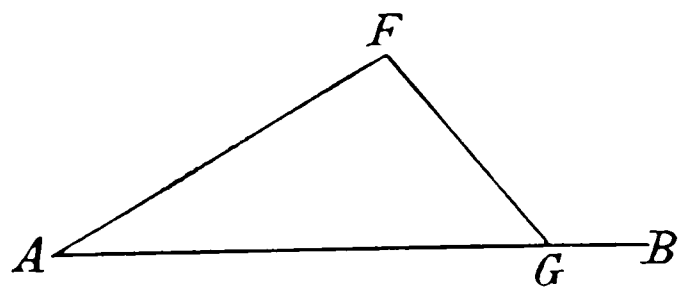
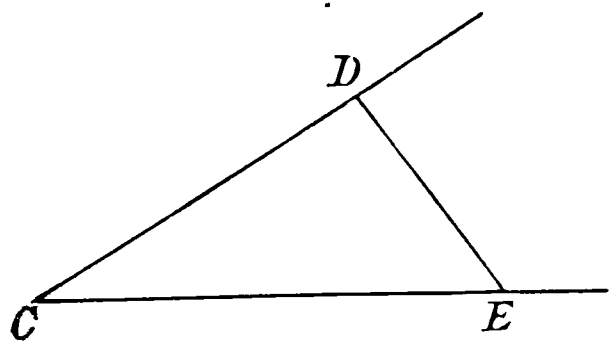
23.

Ved en given ret Linie og et givet Punkt paa den at konstruere en retlinet Vinkel lig en given retlinet Vinkel.

Lad AB være den givne rette Linie, A det givne Punkt paa den og $\angle DCE$ den givne retlignede Vinkel. Man skal da ved den givne rette Linie AB og det givne Punkt A paa den konstruere en retlinet Vinkel lig den givne retlignede Vinkel DCE.

Lad der være taget vilkaarlige Punkter D og E, henholdsvis paa CD og CE, lad DE

være dragen, og lad $\triangle AFG$ være konstrueret af tre rette Linier, som ere lig de tre rette Linier CD, DE og CE, saa at $CD = AF$, $CE = AG$ og $DE = FG$.



Da nu de to Sider DC og CE ere parvis lig de to Sider FA og AG, og Grundlinie DE er lig Grundlinie FG, saa er $\angle DCE = \angle FAG$.

Altsaa er der ved den givne rette Linie AB og det givne Punkt A paa den konstrueret den retlinede Vinkel FAG lig den givne retlinede Vinkel DCE; h. s. g.

24.

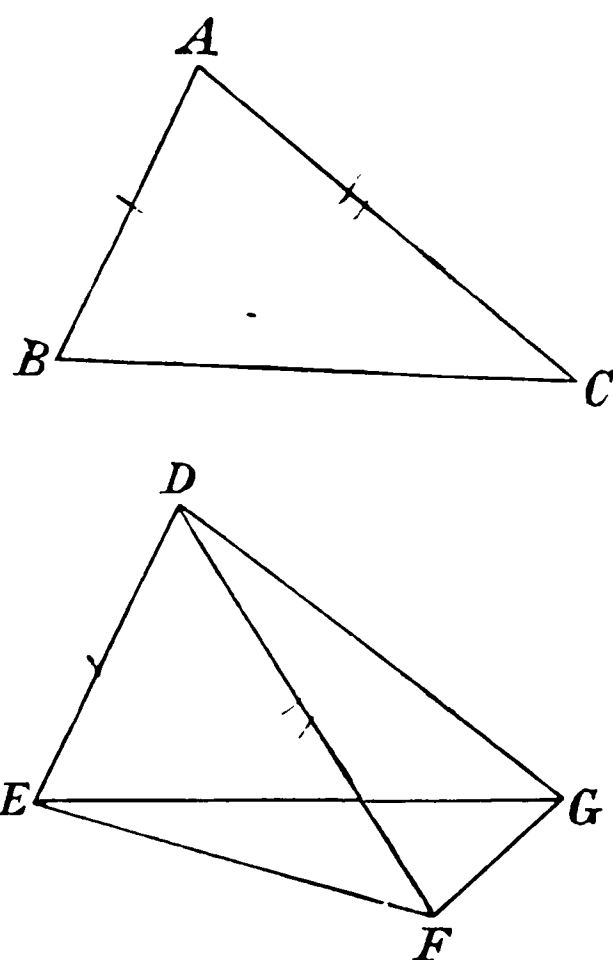
Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Vinkel mellem Siderne end den anden, saa vil den ogsaa have en større Grundlinie end den anden.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig $AB = DE$ og $AC = DF$, men lad Vinkelen ved A være større

end Vinkelen ved D. Jeg siger da, at Grundlinie BC er større end Grundlinie EF.

Thi da $\angle BAC$ er større end $\angle EDF$, saa lad der ved den rette Linie DE og Punkt D paa den være konstrueret $\angle EDG = \angle BAC$, lad DG være afsat lig AC eller DF, og lad EG og FG være dragne.

Da nu AB er lig DE, og AC er lig DG, saa ere de to Sider BA og AC parvis lig de to Sider ED og DG; og $\angle BAC$ er lig $\angle EDG$; altsaa er Grundlinie BC lig Grundlinie EG. Da endvidere DF er lig DG, er $\angle DGF = \angle DFG$. Altsaa er



$\angle DFG$ større end $\angle EGF$. Altsaa er $\angle EFG$ meget større end $\angle EGF$. Da nu EFG er en Trekant, hvor $\angle EFG$ er større end $\angle EGF$, og der overfor en større Vinkel ligger en større Side, saa er Side EG større end Side EF. Men EG er lig BC. Altsaa er ogsaa BC større end EF.

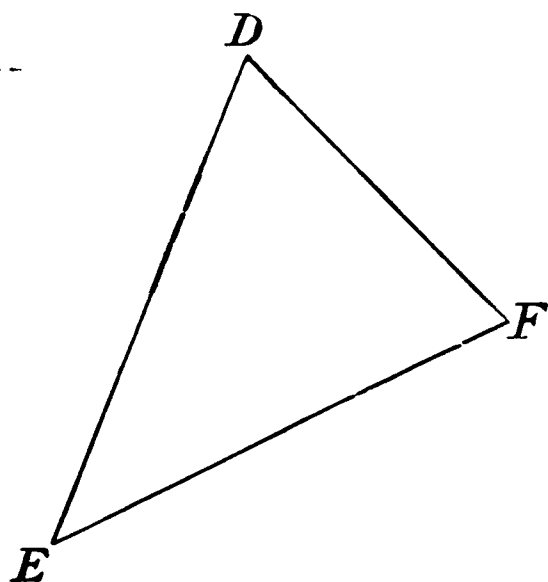
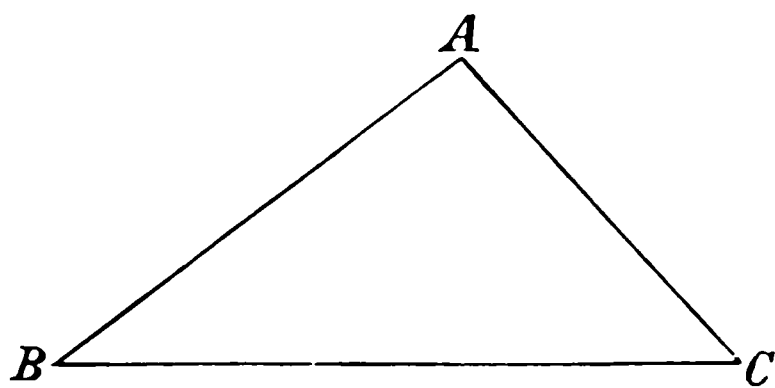
Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Vinkel mellem Siderne end den anden, saa vil den ogsaa have en større Grundlinie end den anden; h. s. b.

25.

Naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Grundlinie end den anden, saa vil den ogsaa have en større Vinkel mellem Siderne end den anden.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor de to Sider AB og AC parvis ere lig de to Sider DE og DF, nemlig $AB = DE$ og

$AC = DF$, men lad Grundlinie BC være større end Grundlinie EF. Jeg siger da, at $\angle BAC$ er større end $\angle EDF$.



Thi, hvis ikke, saa er $\angle BAC$ enten lig med eller mindre end $\angle EDF$. $\angle BAC$ er nu ikke lig $\angle EDF$; thi i saa Fald vilde

Grundlinie BC være lig Grundlinie EF, men det er den ikke. Altsaa er $\angle BAC$ ikke lig $\angle EDF$. Men $\angle BAC$ er heller ikke mindre end $\angle EDF$; thi i saa Fald vilde Grundlinie BC være mindre end Grundlinie EF, men det er den ikke. Altsaa er $\angle BAC$ ikke mindre end $\angle EDF$. Og det blev bevist, at den heller ikke er lig $\angle EDF$. Altsaa er $\angle BAC$ større end $\angle EDF$.

Altsaa: naar to Trekanter have to Sider parvis ligestore, men den ene har en større Grundlinie end den anden, saa vil den ogsaa have en større Vinkel mellem Siderne end den anden; h. s. b.

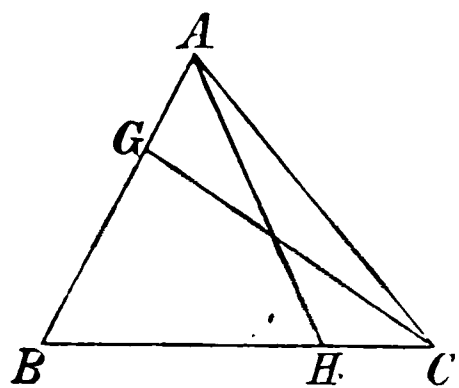
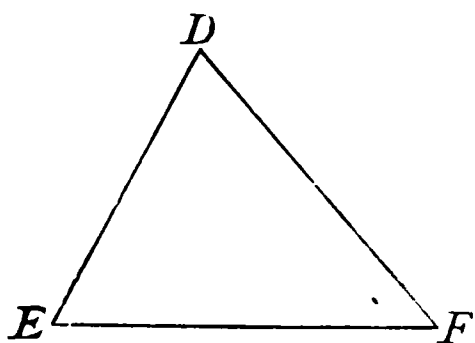
26.

Naar to Trekanter have to Vinkler parvis ligestore og et Par Sider ligestore, enten dem, der ligge mellem de parvis ligestore Vinkler, eller dem, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, saa ville de ogsaa have de andre Sider parvis ligestore og det tredje Par Vinkler ligestore.

Lad ABC og DEF være to Trekanter, hvor Vinklerne ABC og BCA parvis ere lig Vinklerne DEF og EFD, nemlig $\angle ABC = \angle DEF$ og $\angle BCA = \angle EFD$, og lad dem desuden have

et Par Sider ligestore, først dem, der ligge mellem de ligestore Vinkler, nemlig $BC = EF$. Jeg siger da, at de ogsaa ville have de øvrige Sider parvis ligestore, nemlig $AB = DE$ og $AC = DF$, og det tredje Par Vinkler ligestore, nemlig $\angle BAC = \angle EDF$.

Thi hvis AB og DE ere uligestore, er en af dem størst. Lad AB være



størst, lad BG være afsat lig DE og lad GC være dragen.

Da nu BG er lig DE , og BC er lig EF , saa ere de to Sider BG og BC parvis lig de to Sider ED og EF ; og $\angle GBC$ er lig $\angle DEF$; altsaa er Grundlinie GC lig Grundlinie DF ; $\triangle GBC$ er lig $\triangle DEF$; og de øvrige Vinkler, overfor

hvilke de ligestore Sider ligge, ville være ligestore. Altsaa er $\angle GCB = \angle DFE$. Men det er givet, at $\angle DFE$ er lig $\angle BCA$. Altsaa er $\angle BCG = \angle BCA$, en mindre lig en større; hvilket er umuligt. Altsaa ere AB og DE ikke uligestore. Altsaa er $AB = DE$. Desuden er $BC = EF$. Altsaa ere de to Sider AB og BC parvis lig de to Sider DE og EF ; og $\angle ABC$

er lig $\angle DEF$; altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie DF, og den tredje Vinkel BAC er lig den tredje Vinkel EDF.

Men lad nu de Sider, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, være ligestore, f. Ex. $AB = DE$; saa siger jeg atter, at de øvrige Sider ogsaa ville være ligestore, $AC = DF$ og $BC = EF$, og tillige, at den tredje Vinkel BAC er lig den tredje Vinkel EDF.

Thi hvis BC og EF ere uligestore, er en af dem størst. Lad om muligt BC være størst, lad BH være afsat lig EF, og lad AH være dragen.

Da nu BH er lig EF, og AB er lig DE, saa ere de to Sider AB og BH parvis lig de to Sider DE og EF; og de indeslutte ligestore Vinkler; altsaa er Grundlinie AH lig Grundlinie DF; $\triangle ABH$ er lig $\triangle DEF$; og de øvrige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være ligestore. Altsaa er $\angle BHA = \angle EFD$. Men $\angle EFD$ er lig $\angle BCA$. Altsaa er $\triangle AHC$'s udvendige Vinkel BHA lig den indvendige og modstaaende Vinkel BCA; hvilket er umuligt. Altsaa ere BC og EF ikke uligestore. Altsaa er $BC = EF$. Desuden er $AB = DE$. Altsaa ere de to Sider AB og BC parvis lig de to Sider DE og EF; og de indeslutte ligestore

Vinkler; altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie DF; $\triangle ABC$ er lig $\triangle DEF$; og den tredje Vinkel BAC er lig den tredje Vinkel EDF.

Altsaa: naar to Trekanter have to Vinkler parvis ligestore og et Par Sider ligestore, enten dem, der ligge mellem de parvis ligestore Vinkler, eller dem, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, saa ville de ogsaa have de andre Sider parvis ligestore, og det tredje Par Vinkler ligestore; h. s. b.

27.

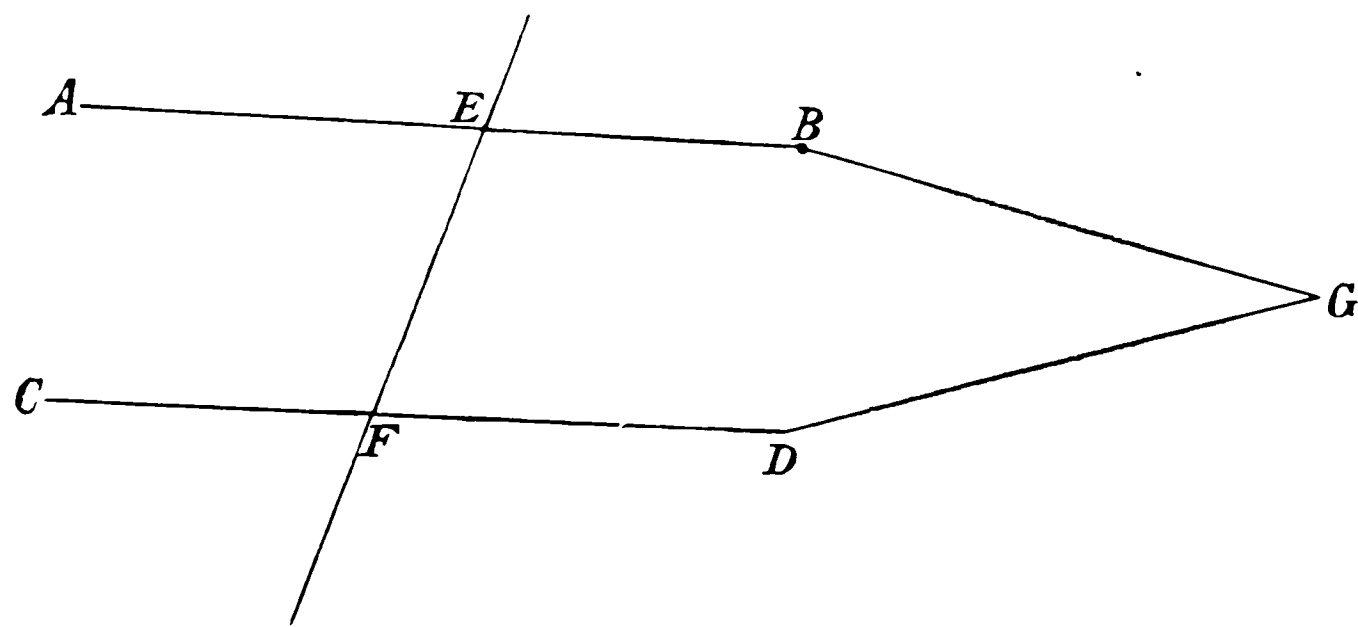
Naar en ret Linie skærer to rette Linier, og Vekselvinklerne ere ligestore, ville de rette Linier være parallelle.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de to rette Linier AB og CD, og lad Vekselvinklerne AEF og EFD være ligestore. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Thi, hvis ikke, saa ville AB og CD, naar de forlænges, mødes enten paa den Side, hvor B og D ligge, eller paa den Side, hvor A og C ligge. Lad dem være forlængede og mødes paa den Side, hvor B og D ligge, i G.

Saa er $\triangle GEF$'s udvendige Vinkel AEF lig den indvendige og modstaaende Vinkel EFG;

hvilket er umuligt. Altsaa ville AB og CD, naar de forlænges, ikke mødes paa den Side, hvor B og D ligge. Paa samme Maade vil det kunne bevises, at de heller ikke gøre det paa den Side, hvor A og C ligge. Men Linier, som ikke mødes til nogen af Siderne, ere parallelle. Altsaa er AB parallel med CD.



Altsaa: naar en ret Linie skærer to rette Linier, og Vekselvinklerne ere ligestore, ville de rette Linier være parallelle; h. s. b.

28.

Naar en ret Linie skærer to rette Linier, og den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende paa samme Side, eller de indvendige Vinkler tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier være parallelle.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de to rette Linier AB og CD, og lad den udvendige Vinkel EGB være lig den indvendige og modstaaende Vinkel GHD, eller de indvendige Vinkler paa samme Side BGH og GHD tilsammen være lig to rette. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Thi da $\angle EGB$ er lig $\angle GHD$, og $\angle EGB$

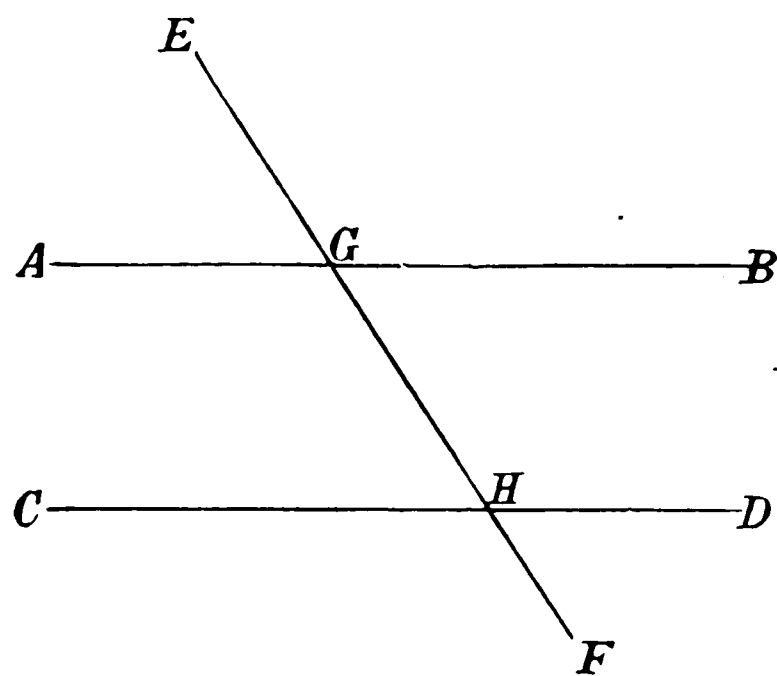
er lig $\angle AGH$, saa er

$\angle AGH = \angle GHD$.

Og de ere Veksel-

vinkler. Altsaa er

AB parallel med CD.



Da endvidere

$\angle BGH + \angle GHD$

er lig to rette, og

$\angle AGH + \angle BGH$

ogsaa er lig to rette,

saa er $\angle BGH + \angle GHD = \angle AGH +$

$\angle BGH$. Lad den fælles Vinkel BGH være

trukken fra, saa er Resten $\angle AGH$ lig Resten

$\angle GHD$. Og de ere Vekselvinkler. Altsaa er

AB parallel med CD.

Altsaa: naar en ret Linie skærer to rette

Linier, og den udvendige Vinkel er lig den ind-

vendige og modstaaende paa samme Side, eller

de indvendige Vinkler paa samme Side tilsammen ere lig to rette, ville de rette Linier være parallelle; h. s. b.

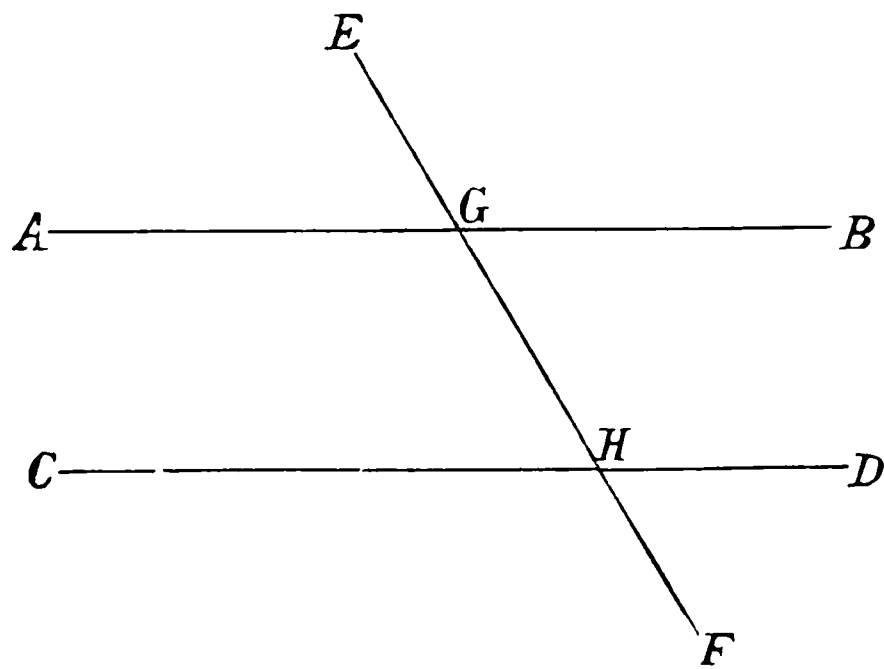
29.

Naar en ret Linie skærer parallelle rette Linier, ere Vekselvinklerne ligestore, den udvendige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere tilsammen lig to rette.

Lad nemlig den rette Linie EF skære de parallelle rette Linier AB og CD. Jeg siger da, at Vekselvinklerne AGH og GHD ere ligestore, at den udvendige Vinkel EGB er lig den indvendige og modstaaende Vinkel GHD, og at de indvendige Vinkler paa samme Side BGH og GHD tilsammen ere lig to rette.

Thi hvis $\angle AGH$ og $\angle GHD$ ere uligestore, er en af dem størst. Lad $\angle AGH$ være størst, og lad $\angle BGH$ være lagt til dem begge, saa er $\angle AGH + \angle BGH$ større end $\angle BGH + \angle GHD$. Men $\angle AGH + \angle BGH$ er lig to rette. Altsaa er $\angle BGH + \angle GHD$ mindre end to rette. Men rette Linier mødes, naar de forlænges ubegrænset fra Vinkler, der tilsammen ere mindre end to rette. Altsaa ville AB og

CD mødes, naar de forlænges ubegrænset. Men de mødes ikke, fordi det er givet, at de ere parallele. Altsaa er $\angle AGH$ og $\angle GHD$ ikke uligestore. Altsaa er $\angle AGH = \angle GHD$. Men $\angle AGH$ er lig $\angle EGB$. Altsaa er $\angle EGB = \angle GHD$. Lad nu $\angle BGH$ være lagt til dem begge, saa er $\angle EGB + \angle BGH = \angle BGH + \angle GHD$. Men $\angle EGB + \angle BGH$ er lig to rette. Altsaa er ogsaa $\angle BGH + \angle GHD$ lig to rette.



Altsaa: naar en ret Linie skærer parallele rette Linier, ere Vekselvinklerne ligestore, den udven-

dige Vinkel er lig den indvendige og modstaaende, og de indvendige Vinkler paa samme Side ere tilsammen lig to rette; h. s. b.

30.

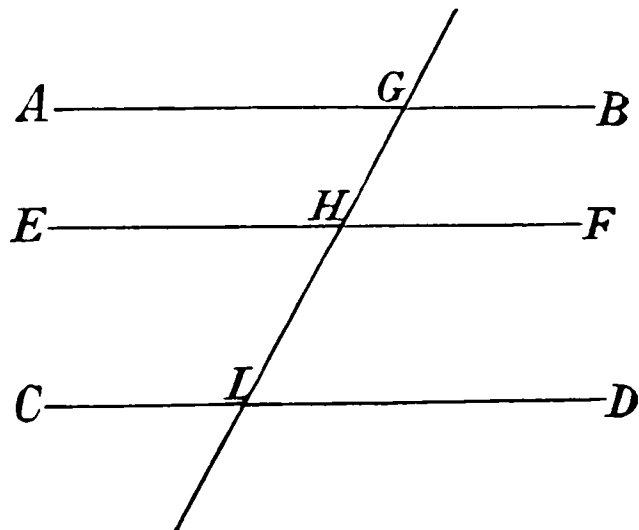
Rette Linier, der ere parallele med den samme rette Linie, ere indbyrdes parallele.

Lad begge de rette Linier AB og CD være parallelle med EF. Jeg siger da, at AB er parallel med CD.

Lad nemlig den rette Linie GI skære dem.

Da den rette Linie GI har skaaret de parallelle rette Linier AB og EF, saa er $\angle AGI = \angle GHF$. Da endvidere den rette Linie GI har skaaret de parallelle rette Linier EF og CD, saa er $\angle GHF = \angle GID$.

Men det blev ogsaa bevist, at $\angle AGI$ er lig $\angle GHF$. Altsaa er $\angle AGI = \angle GID$. Og de ere Vekselvinkler. Altsaa er AB parallel med CD.



Altsaa: rette Linier, der ere parallelle med den samme rette Linie, ere indbyrdes parallelle; h. s. b.

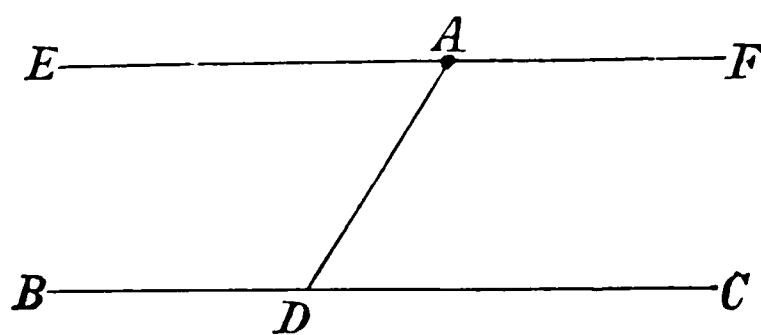
31.

Gennem et givet Punkt at trække en ret Linie, parallel med en given ret Linie.

Lad A være det givne Punkt og BC den givne rette Linie. Man skal da gennem Punkt

A trække en ret Linie parallel med den rette Linie BC.

Lad der paa BC være taget et vilkaarligt Punkt D, og lad AD være dragen; lad der ved den rette Linie AD og Punktet A paa den være



konstrueret $\angle DAE = \angle ADC$, og lad den rette Linie AF være afsat i Forlængelse af EA.

Da nu den rette Linie AD har skaaret de to rette Linier BC og EF, og Vekselvinklerne EAD og ADC ere ligestore, saa er EAF parallel med BC.

Altsaa er der gennem det givne Punkt A trukket den rette Linie EAF parallel med den givne rette Linie BC; h. s. g.

32.

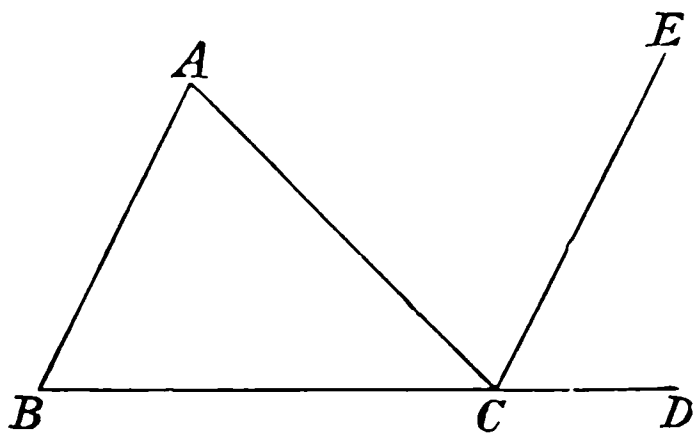
I enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel lig de to indvendige og modstaaende tilsammen, og de tre Vinkler inde i Trekanten ere tilsammen lig to rette.

Lad ABC være en Trekant, og lad dens ene Side BC være forlænget til D. Jeg siger

da, at den udvendige Vinkel ACD er lig de to indvendige og modstaaende CAB og ABC tilsammen, og at de tre Vinkler inde i Trekanten ABC, BCA og CAB tilsammen ere lig to rette.

Lad nemlig CE være trukken gennem Punkt C parallel med den rette Linie AB.

Da nu AB er parallel med CE, og den rette Linie AC har skaaret dem, ere Vekselvinklerne BAC og ACE ligestore. Da paa den anden Side AB er parallel med CE, og den rette Linie BD har skaaret dem, er den udvendige Vinkel ECD lig den indvendige og modstaaende Vinkel ABC.



Men det blev ogsaa bevist, at $\angle ACE$ er lig $\angle BAC$. Altsaa er hele $\angle ACD$ lig de to indvendige og modstaaende Vinkler $BAC + ABC$. Lad nu $\angle ACB$ være lagt til dem begge, saa er altsaa $\angle ACD + \angle ACB = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$. Men $\angle ACD + \angle ACB$ er lig to rette; altsaa er ogsaa $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$ lig to rette.

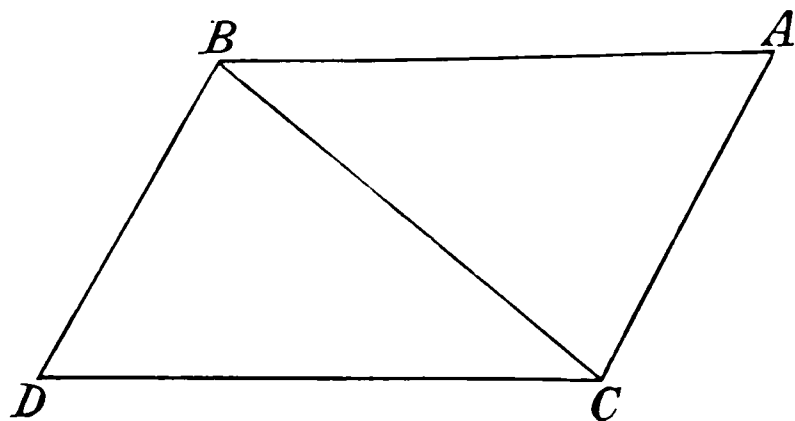
Altsaa: i enhver Trekant er, naar en af Siderne er forlænget, den udvendige Vinkel

lig de to indvendige og modstaaende tilsammen, og de tre Vinkler inde i Trekanten ere tilsammen lig to rette; h. s. b.

33.

Rette Linier, som forbinde de til hinanden svarende Endepunkter af ligestore og parallelle rette Linier, ere selv ligestore og parallelle.

Lad AB og CD være ligestore og parallelle,



og lad de rette Linier AC og BD forbinde de til hinanden svarende Endepunkter. Jeg siger da, at AC og BD ere ligestore og parallelle.

Lad BC være dragen.

Da nu AB er parallel med CD, og BC har skaaret dem, saa ere Vekselvinklerne ABC og BCD ligestore. Og da AB er lig CD, og BC er fælles, saa ere de to Sider AB og BC lig de to Sider BC og CD. Desuden er $\angle ABC = \angle BCD$. Altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie BD; $\triangle ABC$ er lig $\triangle BCD$; og de øvige Vinkler, overfor hvilke de ligestore Sider ligge, ville være parvis ligestore. Altsaa er $\angle ACB = \angle CBD$. Da nu

den rette Linie BC skærer de to rette Linier AC og BD, og Vekselvinklerne ere ligestore, saa er AC parallel med BD. Men det blev ogsaa bevist, at AC er lig BD.

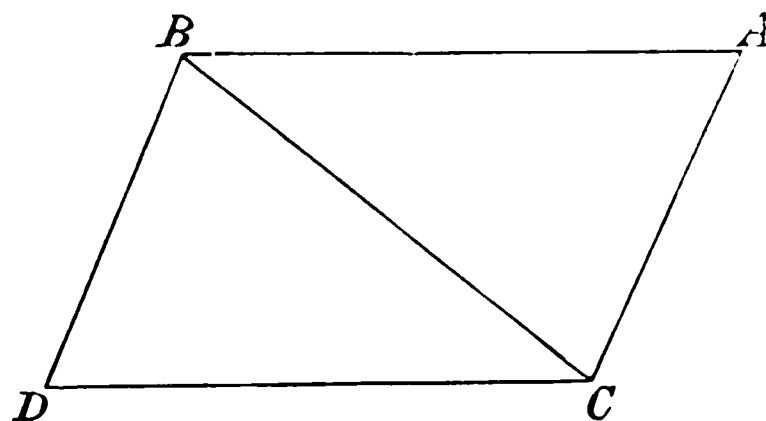
Altsaa: rette Linier, som forbinde de til hinanden svarende Endepunkter af ligestore og parallelle rette Linier, ere selv ligestore og parallelle; h. s. b.

34.

I et Parallelogram ere de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore, og Diagonalen halverer Parallelogrammet.

Lad ACDB være et Parallelogram og BC dets Diagonal. Jeg siger da, at i $\square$ ACDB ere de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore, og at Diagonalen BC halverer det.

Thi da AB er parallel med CD, og den rette Linie BC har skaaret dem, ere Vekselvinklerne ABC og BCD ligestore. Da endvidere AC er parallel med BD, og BC har skaaret dem, ere Vekselvinklerne ACB og CBD ligestore. Altsaa ere ABC og BCD



to Trekkanter, hvor de to Vinkler ABC og BCA ere parvis lig de to Vinkler BCD og CBD , og hvor et Par Sider ere ligestore, nemlig Fælles-siden BC , som ligger mellem de ligestore Vinkler. Altsaa ville de ogsaa have de øvrige Sider parvis ligestore og det tredje Par Vinkler ligestore. Altsaa er $AB = CD$, $AC = BD$ og $\angle BAC = \angle CDB$. Da nu $\angle ABC$ er lig $\angle BCD$, og $\angle CBD$ er lig $\angle ACB$, saa er hele $\angle ABD$ lig hele $\angle ACD$. Men det blev ogsaa bevist, at $\angle BAC$ er lig $\angle CDB$.

Altsaa: i et Parallelogram ere de modstaa-ende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore.

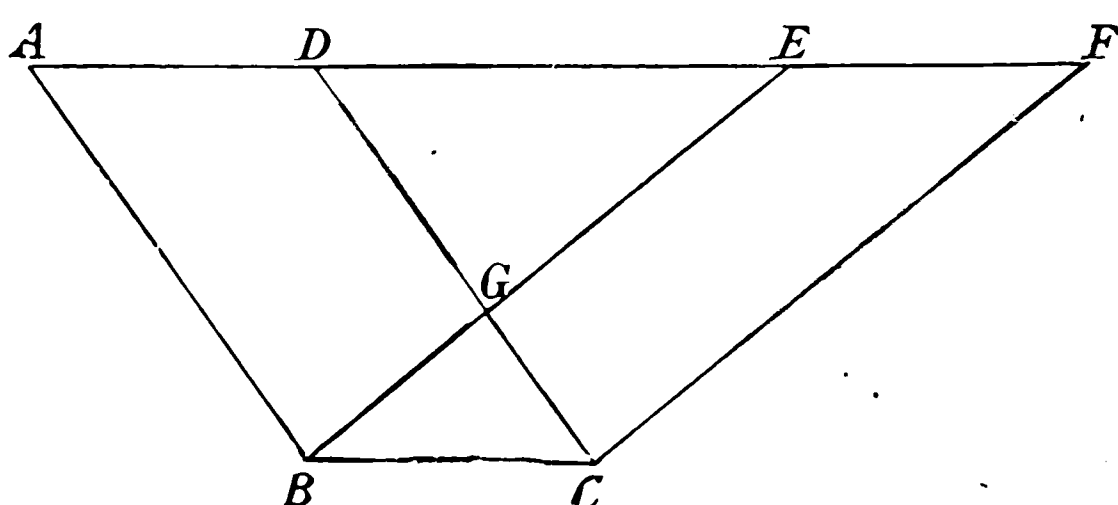
Jeg siger endvidere, at Diagonalen halverer Parallelogrammet. Thi da AB er lig CD , og BC er fælles, saa ere de to Sider AB og BC parvis lig de to Sider CD og BC ; og $\angle ABC$ er lig $\angle BCD$. Altsaa er Grundlinie AC lig Grundlinie DB , og $\triangle ABC$ er lig $\triangle BCD$.

Altsaa: Diagonalen BC halverer $\square ABCD$; h. s. b.

Parallelogrammer paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABCD og EBCF være Parallelogrammer paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler AF og BC. Jeg siger da: $\square ABCD = \square EBCF$.

Thi da ABCD er et Parallelogram, er $AD = BC$. Af samme Grund er ogsaa $EF = BC$. Følgelig er $AD = EF$. Og DE er fælles. Altsaa er hele AE lig hele DF. Desuden er $AB = DC$. Altsaa ere de to Sider EA og AB



parvis lig de to Sider FD og DC; og $\angle FDC$ er lig $\angle EAB$, nemlig den udvendige lig den indvendige; altsaa er Grundlinie EB lig Grundlinie FC; og $\triangle EAB$ vil være lig $\triangle DFC$. Lad den fælles DGE være trukken fra, saa er Resten Firkant ABGD lig Resten Firkant EGCF. Lad $\triangle GBC$ være lagt til dem begge, saa er hele $\square ABCD$ lig hele $\square EBCF$.

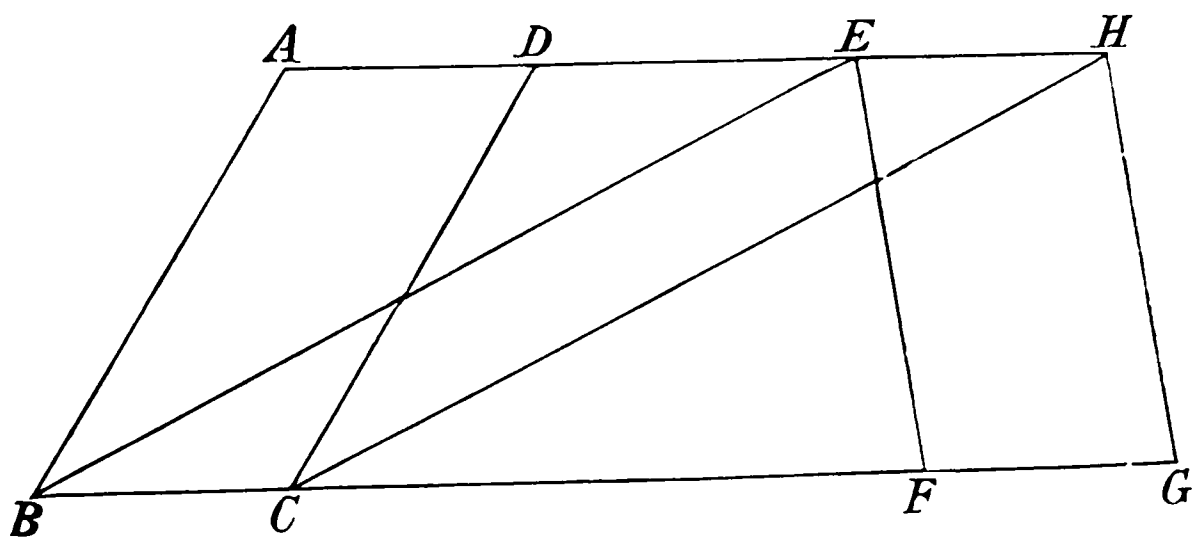
Altsaa: Parallelogrammer paa samme Grund-

linie og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

36.

Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABCD og EFGH være Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier BC og FG



og mellem de samme Paralleler AH og BG. Jeg siger da: $\square ABCD = \square EFGH$.

Lad nemlig BE og CH være dragne.

Da nu BC er lig FG, men FG er lig EH, saa er ogsaa $BC = EH$. Desuden ere de parallelle, og EB og HC forbinde dem. Men rette Linier, som forbinde de til hinanden svarende Endepunkter af ligestore og parallelle rette Linier, ere ligestore og parallelle. Altsaa er EBCH et Parallelogram. Og det er lig $\square ABCD$; thi de

have samme Grundlinie BC og ligge mellem de samme Paralleler BC og AH. Af samme Grund er ogsaa $\square EFGH = \square EBCH$. Følgelig er $\square ABCD = \square EFGH$.

Altsaa: Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

37.

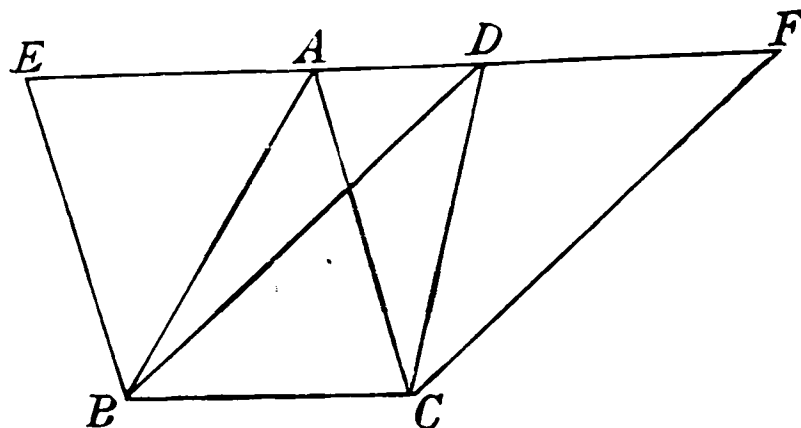
Trekanter paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABC og DBC være Trekanter paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler AD og BC. Jeg siger da: $\triangle ABC = \triangle DBC$.

Lad AD være forlænget til begge Sider til E og F, lad BE være trukken gennem B parallel med CA, og lad CF være trukken gennem C parallel med BD.

Saa ere EBCA og DBCF Parallelogrammer; og de ere ligestore, thi de ligge paa samme Grundlinie BC og mellem

de samme Paralleler BC og EF. Men $\triangle ABC$ er Halvdelen af $\square EBCA$, thi Dia-



gonal AB halverer det; og $\triangle DBC$ er Halvdelen af $\square DBCF$, thi Diagonal DC halverer det; altsaa er $\triangle ABC = \triangle DBC$.

Altsaa: Trekanter paa samme Grundlinie og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

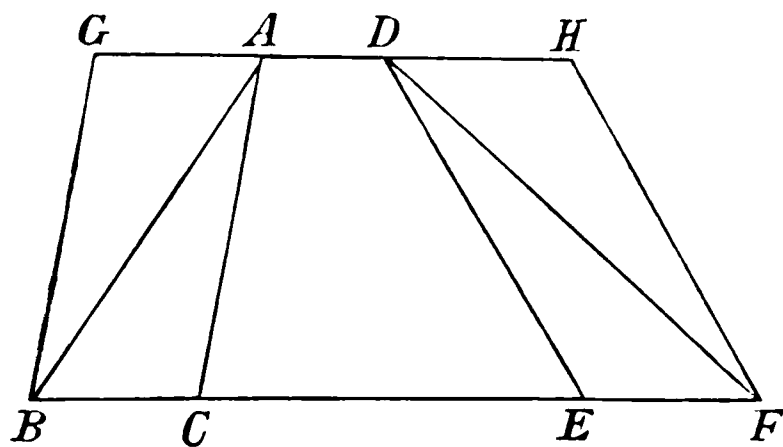
38.

Trekanter paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore.

Lad ABC og DEF være Trekanter paa ligestore Grundlinier BC og EF og mellem de samme Paralleler BF og AD. Jeg siger da: $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Lad nemlig AD være forlænget til begge Sider til G og H, lad BG være trukken gennem B parallel med CA, og lad FH være trukken gennem F parallel med ED.

Saa ere baade GBCA og DEFH Parallelogrammer; og $\square GBCA$ er lig $\square DEFH$; thi de



ligge paa ligestore Grundlinier BC og EF og mellem de samme Paralleler BF og GH. Men $\triangle ABC$ er Halvdelen af $\square GBCA$, thi Dia-

gonal AB halverer det; og $\triangle FED$ er Halvdelen af $\square DEFH$, thi Diagonal DF halverer det; altsaa er $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Altsaa: Trekanten paa ligestore Grundlinier og mellem de samme Paralleler ere ligestore; h. s. b.

39.

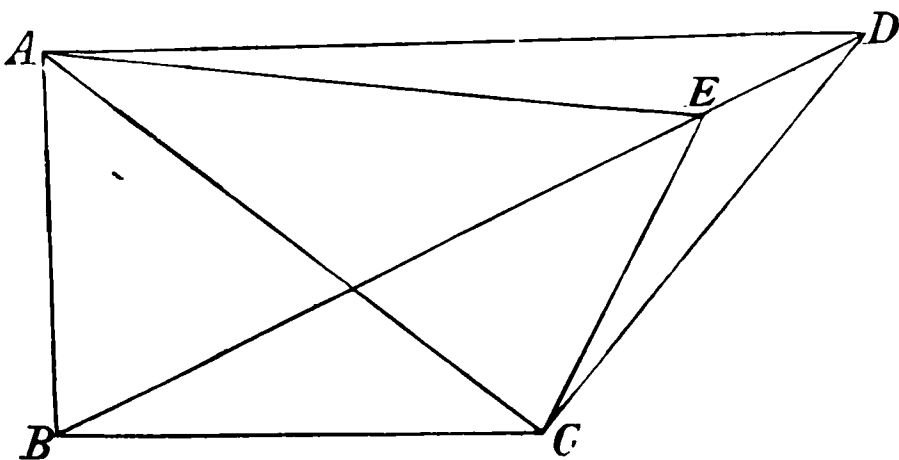
Ligestore Trekanten paa samme Grundlinie og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler.

Lad ABC og DBC være ligestore Trekanten paa samme Grundlinie BC og paa samme Side af BC. Jeg siger da, at de ogsaa ligge mellem de samme Paralleler.

Lad nemlig AD være dragen. Jeg siger da, at AD er parallel med BC.

Thi, hvis ikke, saa lad AE være trukken gennem Punkt A parallel med den rette Linie BC, og lad EC være dragen.

Saa er $\triangle ABC$
 $= \triangle EBC$; thi
 de ligge paa
 samme Grund-
 linie BC og mel-
 lem de samme



Paralleler. Men $\triangle ABC$ er ogsaa lig $\triangle DBC$. Altsaa er $\triangle DBC = \triangle EBC$, en større lig en mindre; hvilket er umuligt. Altsaa er AE ikke parallel med BC. Paa samme Maade ville vi kunne bevise, at heller ikke nogen anden er det undtagen AD. Altsaa er AD parallel med BC.

Altsaa: ligestore Trekanter paa samme Grundlinie og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler; h. s. b.

40.

Ligestore Trekanter paa ligestore Grundlinier og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler.

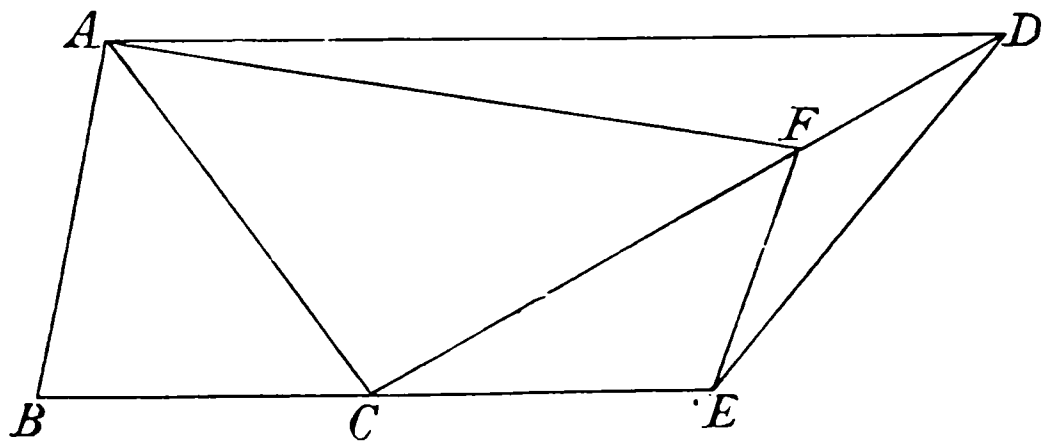
Lad ABC og DCE være ligestore Trekanter paa ligestore Grundlinier BC og CE og paa samme Side. Jeg siger da, at de ogsaa ligge mellem de samme Paralleler.

Lad nemlig AD være dragen. Jeg siger da, at AD er parallel med BC.

Thi, hvis ikke, saa lad AF være trukken gennem A parallel med BE, og lad FE være dragen.

Saa er $\triangle ABC = \triangle FCE$; thi de ligge paa ligestore Grundlinier BC og CE og mellem de samme Paralleler BE og AF. Men $\triangle ABC$ er ogsaa lig $\triangle DCE$. Altsaa er $\triangle DCE$

$= \triangle FCE$, en større lig en mindre; hvilket er umuligt. Altsaa er AF ikke parallel med BE. Paa samme Maade ville vi kunne bevise, at



heller ikke nogen anden er det undtagen AD. Altsaa er AD parallel med BE.

Altsaa: ligestore Trekanter paa ligestore Grundlinier og paa samme Side ligge ogsaa mellem de samme Paralleler; h. s. b.

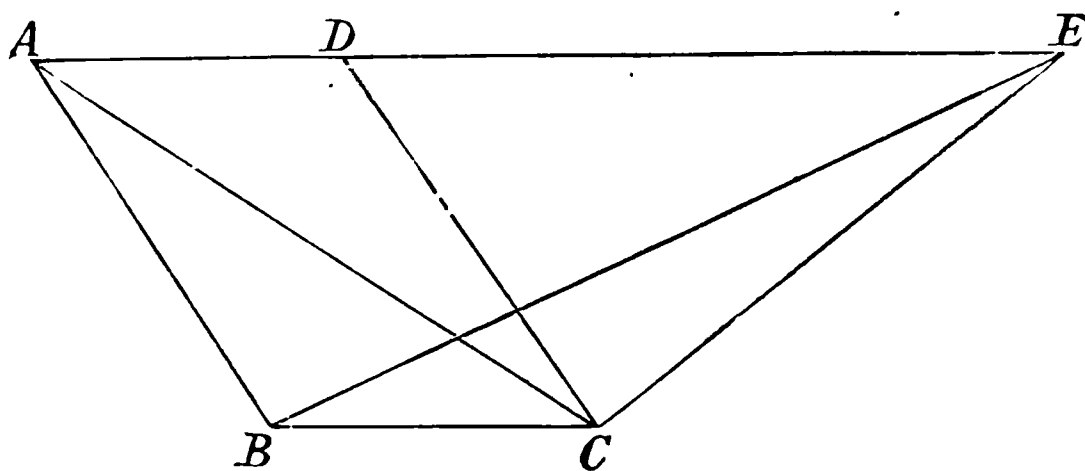
-41.

Naar et Parallelogram har samme Grundlinie som en Trekant og ligger mellem de samme Paralleler, er Parallelogrammet dobbelt saa stort som Trekanten.

Lad nemlig $\square ABCD$ have samme Grundlinie som $\triangle EBC$, nemlig BC, og ligge mellem de samme Paralleler BC og AE. Jeg siger da:
 $\square ABCD = 2 \triangle BEC$.

Lad AC være dragen.

Saa er $\triangle ABC = \triangle EBC$; thi de ligge paa samme Grundlinie BC og mellem de samme Paralleler BC og AE. Men $\square ABCD$ er lig $2 \triangle ABC$;



thi Diagonal AC halverer det. Følgelig er ogsaa $\square ABCD = 2 \triangle EBC$.

Altsaa: naar et Parallelogram har samme Grundlinie som en Trekant og ligger mellem de samme Paralleler, er Parallelogrammet dobbelt saa stort som Trekanten; h. s. b.

42.

At konstruere et Parallelogram lig en given Trekant og med en given retlinet Vinkel.

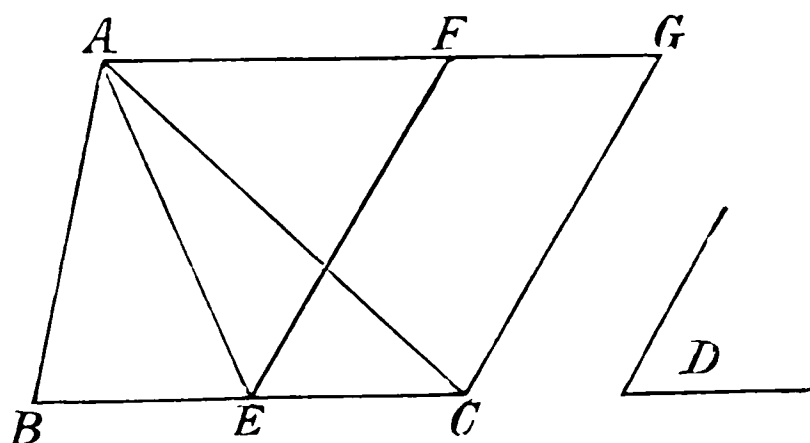
Lad ABC være den givne Trekant og D den givne retlinede Vinkel. Man skal da konstruere et Parallelogram lig $\triangle ABC$ og med den retlinede Vinkel D.

Lad BC være halveret i E, lad AE være dragen, lad $\angle CEF = \angle D$ være konstrueret

ved den rette Linie EC og Punkt E paa den, lad AG være trukken gennem A parallel med EC, og lad CG være trukken gennem C parallel med EF.

Saa er FECG et Parallelogram. Da nu BE er lig EC, er $\triangle ABE = \triangle AEC$; thi de ligge paa ligestore Grundlinier BE og EC og mellem de samme Paralleler BC og AG.

Altsaa er $\triangle ABC = 2 \triangle AEC$. Men $\square FECG$ er ogsaa lig $2 \triangle AEC$; thi de have samme Grundlinie og ligge mellem de samme



Paralleler. Altsaa er $\square FECG = \triangle ABC$. Og det har Vinkelen CEF lig den givne Vinkel D.

Altsaa er der konstrueret Parallelogrammet FECG lig den givne Trekant ABC og med $\angle CEF$, som er lig D; h. s. g.

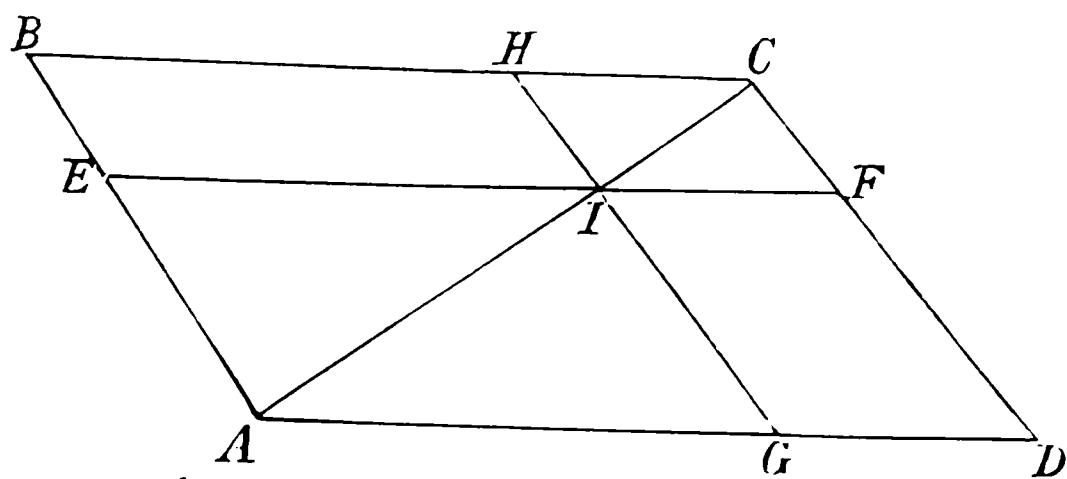
43.

I ethvert Parallelogram ere Udfyldningsfigurerne til Parallelogrammerne omkring Diagonalen ligestore.

Lad ABCD være et Parallelogram og AC dets Diagonal, lad EG og FH være Parallelogrammer omkring AC, og BI og ID de saa-

kaldte Udfyldningsfigurer. Jeg siger da, at Udfyldningsfigur BI er lig Udfyldningsfigur ID.

Thi da ABCD er et Parallelogram og AC dets Diagonal, er $\triangle ABC = \triangle ACD$. Da endvidere EG er et Parallelogram, og AI dets Diagonal, er $\triangle AEI = \triangle AGI$. Af samme Grund er $\triangle IFC = \triangle IHC$. Da nu $\triangle AEI$ er lig $\triangle AGI$, og $\triangle IFC$ er lig $\triangle IHC$, saa er $\triangle AEI + \triangle IHC = \triangle AGI + \triangle IFC$;



desuden er hele $\triangle ABC$ lig hele $\triangle ADC$; altsaa er Resten Udfyldningsfigur BI lig Resten Udfyldningsfigur ID.

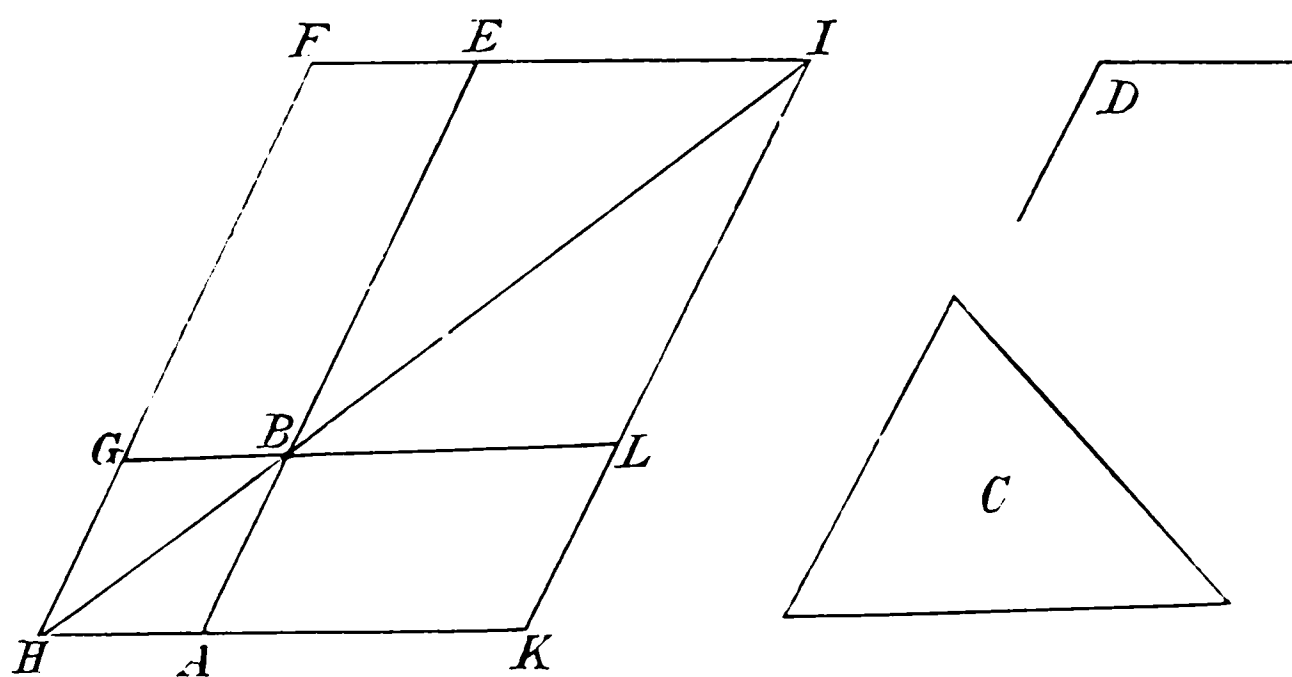
Altsaa: i ethvert Parallelogram ere Udfyldningsfigurerne til Parallelogrammerne omkring Diagonalen ligestore; h. s. b.

44.

Langs en given ret Linie at lægge et Parallelogram lig en given Trekant og med en given retlinet Vinkel.

Lad AB være den givne rette Linie, C den givne Trekant og D den givne retlinede Vinkel. Man skal da langs den givne rette Linie AB lægge et Parallelogram lig den givne Trekant C og med en Vinkel lig D .

Lad $\square BEFG$ være tegnet lig $\triangle C$ og med $\angle EBG$, som er lig D , og lad det være lagt, saa at BE og AB ligge i Forlængelse af



hinanden, lad FG være fortsat til H , lad AH være trukken gennem A parallel med BG eller EF , og lad HB være dragen.

Da nu den rette Linie HF har skaaret Parallelerne AH og EF , saa er $\angle AHF + \angle HFE$ lig to rette. Altsaa er $\angle BHG + \angle GFE$ mindre end to rette. Men rette Linier mødes, naar de forlænges ubegrænset fra Vinkler, der tilsammen ere mindre end to rette. Altsaa ville HB og FE mødes,

naar de forlænges. Lad dem være forlængede og mødes i I, lad IK være trukken gennem Punkt I parallel med EA eller FH, og lad HA og GB være forlængede til Punkterne K og L. Saa er HKIF et Parallelogram, HI dets Diagonal, AG og LE Parallelogrammer omkring HI, og KB og BF de saakaldte Udfyldningsfigurer. Altsaa er $KB = BF$. Men BF er lig $\triangle C$. Altsaa er ogsaa $KB = C$. Og da $\angle GBE$ er lig $\angle ABL$, og $\angle GBE$ er lig D, saa er $\angle ABL = \angle D$.

Altsaa er der langs den givne rette Linie AB lagt Parallelogrammet KB lig den givne Trekant C og med $\angle ABL$, som er lig D; h. s. g.

45.

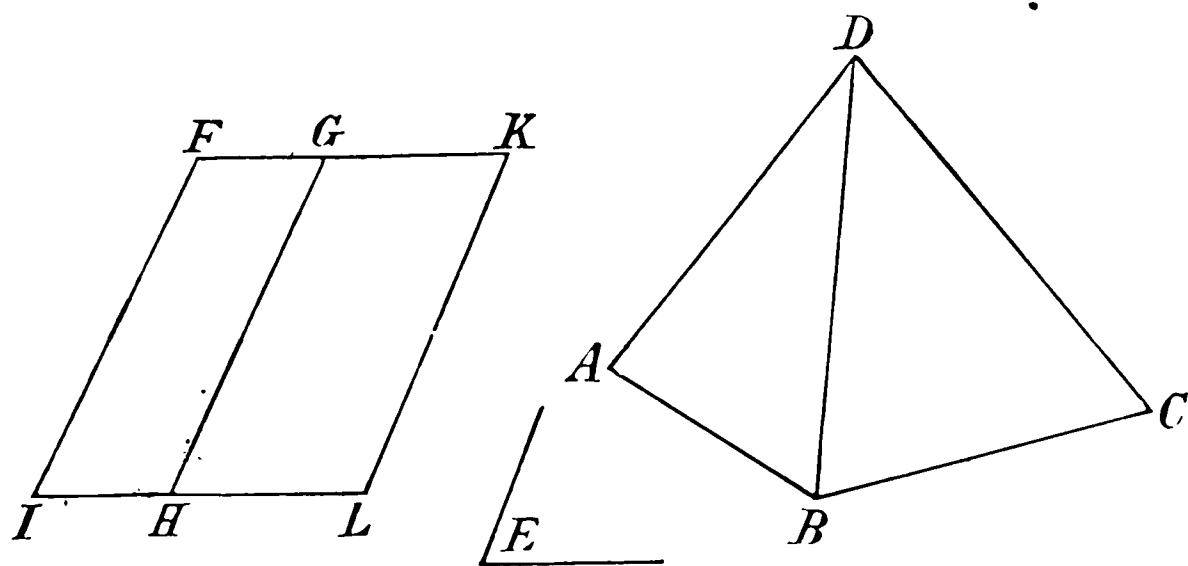
At konstruere et Parallelogram lig en given retlinet Figur og med en given retlinet Vinkel.

Lad ABCD være den givne retlinede Figur og E den givne retlinede Vinkel. Man skal da konstruere et Parallelogram lig den retlinede Figur ABCD og med den givne Vinkel E.

Lad DB være dragen, og lad der være konstrueret et Parallelogram $FH = \triangle ABD$ og med $\angle HIF$, som er lig E, og lad der langs

den rette Linie GH være lagt et Parallelogram $GL = \triangle DBC$ og med $\angle GHL$, som er lig E.

Da nu $\angle E$ baade er lig $\angle HIF$ og $\angle GHL$, saa er $\angle HIF = \angle GHL$. Lad $\angle IHG$ være lagt til dem begge, saa er $\angle FIH + \angle IHG = \angle IHG + \angle GHL$. Men $\angle FIH + \angle IHG$ er lig to rette. Altsaa er $\angle IHG + \angle GHL$ ogsaa lig to rette. Da ere de to rette Linier IH og HL tegnede ud fra en ret Linie GH og



et Punkt H paa den til hver sin Side, saa at Vinklerne ved Siden af hinanden tilsammen ere lig to rette. Altsaa ligge IH og HL i Forlængelse af hinanden. Da nu den rette Linie HG har skaaret IL og FG, ere Vekselvinklerne LHG og HGF ligestore. Lad $\angle HGK$ være lagt til dem begge, saa er $\angle LHG + \angle HGK = \angle HGF + \angle HGK$. Men $\angle LHG + \angle HGK$ er lig to rette. Altsaa er $\angle HGF + \angle HGK$ ogsaa lig to rette. Altsaa ligge FG og GK i

Forlængelse af hinanden. Da nu IF er lig og parallel med HG, og HG er lig og parallel med LK, saa er IF lig og parallel med LK; og de rette Linier IL og FK forbinde deres til hinanden svarende Endepunkter; altsaa ere ogsaa IL og FK ligestore og parallelle. Altsaa er IFKL et Parallelogram. Da nu $\triangle ABD$ er lig $\square FH$, og $\triangle DBC$ er lig GL, saa er hele den retlinede Figur ABCD lig hele $\square IFKL$.

Altsaa er der konstrueret Parallelogrammet IFKL lig den givne retlinede Figur og med $\angle FIL$, som er lig den givne Vinkel E; h. s. g.

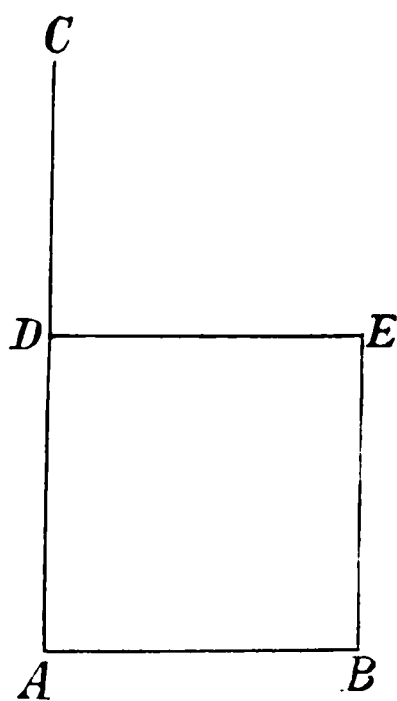
46.

At tegne et Kvadrat paa en given ret Linie.

Lad AB være den givne rette Linie. Man skal da tegne et Kvadrat paa den givne rette Linie AB.

Lad AC være oprejst fra Punkt A paa den rette Linie AB vinkelret paa AB, og lad AD være afsat lig AB; lad DE være trukken gennem Punkt D parallel med AB, og lad BE være trukken gennem Punkt B parallel med AD. Saa er ADEB et Parallelogram. Altsaa er $AB =$

DE og $AD = BE$. Men AB er lig AD; altsaa ere de fire BA, AD, DE og EB ligestore. Altsaa er $\square$ ADEB ligesidet. Jeg siger da, at det ogsaa er retvinklet. Thi da den rette Linie AD har skaaret Parallelerne AB og DE, saa er $\angle BAD + \angle ADE$ lig to rette. Men $\angle BAD$ er ret. Altsaa er $\angle ADE$ ogsaa ret. Nu ere i et Parallelogram de modstaaende Sider og Vinkler indbyrdes ligestore. Altsaa ere ogsaa begge de modstaaende Vinkler ABE og BED rette. Altsaa er $\square$ ADEB retvinklet.



Desuden blev det bevist, at det er ligesidet.

Altsaa er det et Kvadrat, og det er tegnet paa den rette Linie AB; h. s. g.

47.

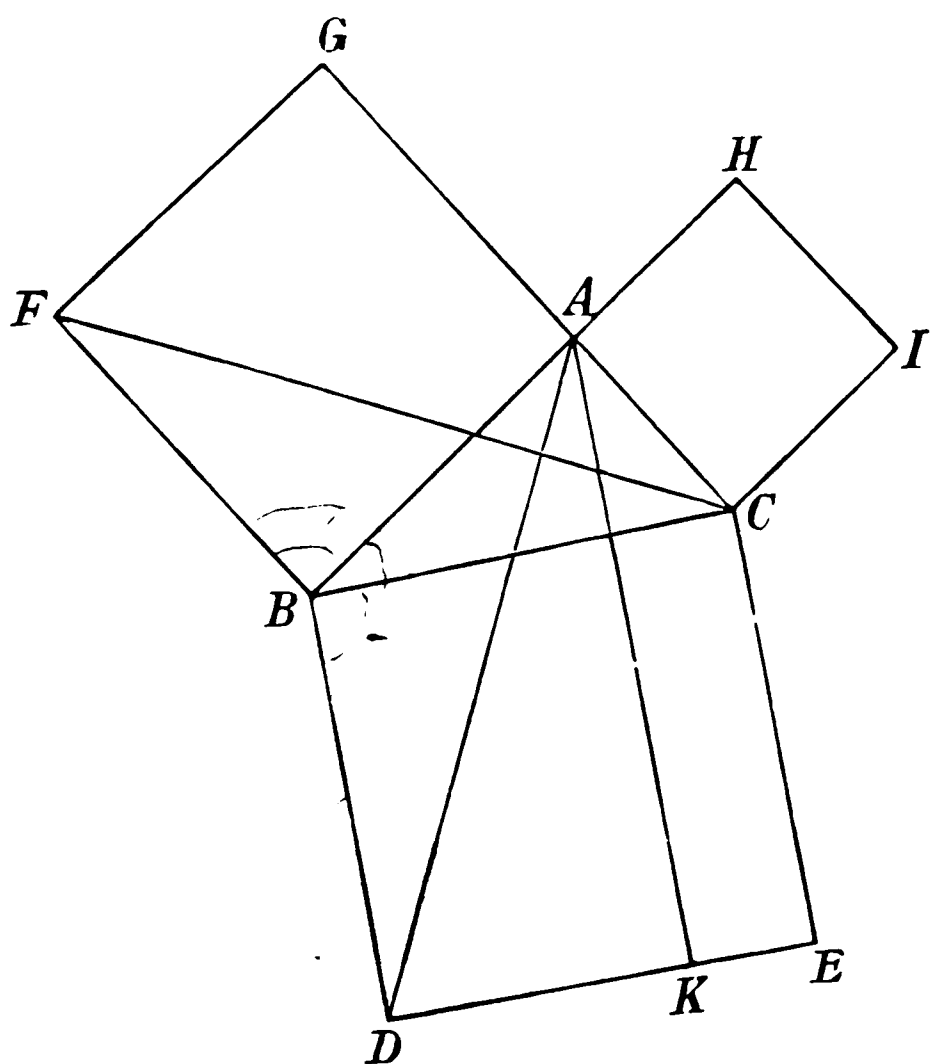
I en retvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den rette Vinkel, lig Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den rette Vinkel.

Lad ABC være en retvinklet Trekant, hvor

$\angle BAC$ er ret. Jeg siger da, at $\square BC$ er lig $\square BA + \square AC$.

Lad der nemlig paa BC være tegnet et Kvadrat $BDEC$ og paa BA og AC Kvadraterne GB og HC , lad AK være trukken gennem A parallel med BD eller CE , og lad AD og FC være dragne.

Da nu begge Vinklerne BAC og BAG ere rette, saa ere de to rette Linier AC og AG tegnede ud fra et Punkt A paa en ret Linie AB til hver sin Side, saa at Vinklerne ved



Siden af hinanden ere lig to rette. Altsaa ligge AC og AG i Forlængelse af hinanden. Af samme Grund ligge ogsaa BA og AH i Forlængelse af hinanden. Nu er $\angle DBC = \angle FBA$; thi de ere begge

rette. Lad $\angle ABC$ være lagt til dem begge, saa er hele $\angle DBA$ lig hele $\angle FBC$. Da nu

DB er lig BC, og FB er lig BA, saa ere de to Sider DB og BA parvis lig de to Sider CB og BF; og $\angle DBA$ er lig $\angle FBC$; altsaa er Grundlinie AD lig Grundlinie FC; og $\triangle ABD$ er lig $\triangle FBC$. Men $\square BK$ er lig $2 \triangle ABD$; thi de have samme Grundlinie BD og ligge mellem de samme Paralleler BD og AK; og Kvadrat GB er lig $2 \triangle FBC$, thi de have samme Grundlinie FB og ligge mellem de samme Paralleler FB og GC; altsaa er $\square BK$ lig Kvadrat GB. Paa samme Maade vil man ved at drage AE og BI kunne bevise, at $\square CK$ er lig Kvadrat HC. Altsaa er hele Kvadrat BDEC lig Summen af de to Kvadrater GB og HC. Men BDEC er $\square BC$, GB og HC ere $\square BA$ og $\square AC$. Altsaa er $\square BC = \square BA + \square AC$.

Altsaa: i en retvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den rette Vinkel, lig Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den rette Vinkel; h. s. b.

48.

Naar Kvadratet paa en af Siderne i en Trekant er lig Summen af Kvadraterne paa

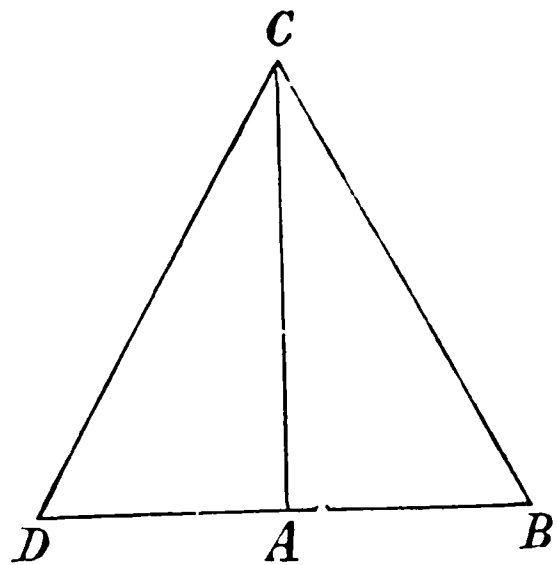
Trekantens to andre Sider, er den Vinkel, der indesluttet af Trekantens to andre Sider, ret.

Lad nemlig Kvadratet paa en af Siderne BC i $\triangle ABC$ være lig Summen af Kvadraterne paa Siderne BA og AC. Jeg siger da, at $\angle BAC$ er ret.

Lad nemlig AD være oprejst fra Punkt A vinkelret paa den rette Linie AC, lad AD være afsat lig BA, og lad DC være dragen.

Da nu DA er lig AB, er ogsaa $\square DA = \square AB$. Lad $\square AC$ være lagt til dem begge, saa er $\square DA + \square AC = \square BA + \square AC$. Men $\square DC$ er lig $\square DA + \square AC$, thi $\angle DAC$ er ret; og $\square BC$

er lig $\square BA + \square AC$, thi det er givet; altsaa er $\square DC = \square BC$. Følgelig er Side DC ogsaa lig Side BC. Da tillige DA er lig AB, og AC er fælles, saa ere de to Sider DA og AC lig de to



Sider BA og AC; og Grundlinie DC er lig Grundlinie BC; altsaa er $\angle DAC = \angle BAC$. Men $\angle DAC$ er ret. Altsaa er $\angle BAC$ ogsaa ret.

Altsaa: naar Kvadratet paa en af Siderne i en Trekant er lig Summen af Kvadraterne paa Trekantens to andre Sider, er den Vinkel, der indesluttet af Trekantens to andre Sider, ret; h. s. b.

II.

Definitioner.

1. Ethvert Rektangel siges at indesluttet af to af de rette Linier, der indeslutte den rette Vinkel.

2. I ethvert Parallelogram kan man kalde et hvilket som helst af Parallelogrammerne omkring dets Diagonal sammen med de to Udfyldningsfigurer for en Gnomon.

I.

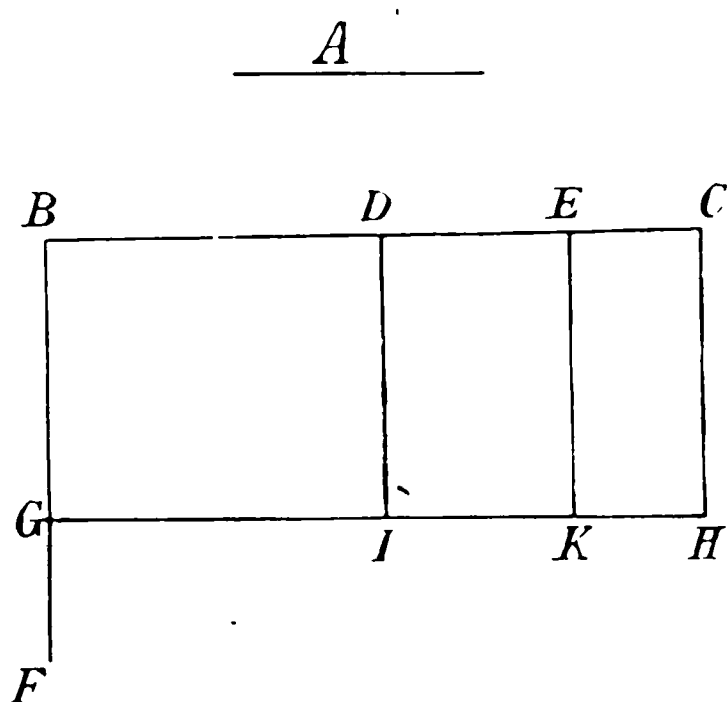
Naar man har to rette Linier, og den ene af dem er delt i et vilkaarligt Antal Stykker, er det Rektangel, der indesluttet af de to rette Linier, lig Summen af de Rektangler, der indesluttet af den udelte rette Linie og hvert af Stykkerne.

Lad A og BC være de to rette Linier, og lad BC være delt vilkaarligt i Punkterne D og E . Jeg siger da: $\square A, BC = \square A, BD + \square A, DE + \square A, EC$.*)

Lad nemlig BF være oprejst fra B vinkelret l. 11 paa BC ; lad BG være afsat lig A , lad GH være trukken gennem G parallel med BC , og lad DI , l. 31 EK og CH være trukne gennem D , E og C parallele med BG .

Da er $BH = BI + DK + EH$. Men BH er $\square A, BC$, thi det indesluttet af GB og BC , og BG er lig A ; BI er $\square A, BD$, thi det indesluttet af GB og BD , og BG er lig A ; DK er $\square A, DE$, thi DI , det vil sige BG , er lig A ; endelig faas paa samme l. 34 Maade, at EH er $\square A, EC$. Altsaa er $\square A, BC = \square A, BD + \square A, DE + \square A, EC$.

Altsaa: naar man har to rette Linier, og den ene af dem er delt i et vilkaarligt Antal Stykker, er det Rektangel, der indesluttet af de to rette Linier, lig Summen af de Rektangler,



*) $(a + b + c)d = ad + bd + cd$.

der indesluttet af den udelte rette Linie og hvert af Stykkerne; h. s. b.

2.

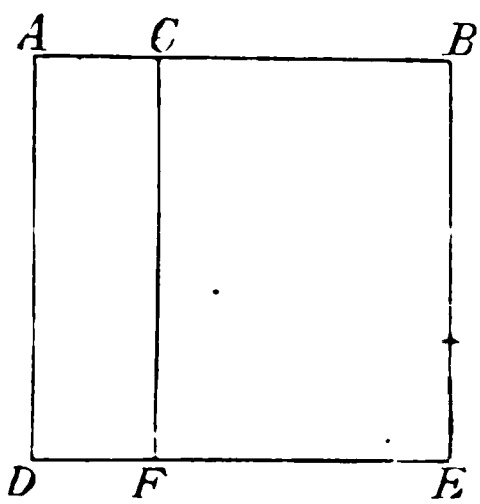
Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Summen af de Rektangler, der indesluttet af hele Linien og hvert af Stykkerne, lig Kvadratet paa hele Linien.

Lad nemlig den rette Linie AB være delt vilkaarligt i Punktet C. Jeg siger da: $\square AB, BC + \square BA, AC = \square AB$. *)

Lad der nemlig paa AB være tegnet et

I. 46

I. 31



I. Def. 22

Kvadrat ADEB, og lad CF være trukken gennem C parallel med AD eller BE.

Da er $AE = AF + CE$. Men AE er $\square AB$; AF er $\square BA, AC$, thi det indesluttet af DA og AC, og DA er lig

AB; og CE er $\square AB, BC$, thi BE er lig AB. Altsaa er $\square BA, AC + \square AB, BC = \square AB$.

Altsaa: naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Summen af de Rektangler, der indesluttet af hele Linien og hvert af Stykkerne, lig Kvadratet paa hele Linien; h. s. b.

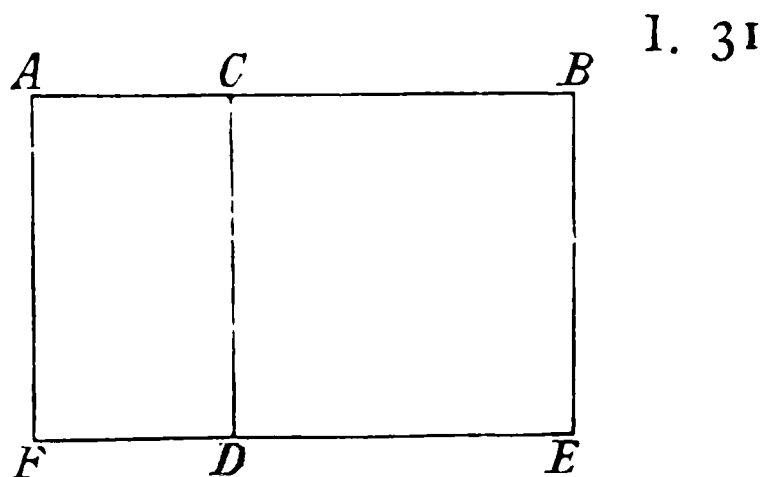
*) $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$.

3.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og et af Stykkerne, lig Summen af Kvadratet paa Stykket og det Rektangel, der indesluttet af Stykkerne.

Lad nemlig den rette Linie AB være delt vilkaarligt i C. Jeg siger da: $\square AB, BC = \square AC, CB + \square BC$.*)

Lad der nemlig paa CB være tegnet et l. 46 Kvadrat CDEB, lad ED være fortsat til F, og lad AF være trukken gennem A parallel med CD eller BE.



Da er $AE = AD + CE$. Men AE er $\square AB, BC$, thi det indesluttet af AB og BE, og BE er lig BC; AD er $\square AC, CB$, thi DC er lig CB; og DB er $\square CB$. Altsaa er $\square AB, BC = \square AC, CB + \square BC$.

Altsaa: naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og et af Stykkerne, lig Summen af Kvadratet

*) $(a + b)b = ab + b^2$.

paa Stykket og det Rektangel, der indesluttet af Stykkerne; h. s. b.

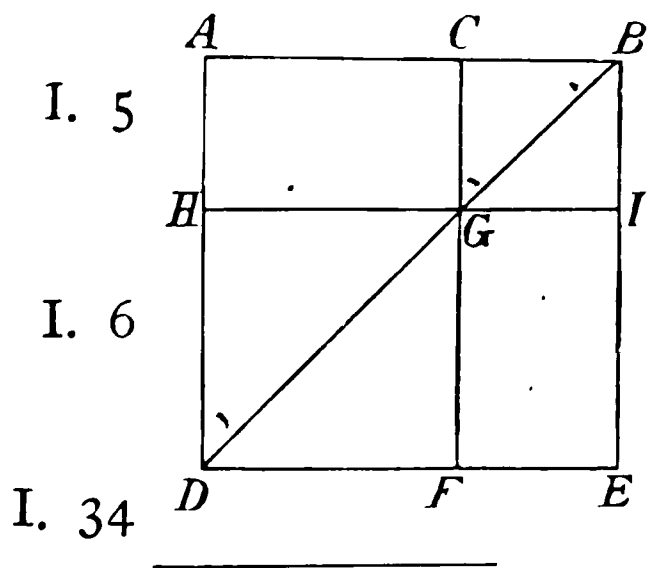
4.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Kvadratet paa hele Linien lig Summen af Kvadraterne paa Stykkerne og to Gange det Rektangel, der indesluttet af Stykkerne.

Lad nemlig den rette Linie AB være delt vilkaarligt i C. Jeg siger da: $\square AB = \square AC + \square CB + 2 \square AC, CB$. *)

Lad der nemlig paa AB være tegnet et Kvadrat ADEB, lad BD være dragen, lad CF I. 30—31 være trukken gennem C parallel med AD eller EB, og lad HI være trukken gennem G parallel med AB eller DE.

Da nu CF er parallel med AD, og BD har I. 29 skaaret dem, er den udvendige Vinkel CGB lig den indvendige og modstaaende Vinkel ADB; og $\angle ADB$ er lig $\angle ABD$, fordi Side BA er lig Side AD; altsaa er $\angle CGB = \angle GBC$; følgelig er Side BC lig Side CG. Men CB er lig GI; og CG er lig IB;



*) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

altsaa er $GI = IB$. Altsaa er $CGIB$ ligesidet. Endvidere siger jeg, at den ogsaa er retvinklet. Thi da CG er parallel med BI , saa er $\angle IBC + \angle GCB$ lig to rette; og $\angle IBC$ er ret; altsaa I. 29 er $\angle BCG$ ogsaa ret; følgelig ere de modstaaende Vinkler CGI og GIB ogsaa rette. Altsaa er I. 34 $CGIB$ retvinklet. Men det blev ogsaa bevist, at den er ligesidet. Altsaa er den et Kvadrat; og den er $\square CB$. Af samme Grund er HF ogsaa et Kvadrat; og den er $\square HG$, det vil I. 34 sige $\square AC$. Altsaa ere HF og IC $\square AC$ og $\square CB$. Og da AG er lig GE , og AG er I. 43 $\square AC, CB$, thi GC er lig CB , saa er $GE = \square AC, CB$. Altsaa er $AG + GE = 2 \square AC, CB$. Desuden ere Kvadraterne HF og CI $\square AC$ og $\square CB$. Altsaa ere de fire $HF + CI + AG + GE = \square AC + \square CB + 2 \square AC, CB$. Men $HF + CI + AG + GE$ er hele $ADEB$, som er $\square AB$. Altsaa er $\square AB = \square AC + \square CB + 2 \square AC, CB$.

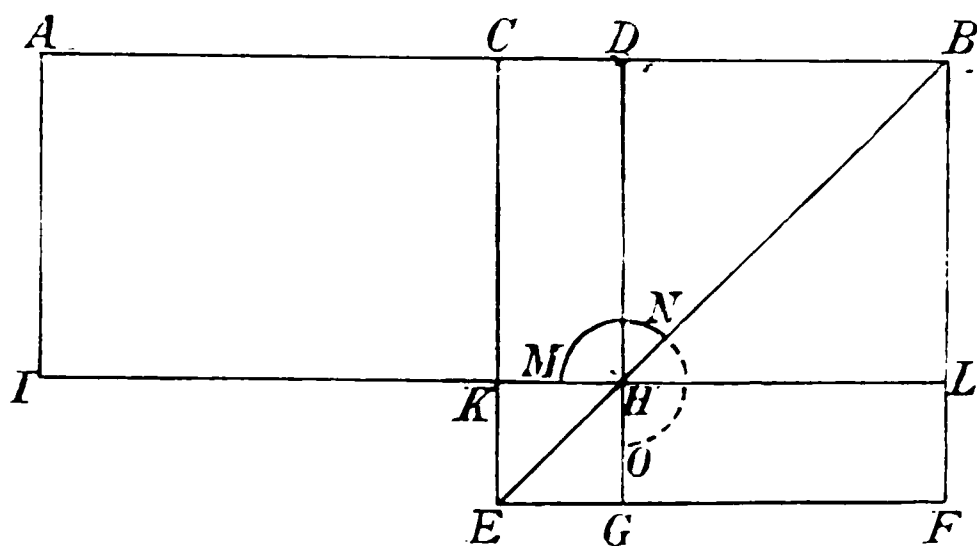
Altsaa: naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Kvadratet paa hele Linien lig Summen af Kvadraterne paa Stykkerne og to Gange det Rektangel, der indesluttet af Stykkerne; h. s. b.

5.

Naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er det Rektangel, der indeluttes af hele Liniens uligestore Stykker, samt Kvadratet paa Stykket mellem Delingspunkterne lig Kvadratet paa Halvdelen.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt i ligestore Stykker i C og i uligestore Stykker i D. Jeg siger da: $\square AD, DB + \square CD = \square CB$.*)

Lad der nemlig paa CB være tegnet et Kvadrat CEFB, lad BE være dragen, lad DG



være trukken gennem D parallel med CE eller BF, lad endvidere IL være trukken gennem H parallel med AB eller EF, og lad endelig AI være trukken gennem A parallel med CK eller BL.

*) $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Nu er Udfyldningsfigur CH lig Udfyldningsfigur HF; lad saa DL være lagt til dem begge, saa er hele CL lig hele DF. Men CL er lig AK, fordi AC er lig CB. Altsaa er $AK = DF$. Lad CH være lagt til dem begge, saa er hele AH lig Gnomon MNO. Men AH er $\square AD, DB$, thi DH er lig DB; altsaa er Gnomon MNO = $\square AD, DB$. Lad KG, som er lig $\square CD$, være lagt til dem begge, saa er Gnomon MNO + KG = $\square AD, DB + \square CD$. Men Gnomon MNO + KG er hele Kvadratet CEFB, som er $\square CB$. Altsaa er $\square AD, DB + \square CD = \square CB$.

Altsaa: naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er det Rektangel, der indesluttet af hele Liniens uligestore Stykker, samt Kvadratet paa Stykket mellem Delingspunkterne lig Kvadratet paa Halvdelen; h. s. b.

6.

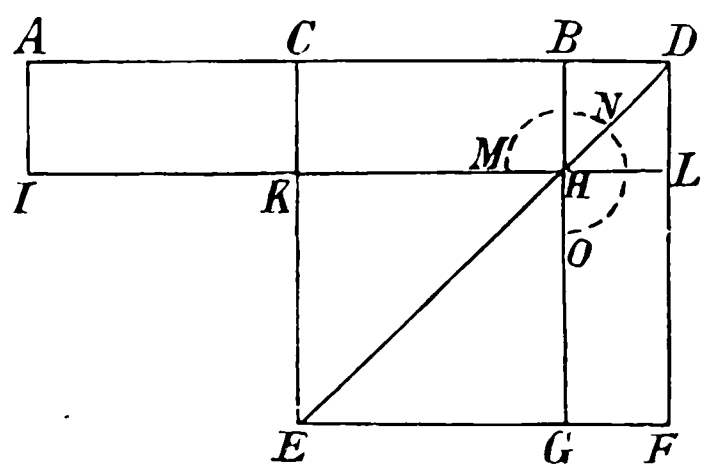
Naar en ret Linie er halveret, og en anden ret Linie er afsat i Forlængelse af den, saa er det Rektangel, der indesluttet af hele Linien med dens Forlængelse og Forlængelsen, samt Kvadratet paa Halvdelen lig Kvadratet paa den

rette Linie, der er sammensat af Halvdelen og Forlængelsen.

Lad nemlig en ret Linie være halveret i Punktet C, og lad en ret Linie BD være afsat i Forlængelse af den. Jeg siger da: $\square AD, DB + \square CB = \square CD$.*)

Lad der nemlig paa CD være tegnet et Kvadrat CEFD, lad DE være dragen, lad BG være trukken gennem Punkt B parallel med EC eller DF, lad IL være trukken gennem Punkt H parallel med AB eller EF, og lad endelig AI

være trukken gennem A parallel med CK eller DL.



Da nu AC er lig CB, er $AK = CH$; og CH er lig HF; AK er altsaa ogsaa lig HF.

Lad CL være lagt til dem begge, saa er hele AL lig Gnomon MNO. Men AL er $\square AD, DB$, thi DL er lig DB, altsaa er Gnomon MNO = $\square AD, DB$. Lad KG, som er lig $\square BC$, være lagt til dem begge, saa er $\square AD, DB + \square CB = \text{Gnomon MNO} + KG$. Men Gnomon MNO

*) $(a + b) b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$.

+ KG er hele Kvadratet CEFD, som er $\square$ CD.
 Altsaa er $\square$ AD, DB + $\square$ CB = $\square$ CD.

Altsaa: naar en ret Linie er halveret, og en anden ret Linie er afsat i Forlængelse af den, saa er det Rektangel, der indesluttet af hele Linien med dens Forlængelse og Forlængelsen, samt Kvadratet paa Halvdelen lig Kvadratet paa den rette Linie, der er sammensat af Halvdelen og Forlængelsen; h. s. b.

7.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Summen af Kvadraterne paa hele Linien og paa det ene Stykke lig Summen af to Gange det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og Stykket, og Kvadratet paa det andet Stykke.

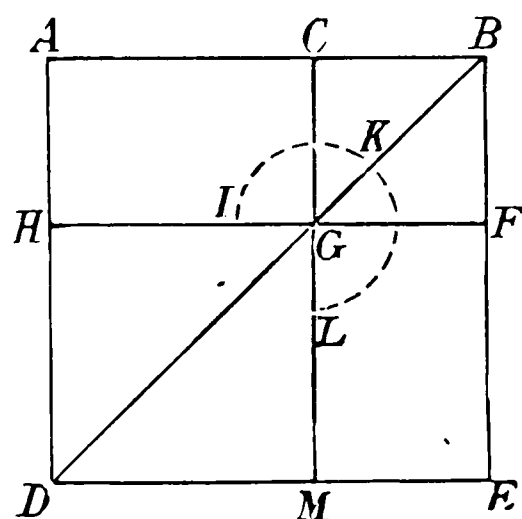
Lad nemlig en ret Linie AB være delt vilkaarligt i Punktet C. Jeg siger da: $\square$ AB + $\square$ BC = 2 $\square$ AB, BC + $\square$ CA. *)

Lad der nemlig paa AB være tegnet et Kvadrat ADEB, og lad Figuren være tegnet.

Nu er AG = GE; lad saa CF være lagt til dem begge, saa er hele AF lig hele CE. Altsaa er AF + CE dobbelt saa stor som AF. Men AF + CE er Gnomon IKL + CF; altsaa er

*) $(a + b)^2 + b^2 = 2(a + b)b + a^2$ (a - b)

Gnomon IKL + CF dobbelt saa stor som AF. Men det dobbelte af AF er $2 \square AB, BC$, thi BF er lig BC; altsaa er Gnomon IKL + CF = $2 \square AB, BC$. Lad DG, som er $\square AC$, være lagt til dem begge, saa er Gnomon IKL + BG



+ GD = $2 \square AB, BC + \square AC$. Men Gnomon IKL + BG + GD er hele Kvadratet ADEB + CF, hvilket er $\square AB + \square BC$. Altsaa er $\square AB + \square BC = 2 \square AB, BC + \square AC$.

Altsaa: naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er Summen af Kvadraterne paa hele Linien og paa det ene Stykke lig Summen af to Gange det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og Stykket, og Kvadratet paa det andet Stykke; h. s. b.

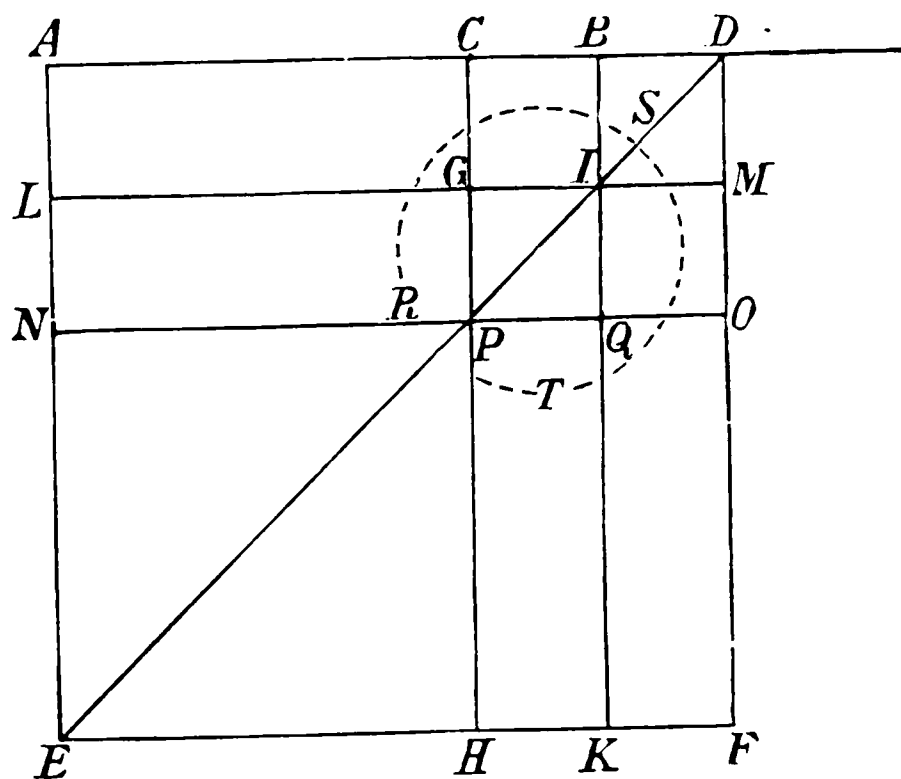
8.

Naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er fire Gange det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og et af Stykkerne samt Kvadratet paa det andet Stykke lig det Kvadrat, der er tegnet paa hele Linien og det første Stykke ud i eet.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt vilkaarligt i Punktet C. Jeg siger da: $4 \square AB, BC + \square AC$ er lig det Kvadrat, der er tegnet paa AB, BC ud i eet. *)

Lad nemlig BD være afsat i Forlængelse af AB, lad BD være afsat lig CB, lad der paa AD være tegnet et Kvadrat AEFD, og lad

Figuren være,
tegnet dobbelt.



Da nu CB er lig BD, men CB er lig GI, og BD er lig IM, saa er $GI = IM$. Af samme Grund er $PQ = QO$. Og da BC er lig BD, og GI er lig IM, saa er $CI = ID$, og $GQ = QM$; men CI er lig QM, thi de ere Udfyldningsfigurer i Parallelogram CO; altsaa er ogsaa $ID = GQ$. Altsaa ere de fire DI, CI, GQ og QM ligestore. Altsaa ere de fire tilsammen det firdobbelte af CI. Da endvidere CB er lig BD, og BD er lig BI, det vil sige CG, og CB er lig GI, det vil sige GP, saa er $CG = GP$. Og da

*) $4(a + b)b + a^2 = (a + 2b)^2$.

CG er lig GP, og PQ er lig QO, er $AG = LP$, og $PK = QF$; men LP er lig PK, thi de ere Udfyldningsfigurer i Parallelogram LK; altsaa er ogsaa $AG = QF$. Altsaa ere de fire AG, LP, PK og QF ligestore. Altsaa er de fire tilsammen det firdobbelte af AG. Nu blev det ogsaa bevist, at de fire CI, ID, GQ og QM tilsammen er det firdobbelte af CI. Altsaa ere de otte, som tilsammen danne Gnomon RST, det firdobbelte af AI. Og da AI er $\square AB, BD$, thi BI er lig BD, saa er $4 \square AB, BD$ det firdobbelte af AI; men det blev ogsaa bevist, at Gnomon RST er det firdobbelte af AI; altsaa er $4 \square AB, BD = \text{Gnomon RST}$. Lad NH, som er lig $\square AC$, være lagt til dem begge, saa er $4 \square AB, BD + \square AC = \text{Gnomon RST} + \text{NH}$. Men Gnomon RST + NH er hele Kvadratet AEFD, som er $\square AD$; altsaa er $4 \square AB, BD + \square AC = \square AD$. Men BD er lig BC. Altsaa er $4 \square AB, BC + \square AC = \square AD$, det vil sige det Kvadrat, der er tegnet paa AB og BC ud i eet.

Altsaa: naar en ret Linie er delt vilkaarligt, er fire Gange det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og et af Stykkerne, samt Kvadratet paa det andet Stykke lig det Kvadrat, der er

tegnet paa hele Linien og det første Stykke ud i eet; h. s. b.

9.

Naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er Summen af Kvadraterne paa hele Liniens uligestore Stykker dobbelt saa stor som Summen af Kvadraterne paa Halvdelen og paa Stykket mellem Delingspunkterne.

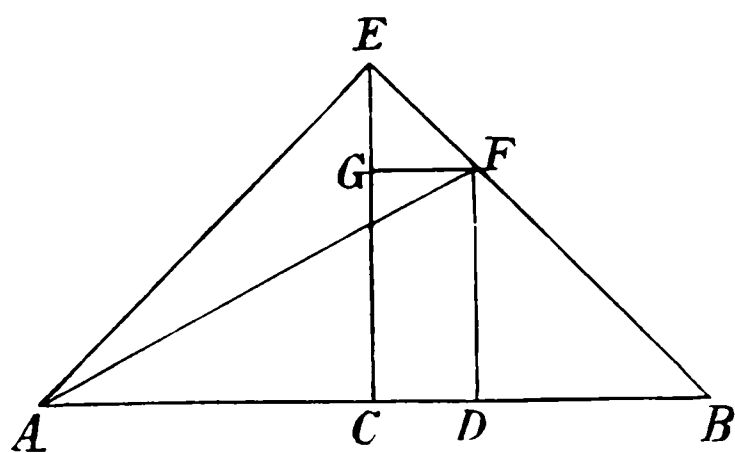
Lad nemlig en ret Linie AB være delt i ligestore Stykker i C og i uligestore Stykker i D. Jeg siger da: $\square AD + \square DB = 2 \square AC + 2 \square CD$.*)

Lad nemlig CE være oprejst fra C vinkelret paa AB, lad den være afsat lig baade AC og CB, lad EA og EB være dragne, lad DF være trukken gennem D parallel med EC, FG gennem F parallel med AB, og lad AF være dragen.

Da nu AC er lig CE, er $\angle EAC = \angle AEC$. Og da Vinkelen ved C er ret, saa ere de andre Vinkler EAC og AEC tilsammen lig een ret; og de ere ligestore; hver af Vinklerne CEA og CAE er altsaa en halv ret. Af samme Grund

*) $a^2 + b^2 = 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{a+b}{2} - b \right)^2$

er da ogsaa hver af Vinklerne CEB og EBC en halv ret. Altsaa er hele $\angle AEB$ ret. Og da $\angle GEF$ er en halv ret, og $\angle EGF$ er ret, thi den er lig den indvendige og modstaaende Vinkel ECB, saa er den tredje Vinkel EFG en halv ret; altsaa er $\angle GEF = \angle EFG$; følgelig er Side EG lig Side GF. Da endvidere Vinkelen ved B er en halv ret, og $\angle FDB$ er ret, thi den er lig den indvendige og modstaaende Vinkel ECB,



saa er den tredje Vinkel BFD en halv ret. Altsaa er Vinkelen ved B $= \angle DFB$; følgelig er Side FD lig Side DB.

Da nu AC er lig CE, er $\square AC = \square CE$; altsaa er $\square AC + \square CE = 2 \square AC$. Men $\square AE$ er lig $\square AC + \square CE$, thi $\angle ACE$ er ret; altsaa er $\square EA = 2 \square AC$. Da endvidere EG er lig GF, er $\square EG = \square GF$; altsaa er $\square EG + \square GF = 2 \square GF$. Men $\square EF$ er lig $\square EG + \square GF$; altsaa er $\square EF = 2 \square GF$. Nu er GF lig CD; altsaa er $\square EF = 2 \square CD$. Desuden er $\square EA = 2 \square AC$; altsaa er $\square AE + \square EF = 2 \square AC + 2 \square CD$. Nu er $\square AF = \square AE + \square EF$, thi $\angle AEF$

er ret; altsaa er $\square AF = 2 \square AC + 2 \square CD$. Men $\square AD + \square DF$ er lig $\square AF$, thi Vinkelen ved D er ret; altsaa er $\square AD + \square DF = 2 \square AC + 2 \square CD$. Nu er DF lig DB; altsaa er $\square AD + \square DB = 2 \square AC + 2 \square CD$.

Altsaa: naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er Summen af Kvadraterne paa hele Liniens uligestore Stykker dobbelt saa stor som Summen af Kvadraterne paa Halvdelen og paa Stykket mellem Delingspunkterne; h. s. b.

IO.

Naar en ret Linie er halveret, og en anden ret Linie er afsat i Forlængelse af den, er Summen af Kvadraterne paa hele Linien med dens Forlængelse og paa Forlængelsen dobbelt saa stor som Summen af Kvadraterne paa Halvdelen og paa den rette Linie, der er sammensat af Halvdelen og Forlængelsen ud i eet.

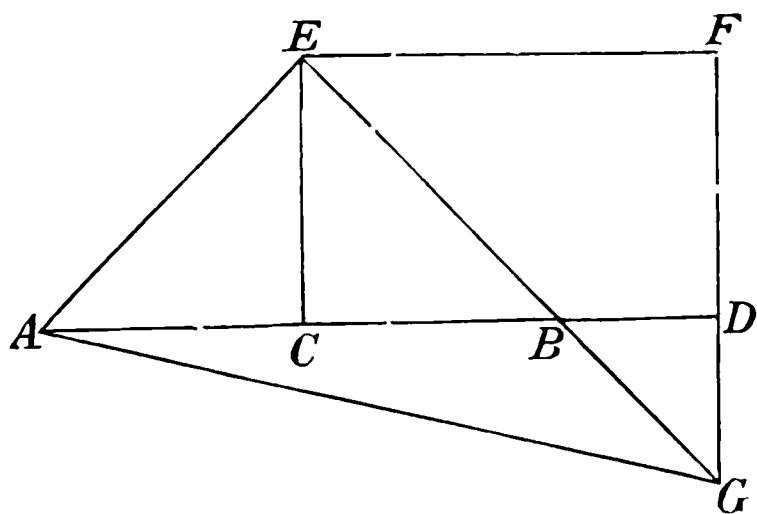
Lad nemlig en ret Linie AB være halveret i Punktet C, og lad en ret Linie BD være afsat i Forlængelse af den. Jeg siger da: $\square AD + \square DB = 2 \square AC + 2 \square CD$.*)

*) $(a + b)^2 + b^2 = 2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{2} + b \right)^2$

Lad nemlig CE være oprejst fra C vinkelret paa AB, lad den være afsat lig baade CA og CB, og lad EA og EB være dragne; lad EF være trukken gennem E parallel med AD, og lad FD være trukken gennem D parallel med CE. Da nu en ret Linie EF har skaaret de parallelle rette Linier EC og FD, saa er $\angle CEF + \angle EFD$ lig to rette; altsaa er $\angle FEB + \angle EFD$ mindre end to rette. Men rette Linier mødes, naar de

forlænges ud fra Vinkler, som ere mindre end to rette; altsaa ville EB og FD mødes, naar de forlænges til den Side, hvor B og D ligge. Lad dem være forlængede

I. F. 5



og mødes i G, og lad AG være dragen.

Da nu AC er lig CE, er $\angle EAC = \angle AEC$; men Vinkelen ved C er ret; altsaa er $\angle EAC$ og $\angle AEC$ hver en halv ret. Af samme Grund er ogsaa $\angle CEB$ og $\angle EBC$ hver en halv ret; altsaa er $\angle AEB$ ret. Og da $\angle EBC$ er en halv ret, saa er $\angle DBG$ ogsaa en halv ret. Fremdeles er $\angle BDG$ ret, thi den er lig $\angle DCE$, fordi de ere Vekselvinkler; altsaa er den tredje Vinkel DGB en halv ret. Altsaa er $\angle DGB = \angle DBG$; følgelig er Side BD lig

Side GD. Da endvidere $\angle EGF$ er en halv ret, og Vinkelen ved F er ret, thi den er lig den modstaaende Vinkel ved C, saa er den tredje Vinkel FEG en halv ret, altsaa er $\angle EGF = \angle FEG$; følgelig er Side GF lig Side EF.

Da nu $\square EC$ er lig $\square CA$, saa er $\square EC + \square CA = 2 \square CA$. Men $\square EA$ er lig $\square EC + \square CA$; altsaa er $\square EA = 2 \square CA$. Da endvidere FG er lig EF, er $\square FG = \square FE$ altsaa er $\square GF + \square FE = 2 \square EF$. Men $\square EG$ er lig $\square GF + \square FE$; altsaa er $\square EG = 2 \square EF$. Nu er $EF = CD$; altsaa er $\square EG = 2 \square CD$. Men det blev ogsaa bevist, at $\square EA$ er lig $2 \square AC$. Altsaa er $\square AE + \square EG = 2 \square AC + 2 \square CD$. Men $\square AG$ er lig $\square AE + \square EG$. Altsaa er $\square AG = 2 \square AC + 2 \square CD$. Nu er $\square AG = \square AD + \square DG$; altsaa er $\square AD + \square DG = 2 \square AC + 2 \square CD$. Men DG er lig DB. Altsaa er $\square AD + \square DB = 2 \square AC + 2 \square CD$.

Altsaa: naar en ret Linie er halveret, og en anden ret Linie er afsat i Forlængelse af den, er Summen af Kvadraterne paa hele Linien med dens Forlængelse og paa Forlængelsen dobbelt saa stor som Summen af Kvadraterne paa Halvdelen og paa den rette Linie, der er

sammensat af Halvdelen og Forlængelsen ud i eet; h. s. b.

II.

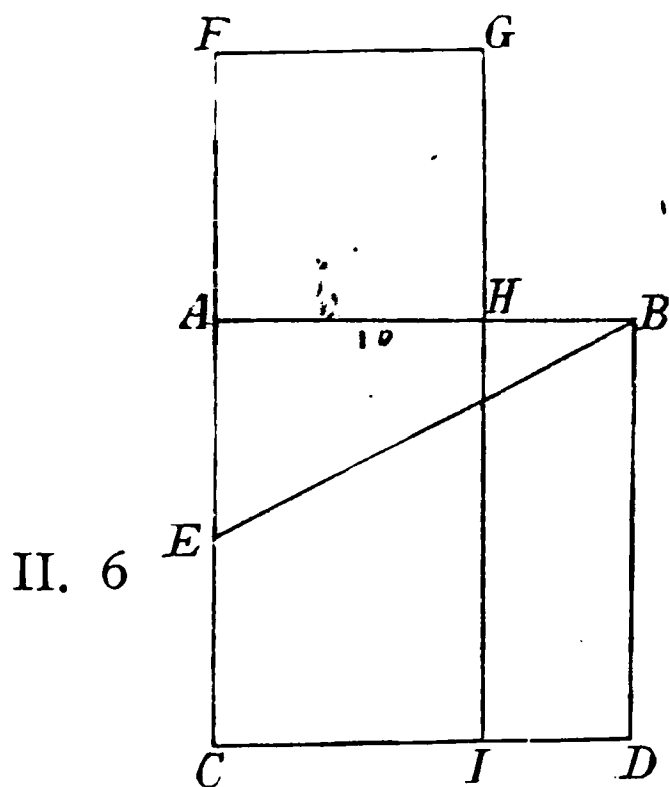
At dele en given ret Linie saaledes, at det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og det ene af Stykkerne, er lig Kvadratet paa det andet Stykke.

Lad AB være den givne rette Linie. Man skal da dele den saaledes, at det Rektangel, der indesluttet af hele Linien og det ene af Stykkerne, er lig Kvadratet paa det andet Stykke.

Lad der nemlig paa AB være tegnet et Kvadrat ABDC, lad AC være halveret i Punkt E, lad BE være dragen, lad CA være fortsat til F, lad EF være afsat lig BE, lad der paa AF være tegnet et Kvadrat FH, og lad GH være fortsat til I. Jeg siger da,

at AB er delt i H saaledes, at $\square AB, BH$ er lig $\square AH$.

Thi da den rette Linie AC er halveret i E, og FA er afsat i Forlængelse af den, saa er $\square CF, FA + \square AE = \square EF$. Nu er $EF = EB$; altsaa er $\square CF, FA + \square AE$



$= \square EB$. Men $\square BA + \square AE$ er lig $\square EB$, thi Vinkelen ved A er ret; altsaa er $\square CF, FA + \square AE = \square BA + \square AE$. Lad det fælles Kvadrat paa AE være trukket fra, saa er Resten $\square CF, FA = \square AB$. Men $\square CF, FA$ er FI, thi AF er lig FG, og $\square AB$ er AD; altsaa er $FI = AD$. Lad det fælles Rektangel AI være trukket fra, saa er Resten $FH = HD$. Men HD er $\square AB, BH$, thi AB er lig BD; og FH er $\square AH$; altsaa er $\square AB, BH = \square HA$.

Altsaa er den givne rette Linie AB delt i H saaledes, at $\square AB, BH$ er lig $\square HA$; h. s. g.

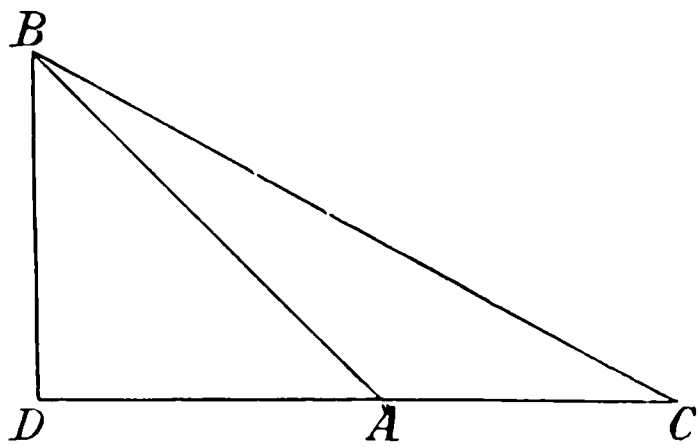
12.

I en stumpvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den stumpe Vinkel, større end Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den stumpe Vinkel; og Forskellen er to Gange det Rektangel, der indesluttet af den af Siderne ved den stumpe Vinkel, paa hvilken den lodrette fældes, og det Stykke, der af den lodrette afskæres udenfor ved den stumpe Vinkel.

Lad ABC være en stumpvinklet Trekant, hvor $\angle BAC$ er stump, og lad der fra Punkt

B være nedfældet BD lodret paa den forlængede CA. Jeg siger da, at $\square BC$ er større end $\square CA + \square AB$, og at Forskellen er $2 \square CA, AD$.

Thi da den rette Linie CD er delt vilkaar-
II. 4 ligt i Punkt A, saa er $\square DC = \square CA + \square AD + 2 \square CA, AD$. Lad $\square DB$ være lagt til dem begge, saa er $\square CD + \square DB = \square CA + \square AD + \square DB + 2 \square CA, AD$. Men $\square CB$



er lig $\square CD + \square DB$, thi Vinkelen ved D er ret; og $\square AB$ er lig $\square AD + \square DB$; altsaa er $\square CB = \square CA + \square AB +$

$2 \square CA, AD$. Følgelig er $\square CB$ større end $\square CA + \square AB$, og Forskellen er $2 \square CA, AD$.

Altsaa: i en stumpvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den stumpe Vinkel, større end Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den stumpe Vinkel; og Forskellen er to Gange det Rektangel, der indesluttet af den af Siderne ved den stumpe Vinkel, paa hvilken den lodrette fældes, og det Stykke, der af den lodrette afskæres udenfor ved den stumpe Vinkel; h. s. b.

I en spidsvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den spidse Vinkel, mindre end Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den spidse Vinkel; og Forskellen er to Gange det Rektangel, der indesluttet af den af Siderne ved den spidse Vinkel, paa hvilken den lodrette fældes, og det Stykke, der af den lodrette afskæres udenfor ved den spidse Vinkel.

Lad ABC være en spidsvinklet Trekant, hvor Vinkelen ved B er spids, og lad AD være nedfældet fra Punkt A lodret paa BC. Jeg siger da, at $\square AC$ er mindre end $\square CB + \square BA$, og at Forskellen er $2 \square CB, BD$.

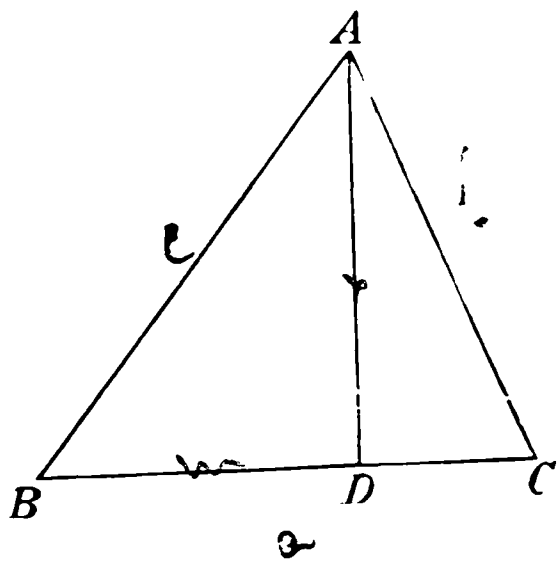
Thi da den rette Linie CB er delt vilkaar-

II. 7

ligt i D, saa er $\square CB + \square BD = 2 \square CB, BD + \square DC$. Lad $\square DA$ være lagt til dem begge, saa er

$\square CB + \square BD + \square DA = 2 \square CB, BD + \square AD + \square DC$. Men $\square AB$ er

lig $\square BD + \square DA$, thi Vinkelen ved D er ret; og $\square AC$ er lig $\square AD + \square DC$; altsaa er



$\square CB + \square BA = \square AC + 2 \square CB, BD$.
Følgelig er $\square AC$ alene mindre end $\square CB + \square BA$, og Forskellen er $2 \square CB, BD$.

Altsaa: i en spidsvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den spidse Vinkel, mindre end Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den spidse Vinkel; og Forskellen er to Gange det Rektangel, der indesluttet af den af Siderne ved den spidse Vinkel, paa hvilken Højden fældes, og det Stykke, der af den lodrette afskæres udenfor ved den spidse Vinkel; h. s. b.

14.

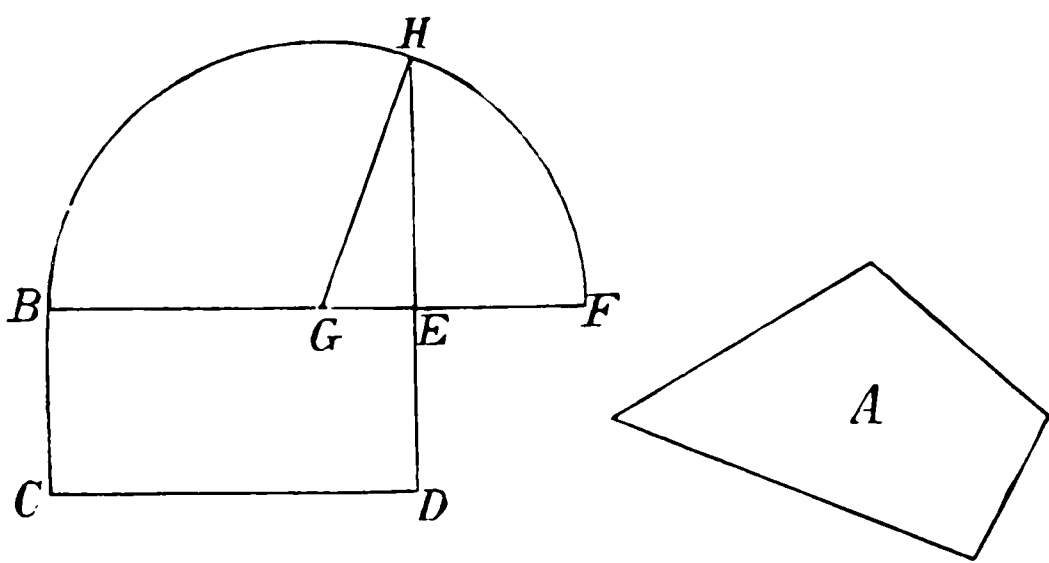
At konstruere et Kvadrat lig en given retlinet Figur.

Lad A være den givne retlinede Figur. Man skal da konstruere et Kvadrat lig den retlinede Figur A.

- I. 45 Lad der nemlig være konstrueret et Rektangel BD lig den retlinede Figur A. Hvis BE saa er lig ED, vil det forlangte være udført; thi saa er der konstrueret et Kvadrat BD lig den retlinede Figur A. Men hvis ikke, er en af Siderne BE og ED større end

den anden. Lad BE være størst, lad den være forlænget til F, lad EF være afsat lig ED, lad BF være halveret i G, lad Halvcirkel BHF være tegnet med G som Centrum og GB eller GF som Radius, lad DE være forlænget til H, og lad GH være dragen.

Da nu den rette Linie BF er delt i ligestore Stykker i G og i uligestore Stykker i E,



saa er $\square BE, EF + \square EG = \square GF$. Men II. 5 GF er lig GH; altsaa er $\square BE, EF + \square GE = \square GH$. Og $\square HE + \square EG$ er lig $\square GH$; altsaa er $\square BE, EF + \square GE = \square HE + \square EG$. Lad det fælles Kvadrat paa GE være trukket fra, saa er Resten $\square BE, EF = \square EH$. Men $\square BE, EF$ er BD, thi EF er lig ED; altsaa er $BD = \square HE$. Men BD er lig den retlinede Figur A. Altsaa er den retlinede

Figur A ogsaa lig det Kvadrat, som kan tegnes paa EH.

Altsaa er der konstrueret et Kvadrat lig den givne retlinede Figur A, nemlig det der kan tegnes paa EH; h. s. g.

